Numerické metody – Interpolace

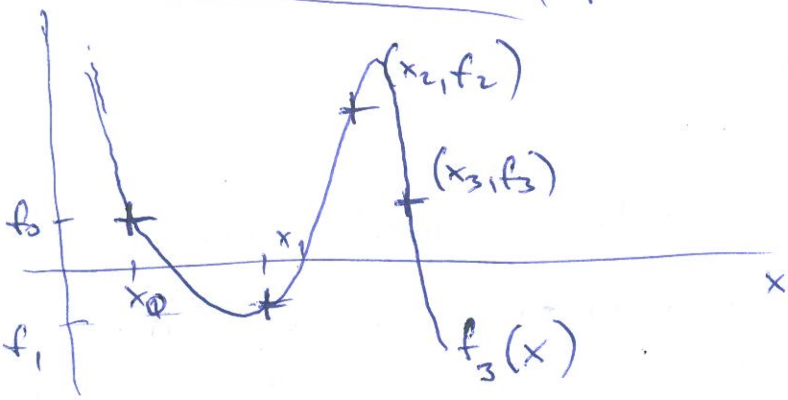
Jsou dány body $(x_0,f_0),\dots,(x_m,f_m)\in\mathbb{R}^2$, $x_i\neq x_j$ pro $i\neq j$
a je dána báze $(\varphi_k)_{k=0}^m$ ~~⊂ F~~, kde $\varphi_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Hledáme funkci

$$\boxed{f_m(x)=\sum_{k=0}^m a_k\varphi_k(x)}$$

tak, že

$$\boxed{f_m(x_i)=f_i}\quad \text{pro } i=0,\dots,m.$$



Např.:
- $\langle\varphi_k\rangle_{k=0}^m = P_m$ .. polynomy
- $\langle\varphi_k\rangle_{k=0}^{m} := \langle\cos(k\omega_0 x),\sin(k$ .. trigonometrické funkce
- po částech polynomiální interpolace (splajny)

Úloha interpolace vede na soustavu lin. rovnic

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\varphi_0(x_0), & \dots, & \varphi_m(x_0)\\ \varphi_0(x_1), & \dots, & \varphi_m(x_1)\\ \vdots & & \vdots\\ \varphi_0(x_m), & \dots, & \varphi_m(x_m)\end{pmatrix}}_{=:A}\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_0\\ f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}$$

Cvičení. Dokažte, že tato soustava má právě jedno řešení.

Interpolace monomiály

$$\varphi_k(x):=x^k,\ k=0,1,\dots,m \rightsquigarrow A=\begin{pmatrix}1 & x_0 & (x_0)^2 & \cdots & (x_0)^m\\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & \cdots & (x_1)^m\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 1 & x_m & (x_m)^2 & & (x_m)^m\end{pmatrix}$$

Cvičení. Ukažte, že $\det A=\prod_{i<j}(x_j-x_i)=(x_1-x_0)\cdots(x_m-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdots$

Stabilita soustav lin. rovnic, A regulární

$$A(x+\Delta x)=b+\Delta b$$

$$\|\Delta x\|=\|A^{-1}\Delta b\| \ /\cdot\tfrac{1}{\|x\|} \Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\le \kappa(A)\cdot\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

$\kappa(A)=\|A^{-1}\|\cdot\|A\|$ .. číslo podmíněnosti A

Př. $\varepsilon > 0$: $\begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1+\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+\delta \end{pmatrix}$

$$x = 1 + \delta \frac{1+\varepsilon}{4\varepsilon}, \quad y = 1 - \delta \frac{1-\varepsilon}{4\varepsilon}$$

Narušení pravé strany o δ vede ke změně řeš. $O\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)$.
Vlastní čísla matice jsou $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2\varepsilon$,
tj. $K(A) = \frac{1}{\varepsilon}$.

Lagrangeova interpolace

Interpolace monomiály vede na nestabilní soustavy lin. rovnic, zvolíme jinou bázi prostoru P_n.
Lagrangeova báze $(L_k)_{k=0}^n$ splňuje $L_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$

$$\boxed{L_k(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}}$$

Cvičení. Ukažte, že $(L_k)_{k=0}^n$ je báze P_n

$$\boxed{f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x)}$$

Chyba interpolace

Nechť $\forall i \in \{0,1,\dots,n\}: x_i \in \langle a,b\rangle$ a nechť $\boxed{f_i = f(x_i)}$.
Odhadněme na intervale $\langle a,b\rangle$ chybu $\{f \in C^{n+1}(\langle a,b\rangle)\}$

$$\boxed{e_n(x) := f(x) - f_n(x)}$$

Pro libovolné $\tilde{x} \in \langle a,b\rangle$: $\tilde{x} \neq x_i$ pro $i=0,\dots,n$ zvolme

$$g_{\tilde{x}}(x) := e_n(x) - L_{\tilde{x}}(x), \text{ kde } L_{\tilde{x}}(x) := e_n(\tilde{x}) \frac{\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)}{\prod_{j=0}^{n}(\tilde{x}-x_j)}$$

$g_{\tilde{x}}$ má v $\langle a,b\rangle$ $n+2$ kořenů
Z Rolleovy věty má $g_{\tilde{x}}'(x)$ alespoň $n+1$ kořenů, $g_{\tilde{x}}''(x)$ alespoň n kořenů,
… a $g_{\tilde{x}}^{(n+1)}(x)$ má alespoň 1 kořen $\xi(\tilde{x}) \in \langle a,b\rangle$.

$$0 = g_{\tilde{x}}^{(n+1)}(\xi(\tilde{x})) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[f(x) - f_n(x) - L_{\tilde{x}}(x)\right]\Big|_{x:=\xi(\tilde{x})}$$

$$= f^{(n+1)}(\xi(\tilde{x})) - \frac{e_n(\tilde{x})}{\prod\limits_{j=0}^{n}(\tilde{x}-x_j)}\cdot(n+1)!$$

Tj:

$$\boxed{e_n(\tilde{x}) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(\tilde{x}))\cdot\prod_{j=0}^{n}(\tilde{x}-x_j) \quad \text{pro } \tilde{x}\in\langle a,b\rangle,\ \tilde{x}\neq x_j}$$

$$\max_{x\in\langle a,b\rangle}|e_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}\cdot\max_{x\in\langle a,b\rangle}|f^{(n+1)}(x)|\cdot\max_{x\in\langle a,b\rangle}\left|\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\right|$$

Chybu můžeme zmenšit vhodným rozložením uzlů x_j.

Př. Interpolujte funkci

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}, \quad x\in\langle -5,5\rangle$$

na ~~pravidel~~ ekvidistantní síti uzlů $x_i := -5 + \frac{10i}{n}$, $i=0,\dots,n$

Čebyševova interpolace

Čebyševovy polynomy:

$$\boxed{\begin{aligned} T_0(x) &:= 1\\ T_1(x) &:= x\\ T_{k+1}(x) &:= 2x\,T_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k=1,2,\dots \end{aligned}}$$

Cvičení: Ukažte, že platí alternativní reprezentace Čeb. p.:

$$T_k(x) = \begin{cases} \cos(k \arccos x), & |x|\leq 1\\ \cosh(k\,\mathrm{acosh}\,x), & \cancel{|x|>1}\ x\geq 1\\ (-1)^k\cosh(k\,\mathrm{acosh}(-x)), & x\leq -1 \end{cases}$$

kde $\cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\mathrm{acosh}\,x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, $x\geq 1$

Čebyševovy polynomy mají kořeny v bodech

$$\tilde{x}_i^{(k)} = \cos\frac{(2i+1)\pi}{2k}, \quad i=0,\dots,k-1$$

Lemma. Pro $k=0,1,2,\dots$, $|x|\geq 1$:

$$\boxed{\begin{aligned} T_k(x) &= \tfrac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^k + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^k\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^k + \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-k}\right]. \end{aligned}}$$

Důkaz. (indukcí)

$k=0$: $T_0(x)=1$ ✓

$k=1$: $T_1(x)=x$ ✓

$k>1$: $\left.\begin{aligned} T_{k-1}(x) &= \tfrac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k-1}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k-1}\right], \\ T_k(x) &= \tfrac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k}\right] \end{aligned}\right\}$ indukční předpoklad

$$\begin{aligned} T_{k+1}(x) &= 2x\,T_k(x) - T_{k-1}(x) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k-1}\overbrace{\left[2x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-1\right]}^{=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2} \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k-1}\underbrace{\left[2x\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)-1\right]}_{=\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2 = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}} \end{aligned}$$

$\square$

Nechť $0<a<b$. $x := \frac{b+a-2t}{b-a}$ transformuje $\langle a,b\rangle$ na $\langle -1,1\rangle$.

Zaveďme škálovaný Čeb. pol. $\widetilde{T}_k(t) := \dfrac{T_k\left(\frac{b+a-2t}{b-a}\right)}{T_k\left(\frac{b+a}{b-a}\right)}$: $\widetilde{T}_k(0)=1$

~~Označme~~

Věta. Pro $0<a<b$:

$$\boxed{\min_{\substack{p_k\in\mathcal{P}_k:\\ p_k(0)=1}} \max_{t\in\langle a,b\rangle} |p_k(t)| = \max_{t\in\langle a,b\rangle} |\widetilde{T}_k(t)| = \frac{2q^k}{1+q^{2k}}, \text{ kde } q=\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}}$$

Důkaz. (sporem)

Předp., že ex. $q_k\in\mathcal{P}_k$: $q_k(0)=1$ a $\max_{t\in\langle a,b\rangle}|q_k(t)| < \max_{t\in\langle a,b\rangle}|\widetilde{T}_k(t)|$

Body $t_i^{(k)} := \frac{1}{2}\left[(b+a)-(b-a)x_i^{(k)}\right]$, $x_i^{(k)} = \cos\frac{i\pi}{k}$, $i=0,\dots,k$

jsou maxima resp. minima $\widetilde{T}_k$: $\widetilde{T}_k(t_i^{(k)}) = \dfrac{(-1)^i}{T_k\left(\frac{b+a}{b-a}\right)}$, tj.

$-\widetilde{T}_k(t_{2j}^{(k)}) < q_k(t_{2j}^{(k)}) < \widetilde{T}_k(t_{2j}^{(k)})$ a $\widetilde{T}_k(t_{2j+1}^{(k)}) < q(t_{2j+1}^{(k)}) < -\widetilde{T}_k(t_{2j+1}^{(k)})$

a tedy $r_k(t) := \widetilde{T}_k(t) - q_k(t)$ má alespoň k kořenů a zároveň $r_k(0)=0$.

Tedy $r_k(t) \equiv 0$ a $q_k(t) = \tilde{T}_k(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Maximum je rovno

$$\frac{1}{T_k\left(\frac{b+a}{b-a}\right)} \overset{\text{Lemma}}{=} \frac{2}{q^k + q^{-k}} = \frac{2q^k}{q^{2k}+1}, \quad \text{kde } q = \frac{b+a}{b-a} + \sqrt{\left(\frac{b+a}{b-a}\right)^2 - 1}$$

$$= \dots = \frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} \qquad \square$$

Čeb. polynom lze zapsat
$$\boxed{T_{k+1}(x) = \underbrace{2^k}_{\text{viz rek. def.}} \underbrace{\prod_{i=0}^{k} \left(x - \tilde{x}_i^{(k+1)}\right)}_{\text{viz } T_{k+1} \in P_k}}$$

a proto

$$\min_{x_j \in \langle -1,1\rangle} \max_{x \in \langle -1,1\rangle} \left|\prod_{j=0}^{m} (x - x_j)\right| \overset{\max_{x\in\langle -1,1\rangle}}{=} \left|\prod_{i=0}^{m} \left(x - \tilde{x}_j^{(m+1)}\right)\right| = 2^{-m} \max_{x \in \langle -1,1\rangle} |T_{m+1}(x)| = 2^{-m}$$

Pro <u>chybu Čebyševovy interpolace</u> tedy platí:

$$\boxed{\max_{x \in \langle -1,1\rangle} |f(x) - f_m(x)| \le \frac{2^{-m}}{(m+1)!} \max_{x \in \langle -1,1\rangle} \left|f^{(m+1)}(x)\right|}$$

<u>Cvičení</u>. Dokažte
$$\boxed{\sum_{i=0}^{m} T_k\left(\tilde{x}_i^{(m+1)}\right) T_\ell\left(\tilde{x}_i^{(m+1)}\right) = \begin{cases} 0, & k \ne \ell \\ \frac{1}{2}(m+1), & k = \ell \ne 0 \\ m+1, & k = \ell = 0 \end{cases}}$$

<u>Výpočet koeficientů</u>
$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k T_k(x)$$

$$i = 0, \dots, m: \quad \sum_{k=0}^{m} a_k T_k\left(\tilde{x}_i^{(m+1)}\right) = f_i$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} a_k T_k\left(\tilde{x}_i^{(m+1)}\right) T_\ell\left(\tilde{x}_i^{(m+1)}\right) = \sum_{i=0}^{m} f_i \, T_\ell\left(\tilde{x}_i^{(m+1)}\right)$$

a tedy
$$\boxed{a_0 = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} f_i}, \quad \text{viz } T_0 = 1$$

$$\boxed{a_k = \frac{2}{m+1} \sum_{i=0}^{m} f_i \, T_k\left(\tilde{x}_i^{(m+1)}\right) = \frac{2}{m+1} \sum_{i=0}^{m} f_i \cos k \frac{(2i+1)\pi}{2(m+1)}, \quad k = 1, \dots, m}$$

FFT