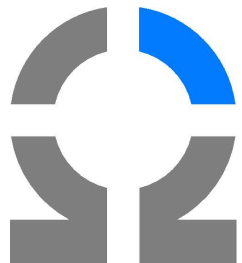


Matematické modelování elektromagnetických polí

Seminář MI21, VŠB-TU Ostrava, 13. 10. 2011

Dalibor Lukáš



Katedra aplikované matematiky, IT4Innovations
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

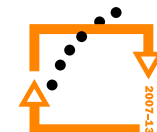
email: dalibor.lukas@vsb.cz



<http://mi21.vsb.cz>



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

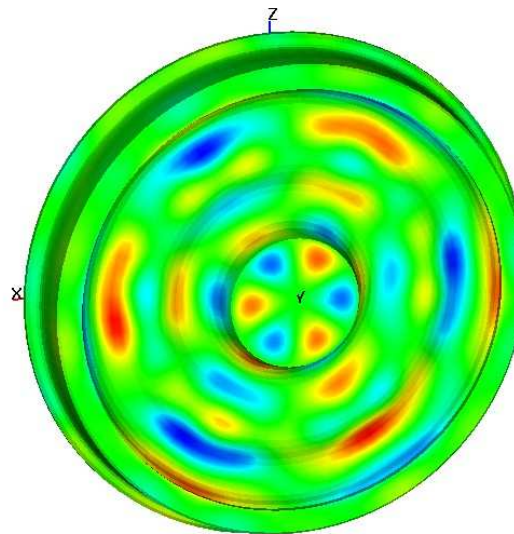
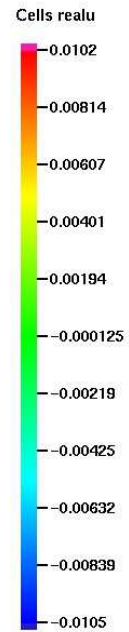
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Má osobní motivace

Matematické modelování v akustice

spolupráce s Dr. Szwedou

aplikace



matematika

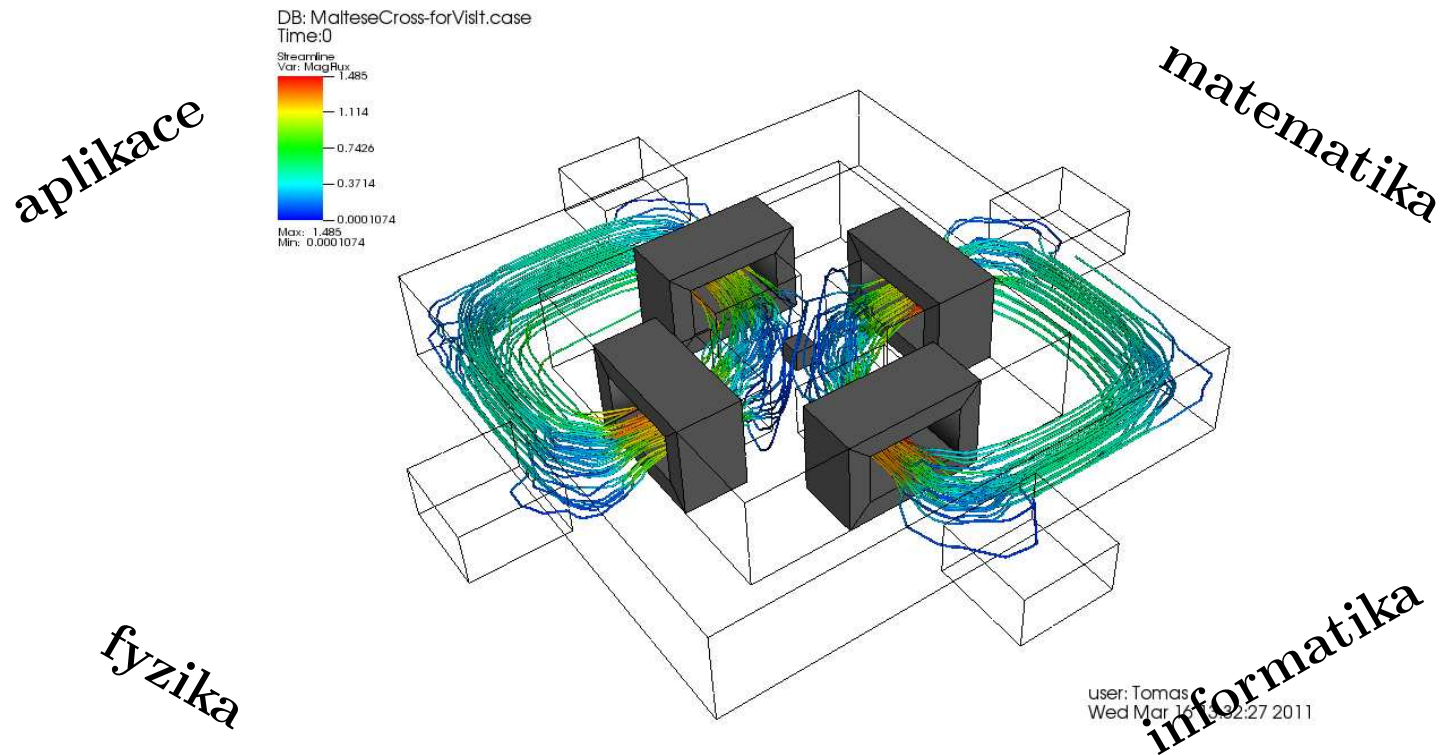
fyzika

informatika

Má osobní motivace

Matematické modelování a optimalizace v magnetostaticce

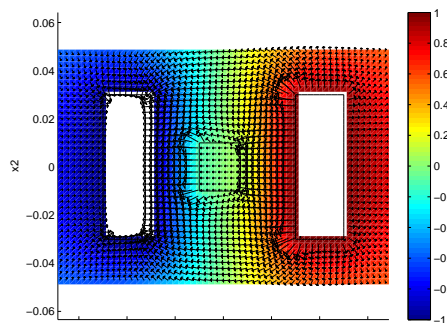
spolupráce s Prof. Pištorou, Doc. Postavou, Dr. Životským



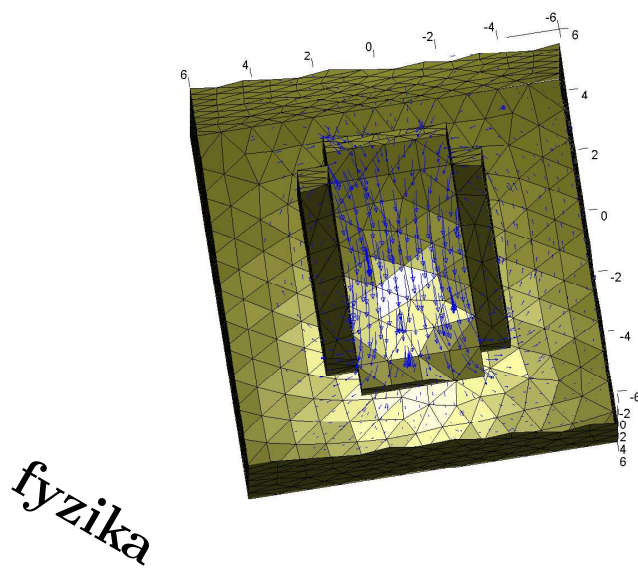
Matematické modelování elektromagnetických polí

Cíl kurzu

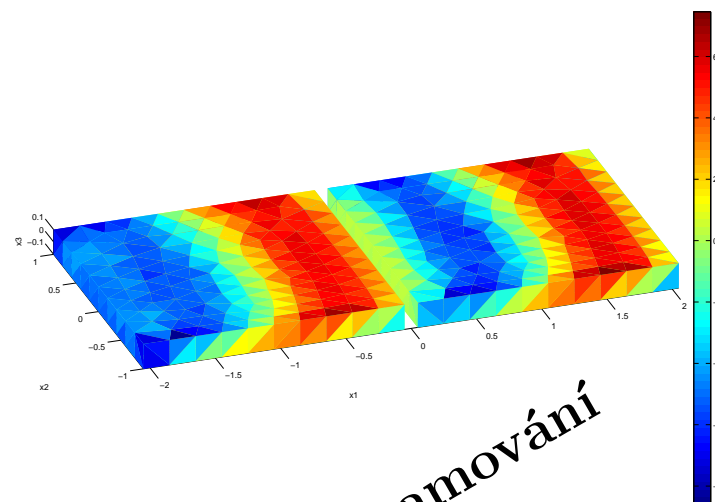
elektro-aplikace



matematika



fyzika

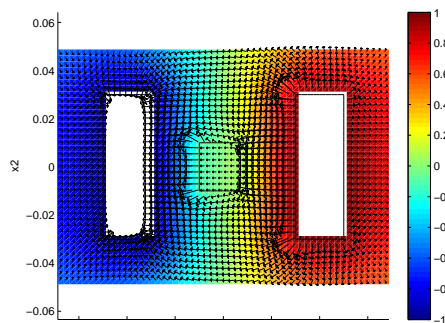


programování

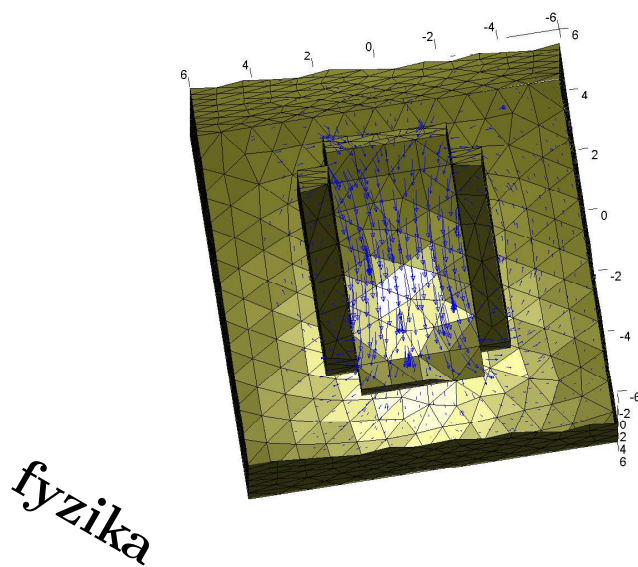
Matematické modelování elektromagnetických polí

Cíl kurzu — alespoň podpořit výuku teorie elmg. pole na FEI

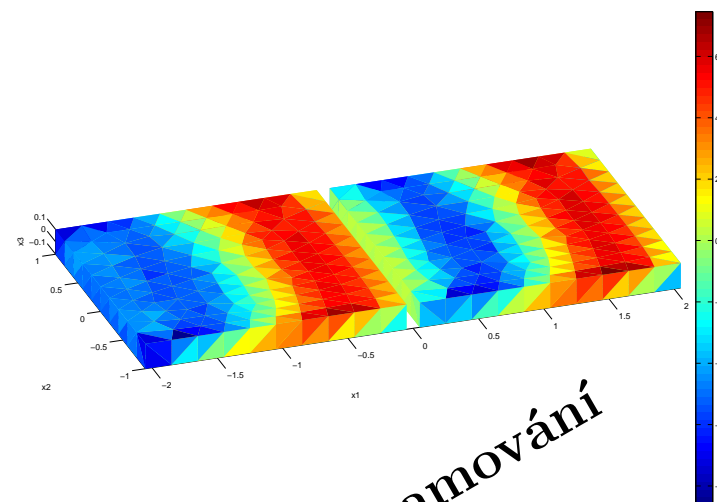
elektro-aplikace



matematika



fyzika



programování

Vše by se mělo dělat tak jednoduše, jak je to jen možné, ale ne jednodušeji.

A. Einstein

Matematické modelování elektromagnetických polí

Osnova

- Elektrostatika
 - Fyzika
 - Modelová úloha, redukce do 2d
 - Variační formulace, MKP
 - Hraniční integrální formulace, MHP
 - MKP vers. MHP
- Magnetostatika
 - Modelová úloha ve 2d, MKP \circ MHP
 - Modelová úloha ve 3d, MKP
- Elektromagnetické záření
 - Modelová úloha ve 3d, MHP

Matematické modelování elektromagnetických polí

Osnova

- Elektrostatika
 - Fyzika
 - Modelová úloha, redukce do 2d
 - Variační formulace, MKP
 - Hraniční integrální formulace, MHP
 - MKP vers. MHP
- Magnetostatika
 - Modelová úloha ve 2d, MKP \circlearrowright MHP
 - Modelová úloha ve 3d, MKP
- Elektromagnetické záření
 - Modelová úloha ve 3d, MHP

Fyzikální podstata elektrostatiky

popisuje časově neměnná elektrická (silová) pole nabitých těles.

Coulombův zákon

vyjadřuje síly mezi náboji.



$$\mathbf{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2} \cdot \mathbf{e}_{12} = -\mathbf{F}_2,$$

$q_1, q_2 \in \mathbb{R}$... elektrické náboje (v Coulombech),

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$... polohy nábojů, $\mathbf{e}_{12} := (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)/|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$,

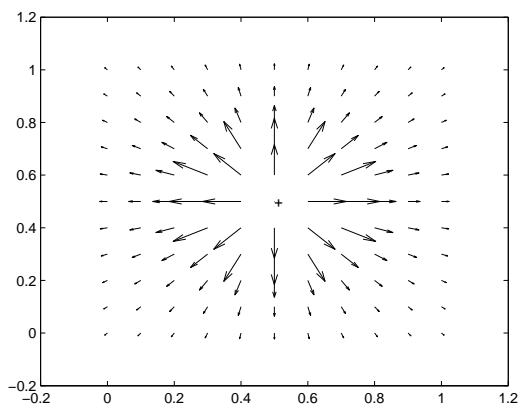
$\epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12}$... permitivita vakua

Fyzikální podstata elektrostatiky

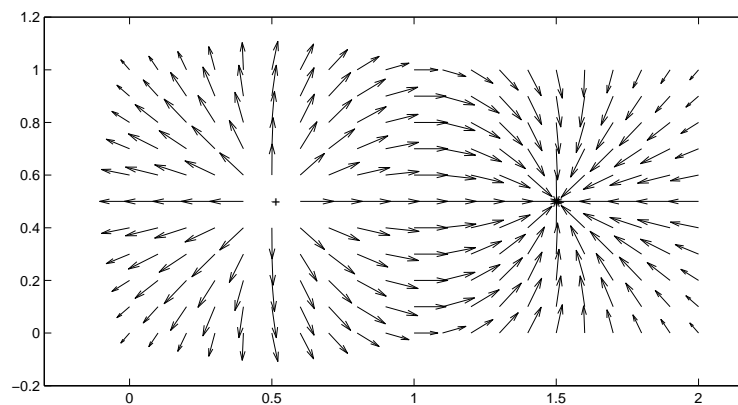
Intenzita elektrického pole

je síla elektrického pole na jednotkový náboj.

pole kladného náboje



pole dvou nesouhlasných nábojů



Platí princip superpozice, např.:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} dV(\mathbf{y}),$$

kde $\rho(\mathbf{y})$ je objemová hustota náboje v $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, tj. $\text{supp}(\rho) \subset \Omega$.

Fyzikální podstata elektrostatiky

Gaussův zákon (ve vakuu)

Tok elektrického pole z povrchu objemového elementu je určen náboji v tomto objemu.

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \Omega \subset \mathbb{R}^3,$$

kde $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ je vnější jednotková normála k $\partial\Omega$.

Gaussova věta: $\oint_{\partial\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) dV(\mathbf{x})$ dává

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

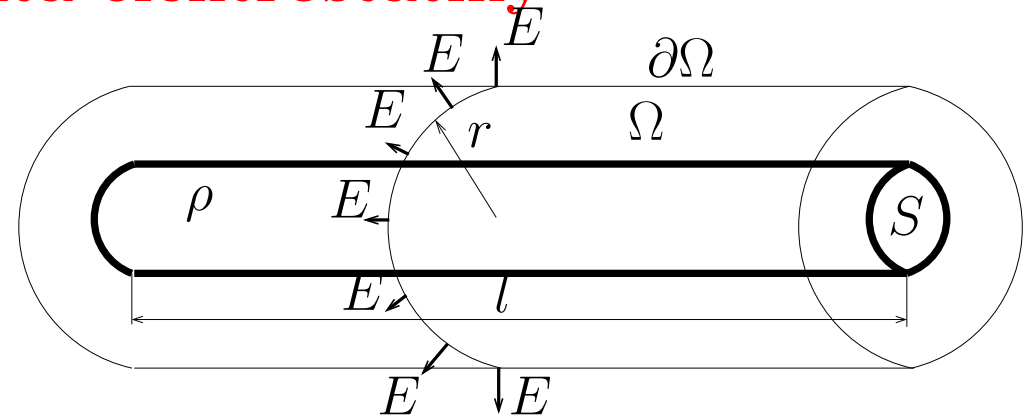
Fyzikální podstata elektrostatiky

Příklad 1: Pole dlouhé nabité tyče

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} dV(\mathbf{x})$$

$$E(r)2\pi rl = \frac{\rho Sl}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho S}{2\pi r \varepsilon_0}$$

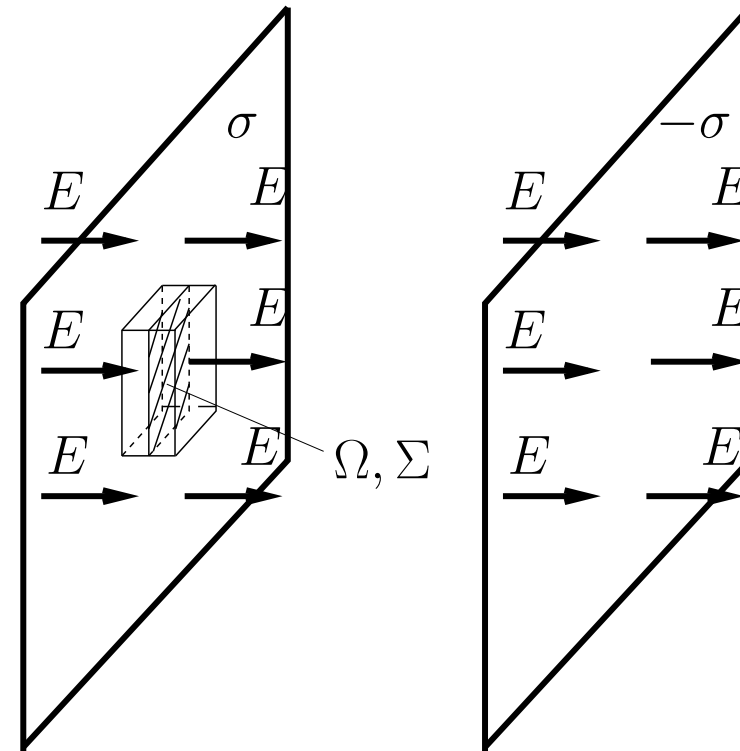


Příklad 2: Pole nabité desky

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{E}_+(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} \frac{\sigma(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} dS(\mathbf{x})$$

$$2E_+|\Sigma| = \frac{\sigma|\Sigma|}{\varepsilon_0}$$

$$E_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



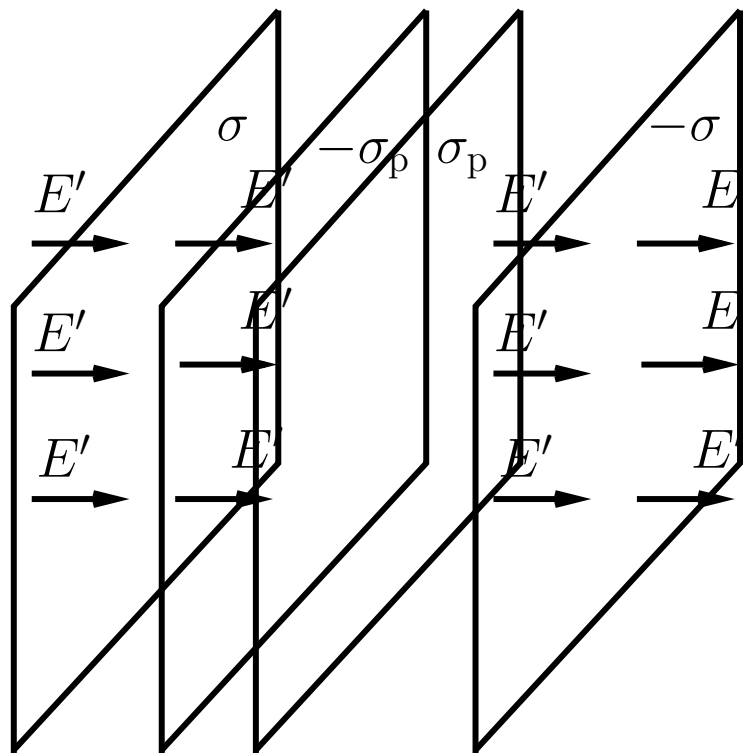
Příklad 3: Pole deskového kondenzátoru

$$E = 2E_+ = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Fyzikální podstata elektrostatiky

Příklad 4: Pole dvou vnořených deskových kondenzátorů s opačnou orientací

$$E' = E - E_p = \frac{\sigma - \sigma_p}{\epsilon_0}$$



Příklad modeluje chování polarizovaných nábojů (vnitřní kondenzátor) v dielektriku, které je vloženo do elektrostatického pole (vnější kondenzátor).

Fyzikální podstata elektrostatiky

Gaussův zákon v dielektriku

V dielektrických materiálech se po vložení do elektrostatického pole vytvoří vrstvy polarizovaných nábojů orientovaných v souladu s vnějším polem. Ty se chovají jako vnořené kondenzátory, viz příklad 4, tedy zeslabují vnější pole.

Označme $\rho_{\text{pol}}(\mathbf{x}) = \text{div}(-\mathbf{P}(\mathbf{x}))$ hustotu polarizovaného náboje v dielektriku, kde \mathbf{P} je elektrostatická polarizace.

$$\text{div}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) = \frac{\rho(\mathbf{x}) + \rho_{\text{pol}}(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}$$
$$\text{div}(\varepsilon_r \mathbf{E}(\mathbf{x})) := \text{div} \left(\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} \right) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0},$$

kde $\varepsilon_r \geq 1$ je relativní permitivita. Označme $\mathbf{D}(\mathbf{x}) := \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x})$ el. indukci:

$$\text{div}(\mathbf{D}(\mathbf{x})) = \rho(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

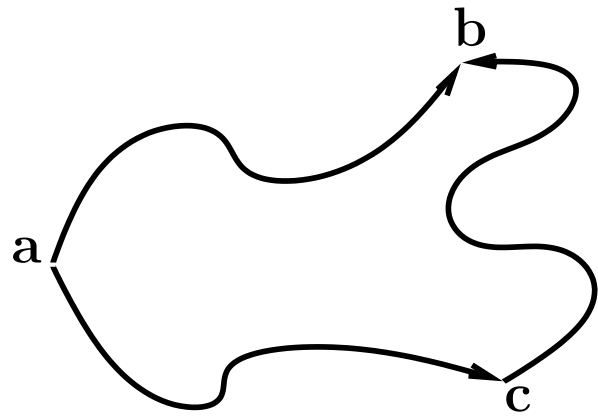
Fyzikální podstata elektrostatiky

Elektrický potenciál (napětí)

Elektrostatické pole je potenciální:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla u(\mathbf{x}),$$

kde u je elektrický potenciál (napětí). Tzn. práce, kterou vykoná elektrostatické pole působící na jednotkový náboj, nezávisí na dráze:



$$\begin{aligned} W_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}} &= - \int_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}} \nabla u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{l}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{b}) - u(\mathbf{a}) \\ &= W_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{c}} + W_{\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{b}} \end{aligned}$$

a tedy:

$$- \oint_k \mathbf{E}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{l}(\mathbf{x}) = 0$$

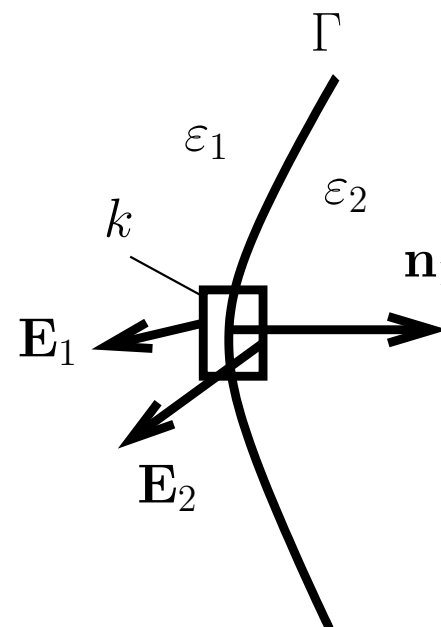
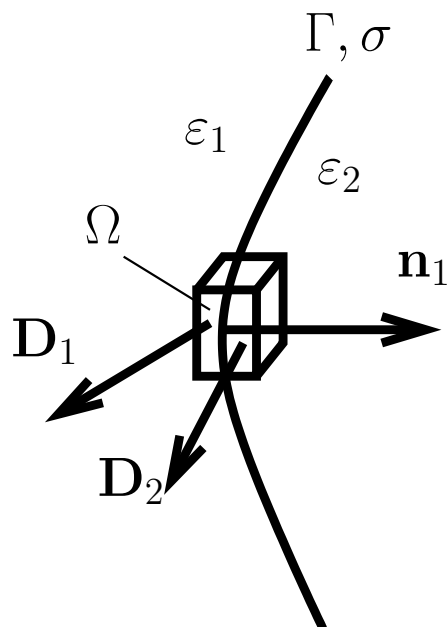
pro jakoukoliv uzavřenou křivku k .

Stokesova věta: $\oint_{\partial S} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \int_S \mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS(\mathbf{x})$ dává

$$\mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Fyzikální podstata elektrostatiky

Podmínky na rozhraní



$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) \Rightarrow \boxed{(\mathbf{D}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{D}_2(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Gamma.}$$

$$\oint_k \mathbf{E}(\mathbf{x}) d\mathbf{l}(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \boxed{(\mathbf{E}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{E}_2(\mathbf{x})) \times \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Gamma.}$$

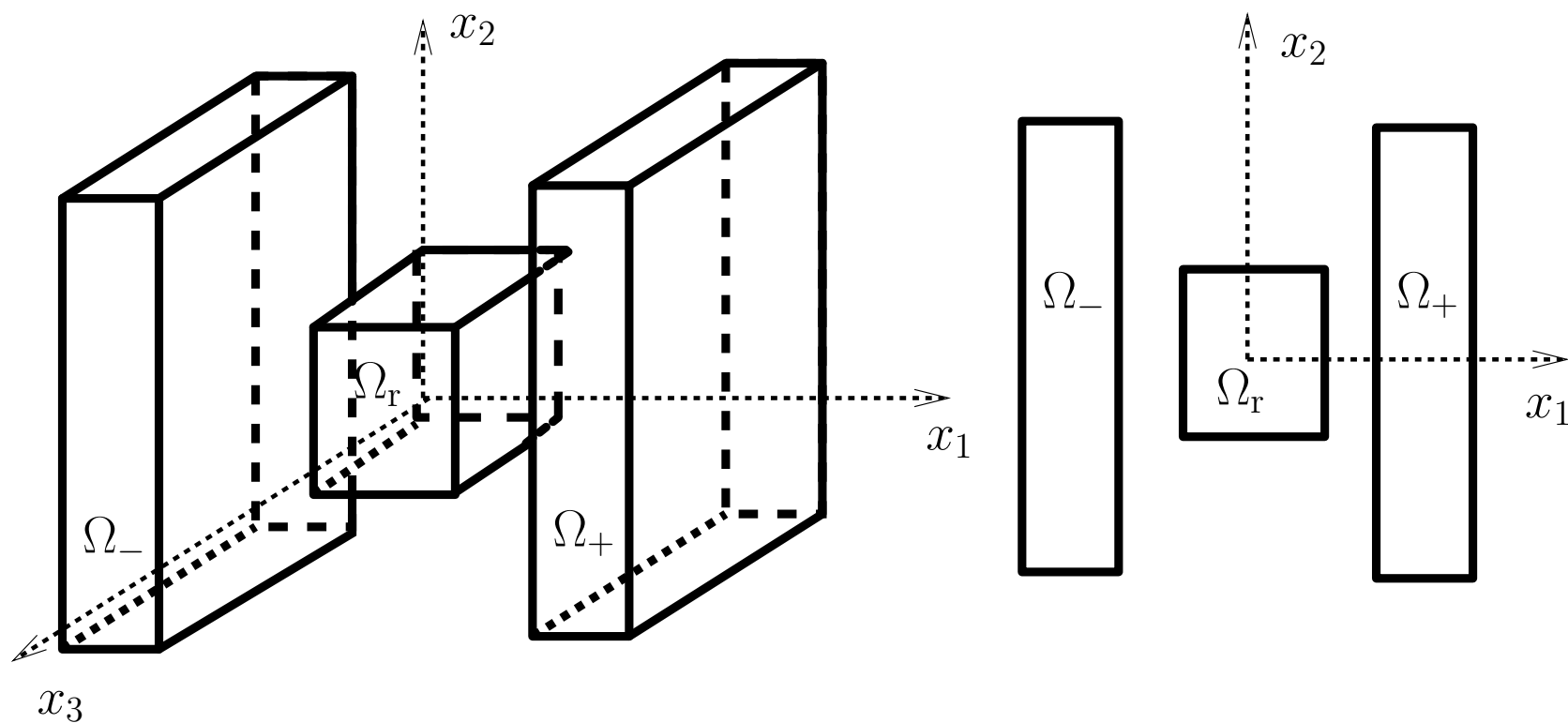
Matematické modelování elektromagnetických polí

Osnova

- Elektrostatika
 - Fyzika
 - Modelová úloha, redukce do 2d
 - Variační formulace, MKP
 - Hraniční integrální formulace, MHP
 - MKP vers. MHP
- Magnetostatika
 - Modelová úloha ve 2d, MKP \circlearrowright MHP
 - Modelová úloha ve 3d, MKP
- Elektromagnetické záření
 - Modelová úloha ve 3d, MHP

Modelová úloha elektrostatiky

Deskový kondenzátor



Modelová úloha elektrostatiky

Matematický model

Maxwellovy rovnice

$$\begin{cases} -\Delta u_r(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ -\Delta u_0(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_0 := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_r \cup \Omega_+ \cup \Omega_-}, \end{cases}$$

podmínky na rozhraní

$$\begin{cases} \partial u_0(\mathbf{x})/\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \varepsilon_r \partial u_r(\mathbf{x})/\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \partial \Omega_r, \\ u_0(\mathbf{x}) - u_r(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \partial \Omega_r, \end{cases}$$

okrajové podmínky

$$\begin{cases} u_0(\mathbf{x}) = U, & \mathbf{x} \in \partial \Omega_+, \\ u_0(\mathbf{x}) = -U, & \mathbf{x} \in \partial \Omega_-, \end{cases}$$

radiační podmínka

$$u_0(\mathbf{x}) \rightarrow 0, \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty.$$

Matematické modelování elektromagnetických polí

Osnova

- Elektrostatika
 - Fyzika
 - Modelová úloha, redukce do 2d
 - Variační formulace, MKP
 - Hraniční integrální formulace, MHP
 - MKP vers. MHP
- Magnetostatika
 - Modelová úloha ve 2d, MKP \circlearrowright MHP
 - Modelová úloha ve 3d, MKP
- Elektromagnetické záření
 - Modelová úloha ve 3d, MHP

Variační formulace elektrostatiky

Ořezání výpočetní oblasti

Radiační podmínku nahradíme novou okrajovou podmínkou

$$u_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \supset \overline{\Omega_r \cup \Omega_- \cup \Omega_+}.$$

Variační formulace — minimalizace potenciální energie systému

Hledáme rozložení potenciálu $u(\mathbf{x})$ takové, že

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} -U, & \mathbf{x} \in \Gamma_-, \\ U, & \mathbf{x} \in \Gamma_+, \\ 0, & \mathbf{x} \in \Gamma \end{cases} \quad (\text{OP}_U)$$

a které minimalizuje potenciální energii

$$\int_{\Omega} \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{x}) \|\nabla u(\mathbf{x})\|^2 d\mathbf{x} =: W(u(\mathbf{x})) \leq W(\tilde{u}(\mathbf{x})) \quad \forall \tilde{u}(\mathbf{x}) \text{ splňující } (\text{OP}_U).$$

Variační formulace elektrostatiky

Afinní prostor řešení

$$V_U := \left\{ u(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega), \nabla u(\mathbf{x}) \in (L^2(\Omega))^d, u(\mathbf{x}) \text{ splňuje } (\text{OP}_U) \right\}$$

Lineární prostor testovacích funkcí

$$V_0 := \left\{ v(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid v(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega), \nabla v(\mathbf{x}) \in (L^2(\Omega))^d, v(\mathbf{x}) \text{ splňuje } (\text{OP}_0) \right\}$$

Podmínka minima, Fréchetova derivace

$$W'(u(\mathbf{x}))(v(\mathbf{x})) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{W(u(\mathbf{x}) + t v(\mathbf{x})) - W(u(\mathbf{x}))}{t} =$$
$$\int_{\Omega} \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad \forall v(\mathbf{x}) \in V_0.$$

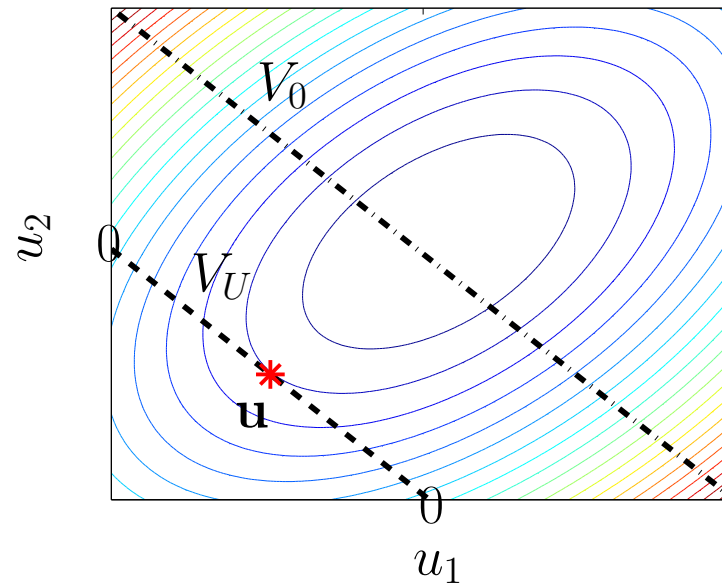
Variační formulace elektrostatiky

Variační formulace

Hledáme $u(\mathbf{x}) \in V_U$:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad \forall v(\mathbf{x}) \in V_0$$

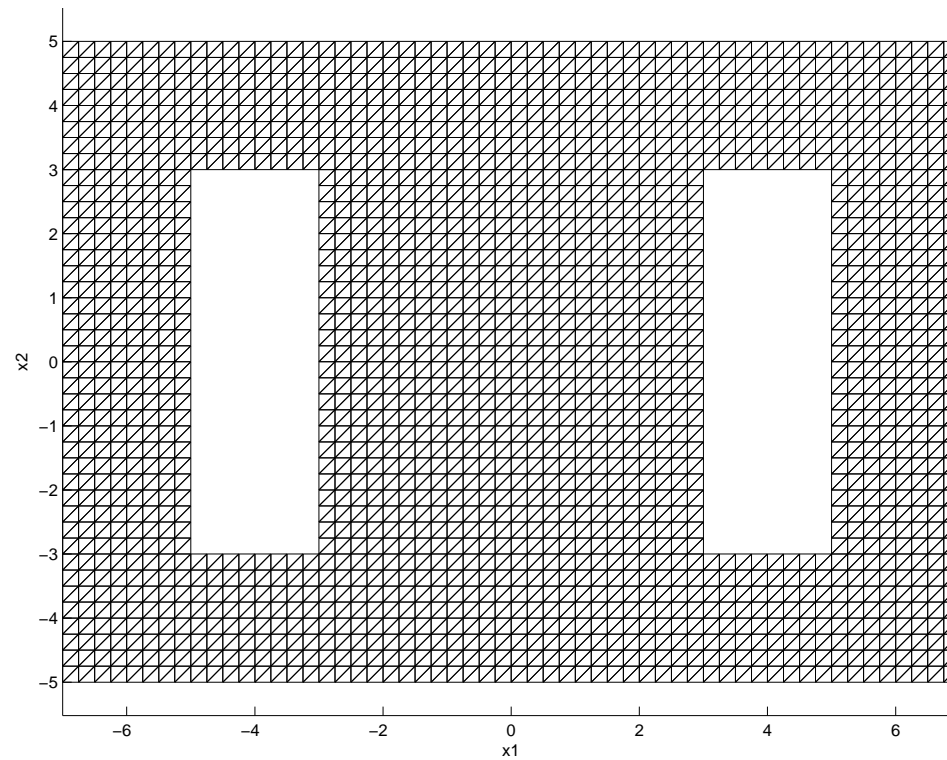
Analogie v \mathbb{R}^2



Metoda konečných prvků

Triangulace výpočetní oblasti

$$\overline{\Omega} = \cup_{k=1}^m \overline{T^k}$$



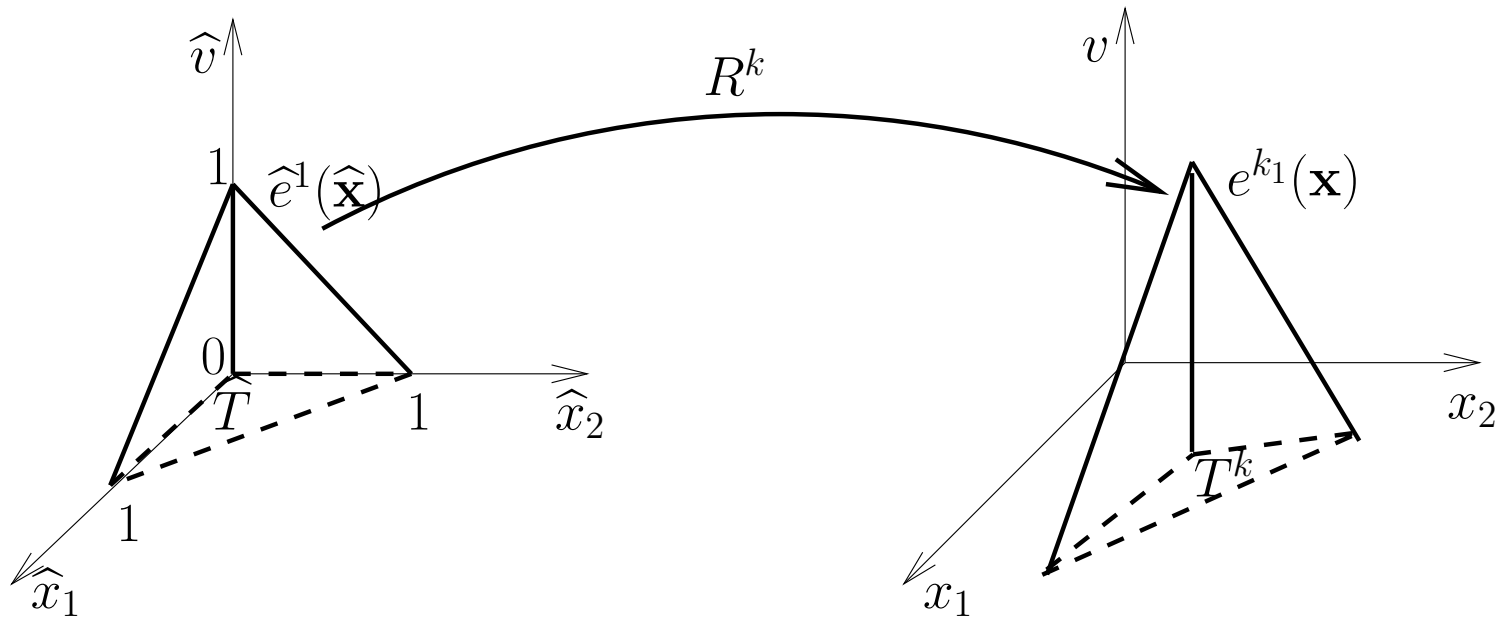
Metoda konečných prvků

V_U, V_0 nahradíme spojitými po částech afinními funkcemi

$$V_0^h := \langle e_1(\mathbf{x}), \dots, e_n(\mathbf{x}) \rangle \subset V_0, \quad e_i(\mathbf{x})|_{T^k} = a_i^k + b_i^k x_1 + c_i^k x_2$$

Substituce na referenční trojúhelník

$$e_i(\mathbf{x})|_{T^k} = e^{kj}(\mathbf{x}) = \hat{e}_j(\hat{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{x} = R^k(\hat{\mathbf{x}}) := \mathbf{R}^k \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{r}^k$$



Metoda konečných prvků

Soustava lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_+^T & \mathbf{B}_-^T & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}_+ & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_- & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda_+ \\ \lambda_- \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_+ \\ \mathbf{c}_- \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

Sestavení matice \mathbf{A}

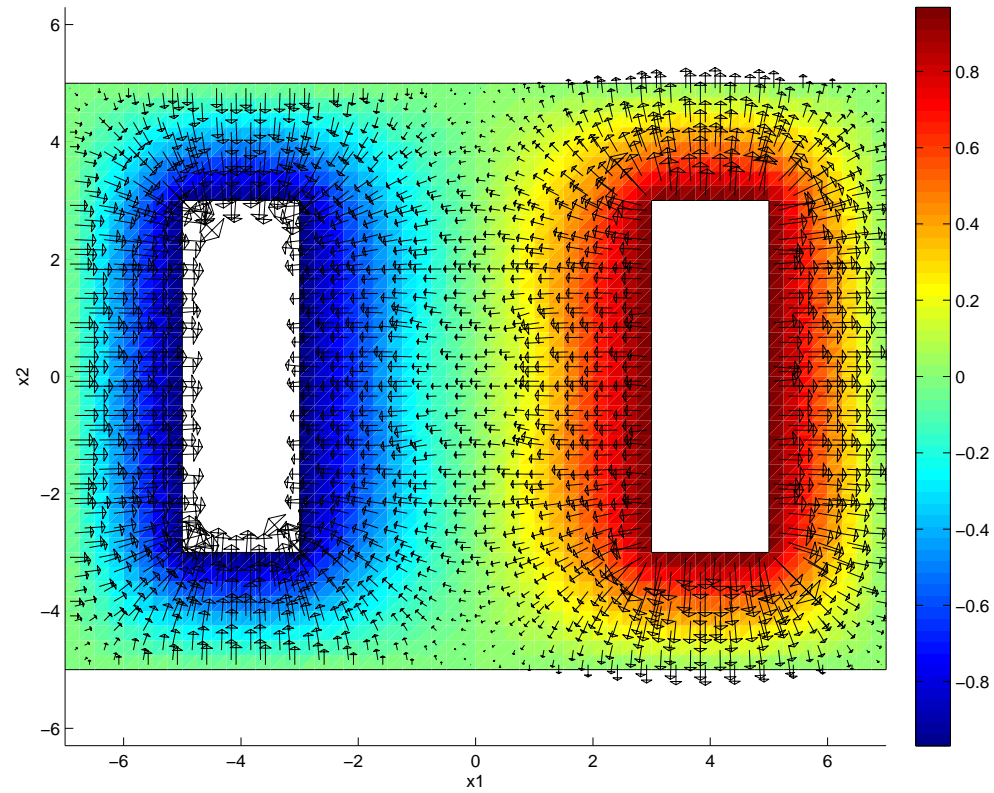
$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^m G(\mathbf{A}^k)$$

pomocí lokálních příspěvků

$$\mathbf{A}^k := \varepsilon^k (\mathbf{B}_{\nabla}^k)^T \cdot \mathbf{B}_{\nabla}^k \frac{|\det(\mathbf{R}^k)|}{2}, \quad \text{kde } \mathbf{B}_{\nabla}^k := (\nabla e^{k1}(\mathbf{x}), \nabla e^{k2}(\mathbf{x}), \nabla e^{k3}(\mathbf{x}))$$

Metoda konečných prvků

Řešení $u(\mathbf{x})$ a $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla u(\mathbf{x})$



Matematické modelování elektromagnetických polí

Osnova

- Elektrostatika
 - Fyzika
 - Modelová úloha, redukce do 2d
 - Variační formulace, MKP
 - Hraniční integrální formulace, MHP
 - MKP vers. MHP
- Magnetostatika
 - Modelová úloha ve 2d, MKP \circlearrowright MHP
 - Modelová úloha ve 3d, MKP
- Elektromagnetické záření
 - Modelová úloha ve 3d, MHP

Modelová úloha elektrostatiky

Matematický model

Maxwellovy rovnice

$$\begin{cases} -\Delta u_r(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ -\Delta u_0(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_0 := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_r \cup \Omega_+ \cup \Omega_-}, \end{cases}$$

podmínky na rozhraní

$$\begin{cases} \partial u_0(\mathbf{x})/\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \varepsilon_r \partial u_r(\mathbf{x})/\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_r := \partial \Omega_r, \\ u_0(\mathbf{x}) - u_r(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_r, \end{cases}$$

okrajové podmínky

$$\begin{cases} u_0(\mathbf{x}) = U, & \mathbf{x} \in \Gamma_+ := \partial \Omega_+, \\ u_0(\mathbf{x}) = -U, & \mathbf{x} \in \Gamma_- := \partial \Omega_-, \end{cases}$$

radiační podmínka

$$u_0(\mathbf{x}) \rightarrow 0, \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty.$$

Hraniční integrální formulace

Ansatz (násada?)

Řešení hledáme jako součet potenciálů jednoduché vrstvy

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \Omega_r : \quad u_r(\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma_r} w_r(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), \\ \mathbf{x} \in \Omega_0 : \quad u_0(\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma_r} w_0(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma_+} w_+(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) + \\ &+ \int_{\Gamma_-} w_-(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

kde $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := -1/(2\pi) \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ je fundamentální řešení Laplaceovy rovnice ve 2d.

Tato volba u_r a u_0 splňuje Maxwellovy rovnice

$$\begin{cases} -\Delta u_r(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ -\Delta u_0(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_0, \end{cases}$$

a radiační podmínku

$$u_0(\mathbf{x}) \rightarrow 0, \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty.$$

Hraniční integrální formulace

Ansatz (násada?)

Řešení hledáme jako součet potenciálů jednoduché vrstvy

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \Omega_r : \quad u_r(\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma_r} w_r(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), \\ \mathbf{x} \in \Omega_0 : \quad u_0(\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma_r} w_0(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma_+} w_+(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) + \\ &+ \int_{\Gamma_-} w_-(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

kde zbývá dopočítat neznámé hustoty $w_r, w_0 : \Gamma_r \rightarrow \mathbb{R}$, $w_+ : \Gamma_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $w_- : \Gamma_- \rightarrow \mathbb{R}$ tak, aby byly splněny i podmínky na rozhraní

$$\begin{cases} \partial u_0(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \varepsilon_r \partial u_r(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_r, \\ u_0(\mathbf{x}) - u_r(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_r, \end{cases}$$

a okrajové podmínky

$$\begin{cases} u_0(\mathbf{x}) = U, & \mathbf{x} \in \Gamma_+, \\ u_0(\mathbf{x}) = -U, & \mathbf{x} \in \Gamma_-. \end{cases}$$

Hraniční integrální formulace

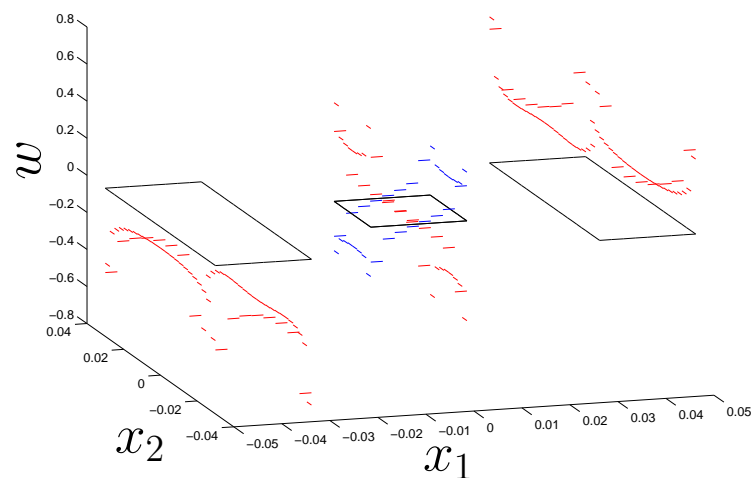
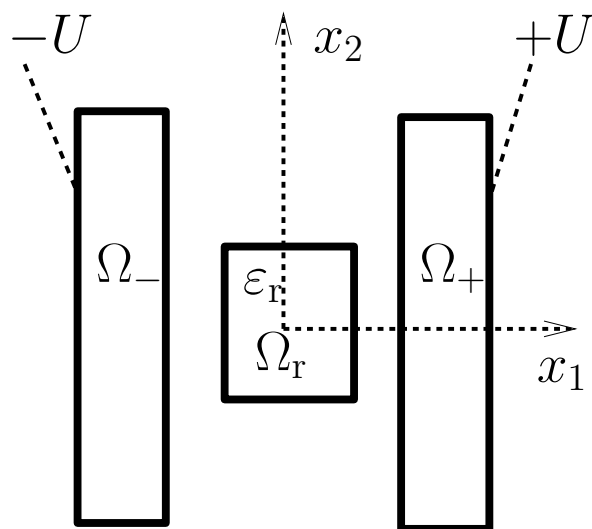
Ansatz — hledáme ekvivalentní rozložení „povrchových nábojů“

Řešení hledáme jako součet potenciálů jednoduché vrstvy

$$\mathbf{x} \in \Omega_r : u_r(\mathbf{x}) := (V_r w_r)(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{x} \in \Omega_0 : u_0(\mathbf{x}) := (V_r w_0)(\mathbf{x}) + (V_+ w_+)(\mathbf{x}) + (V_- w_-)(\mathbf{x}),$$

kde neznámé funkce w_r , w_0 , w_+ a w_- lze chápat jako rozložení „povrchových nábojů“ na Γ_r , Γ_+ a Γ_- , které tvoří stejné elektrostatické pole jako řešení původní úlohy.



Hraniční integrální formulace

Ansatz — hledáme ekvivalentní rozložení „povrchových nábojů“

Řešení hledáme jako součet potenciálů jednoduché vrstvy

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \in \Omega_r : \quad u_r(\mathbf{x}) &:= (V_r w_r)(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x} \in \Omega_0 : \quad u_0(\mathbf{x}) &:= (V_r w_0)(\mathbf{x}) + (V_+ w_+)(\mathbf{x}) + (V_- w_-)(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

Potenciál jednoduché vrstvy $(Vw)(\mathbf{x})$ je spojitá funkce v \mathbb{R}^2

$$(V_{r(+,-)}w)(\mathbf{x}) := -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{r(+,-)}} w(\mathbf{y}) \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}| dl(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,$$

a tedy okrajové podmínky vedou na **první a druhou rovnici**

$$\begin{aligned}(V_r w_0)(\mathbf{x}) + (V_+ w_+)(\mathbf{x}) + (V_- w_-)(\mathbf{x}) &= +U, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_+, \\ (V_r w_0)(\mathbf{x}) + (V_+ w_+)(\mathbf{x}) + (V_- w_-)(\mathbf{x}) &= -U, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_-, \end{aligned}$$

a podmínka na rozhraní předepisující spojitost u vede na **třetí rovnici**

$$(V_r w_0)(\mathbf{x}) + (V_+ w_+)(\mathbf{x}) + (V_- w_-)(\mathbf{x}) - (V_r w_r)(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_r.$$

Hraniční integrální formulace

Ansatz — hledáme ekvivalentní rozložení „povrchových nábojů“

Řešení hledáme jako součet potenciálů jednoduché vrstvy

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \Omega_r : \quad u_r(\mathbf{x}) &:= (V_r w_r)(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x} \in \Omega_0 : \quad u_0(\mathbf{x}) &:= (V_r w_0)(\mathbf{x}) + (V_+ w_+)(\mathbf{x}) + (V_- w_-)(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

Normálová derivace $(V_r w)(\mathbf{x})$ poskočí přes Γ_r o $w(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \Gamma_r : \quad \left[\frac{\partial(V_r w)(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}_r} \right]^{\text{int}} &:= \lim_{\Omega_r \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} \nabla(V_r w)(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n}_r(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}w(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_r} w(\mathbf{y}) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_r(\mathbf{x})} dl(\mathbf{y}), \\ \left[\frac{d(V_r w)(\mathbf{x})}{d\mathbf{n}_r} \right]^{\text{ext}} &:= \lim_{\Omega_0 \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} \nabla(V_r w)(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n}_r(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}w(\mathbf{x}) + \underbrace{\int_{\Gamma_r} w(\mathbf{y}) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_r(\mathbf{x})} dl(\mathbf{y})}_{=:(K_r w)(\mathbf{x})}, \end{aligned}$$

a tedy zbývající podmínka na rozhraní vede na **čtvrtou rovnici**

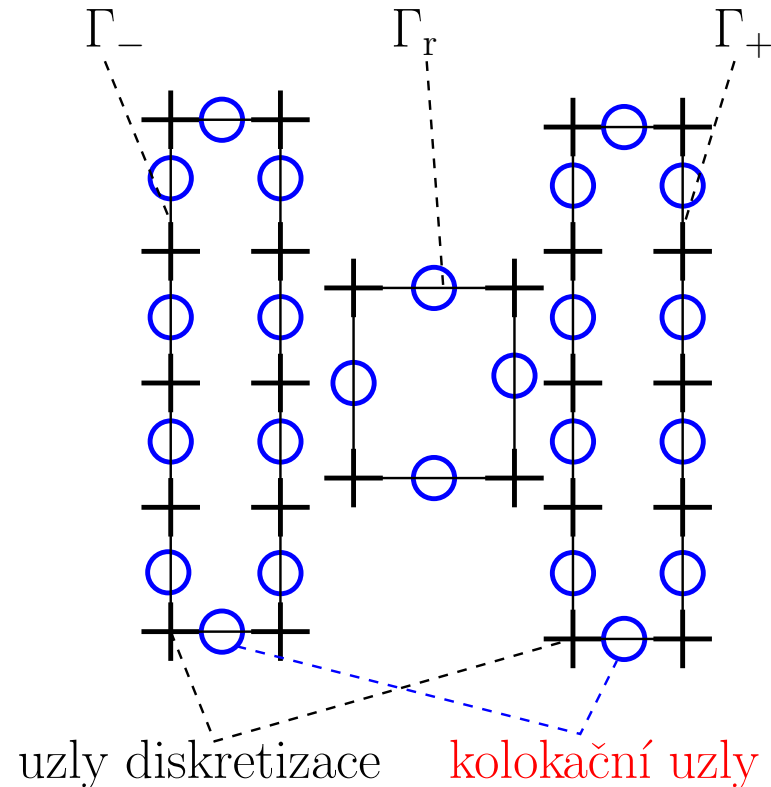
$$-\frac{1}{2}w_0(\mathbf{x}) + (K_r w_0)(\mathbf{x}) + (K_+ w_+)(\mathbf{x}) + (K_- w_-)(\mathbf{x}) - \varepsilon_r \left[\frac{1}{2}w_r(\mathbf{x}) + (K_r w_r)(\mathbf{x}) \right] = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_r.$$

Metoda hraničních prvků

Diskretizace hranic do úseček, středy úseček = kolokační uzly

Hranice Γ_r , Γ_+ a Γ_- rozdělíme do úseček o délce h

$$\bigcup_{k=1}^{m_r} \overline{S_r^k} = \Gamma_r, \quad \bigcup_{k=1}^{m_+} \overline{S_+^k} = \Gamma_+, \quad \bigcup_{k=1}^{m_-} \overline{S_-^k} = \Gamma_-.$$



Metoda hraničních prvků

Po částech konstantní báze funkce

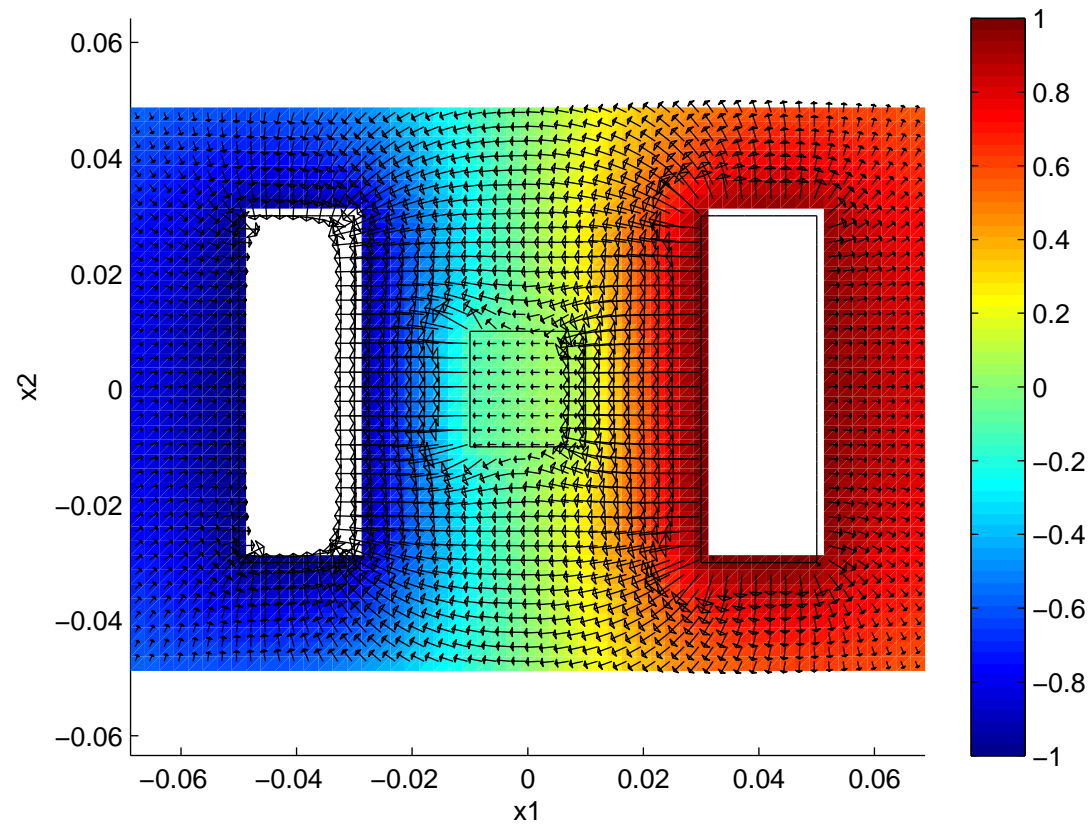
Hledané hustoty w_r^h , w_0^h , w_+^h a w_-^h uvažujeme po úsečkách konstantní. Hledáme tedy vektory $\mathbf{w}_r, \mathbf{w}_0 \in \mathbb{R}^{m_r}$, $\mathbf{w}_+ \in \mathbb{R}^{m_+}$ a $\mathbf{w}_- \in \mathbb{R}^{m_-}$,

$$\mathbf{x} \in \Omega_r : \quad u_r^h(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_r} w_r^h(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{m_r} (\mathbf{w}_r)_j \underbrace{\int_{S_r^j} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y})}_{=: V_r^j(\mathbf{x})},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \Omega_0 : \quad u_0^h(\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma_r} w_0^h(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma_+} w_+^h(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) + \\ &+ \int_{\Gamma_-} w_-^h(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) = \\ &= \sum_{j=1}^{m_r} (\mathbf{w}_0)_j V_r^j(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m_+} (\mathbf{w}_+)_j V_+^j(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m_-} (\mathbf{w}_-)_j V_-^j(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Metoda hraničních prvků

Řešení $u(\mathbf{x})$ a $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla u(\mathbf{x})$

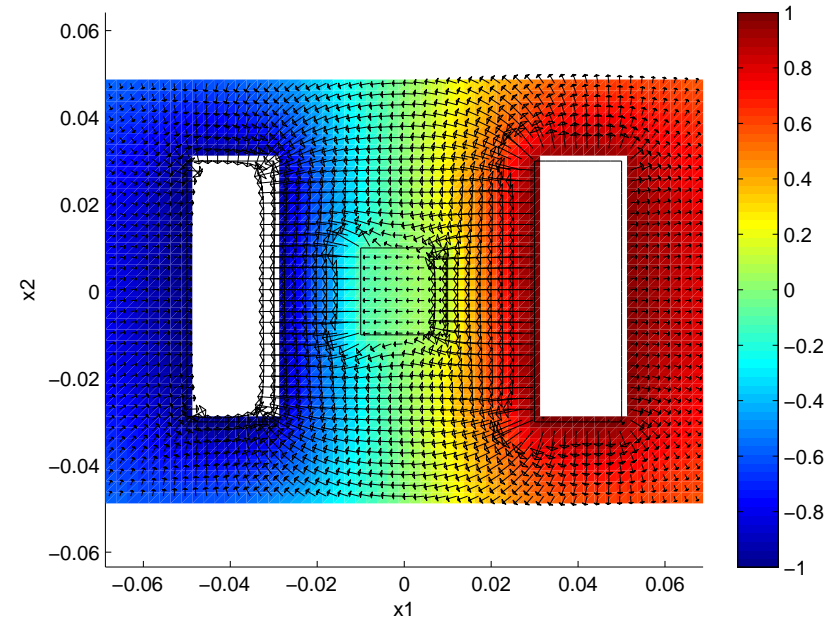
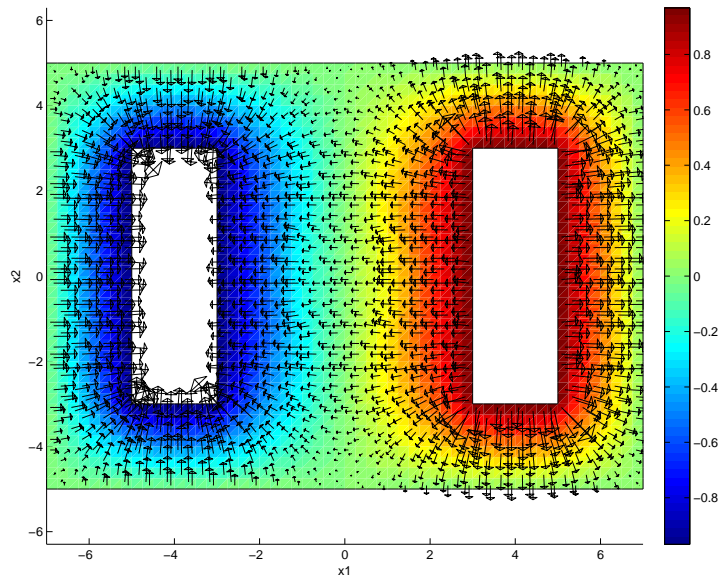


Matematické modelování elektromagnetických polí

Osnova

- Elektrostatika
 - Fyzika
 - Modelová úloha, redukce do 2d
 - Variační formulace, MKP
 - Hraniční integrální formulace, MHP
 - MKP vers. MHP
- Magnetostatika
 - Modelová úloha ve 2d, MKP \circlearrowright MHP
 - Modelová úloha ve 3d, MKP
- Elektromagnetické záření
 - Modelová úloha ve 3d, MHP

MKP vers. MHP



- + řídké matice
- + vhodná pro nelineární úlohy
- + jednoduché integrátory
- + řešiče na bázi multigridu
- ořezání vnějších oblastí
- diskretizace v objemu

- + úlohy na neomezených oblastech
- + diskretizace na hranici
- + řešiče na bázi hierarchických matic
- husté matice
- nevhodná pro nelineární úlohy
- singularity v integrálech

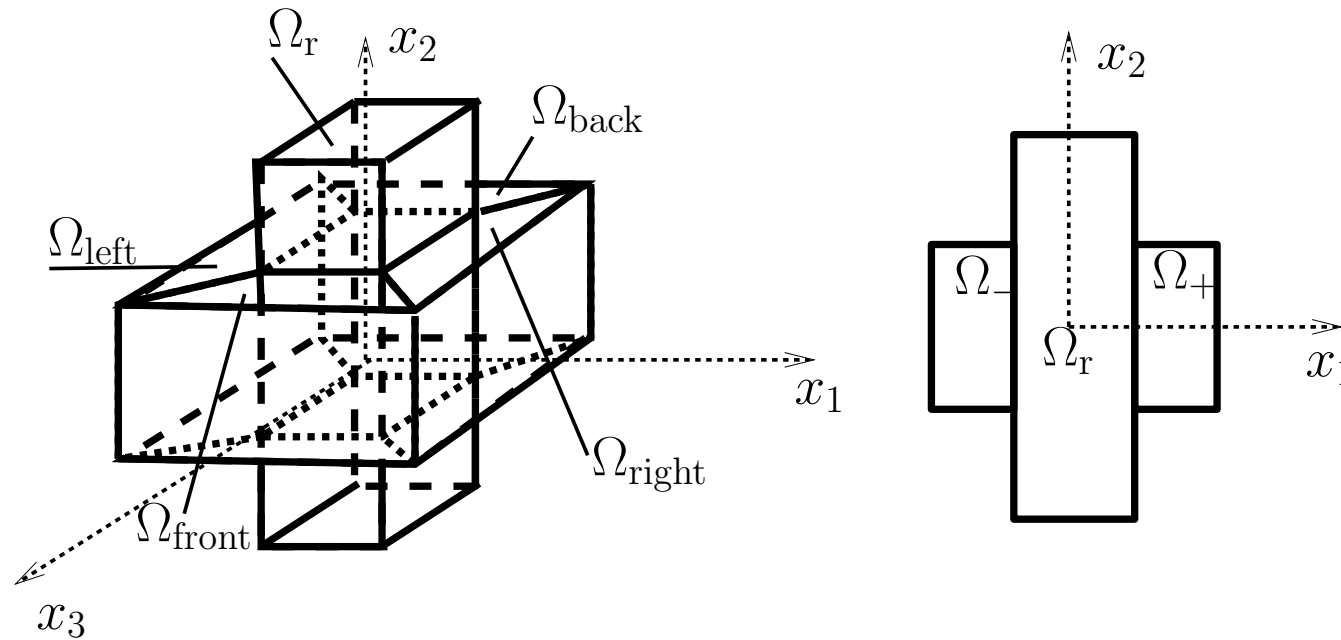
Matematické modelování elektromagnetických polí

Osnova

- Elektrostatika
 - Fyzika
 - Modelová úloha, redukce do 2d
 - Variační formulace, MKP
 - Hraniční integrální formulace, MHP
 - MKP vers. MHP
- Magnetostatika
 - Modelová úloha ve 2d, MKP \circ MHP
 - Modelová úloha ve 3d, MKP
- Elektromagnetické záření
 - Modelová úloha ve 3d, MHP

Magnetostatika

Modelová úloha ve 2d



$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_r(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ -\Delta u_0(\mathbf{x}) = \mu_0 j(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_0 := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_r}, \\ u_0(\mathbf{x}) - u_r(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_r, \\ \partial u_0(\mathbf{x})/\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \frac{1}{\mu_r} \partial u_r(\mathbf{x})/\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_r, \\ u_0(\mathbf{x}) \rightarrow 0, & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

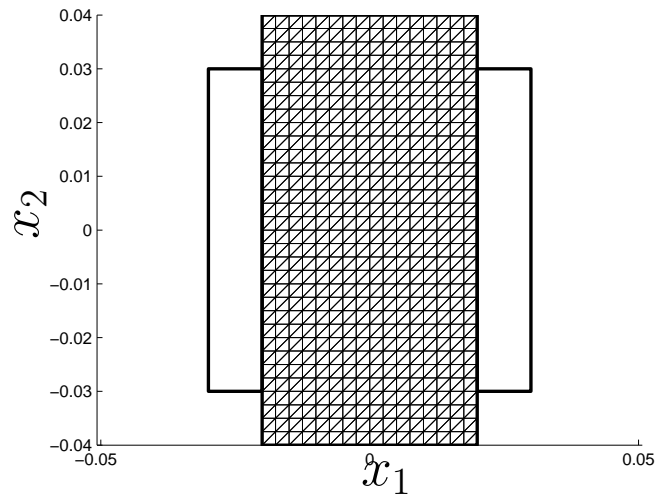
Magnetostatika

MKP \circ **MHP** — umožňuje nelineární úlohy i neomezené oblasti

Základem párování je následující variační rovnice na oblasti Ω_r :

$$\frac{1}{\mu_r} \int_{\Omega_r} -\Delta u_r(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_r} \frac{1}{\mu_r} \nabla u_r(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_r} \underbrace{\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial u_r(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}}_{=\partial u_0(\mathbf{x}/\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}))} v(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) = 0,$$

Diskretizace na síti

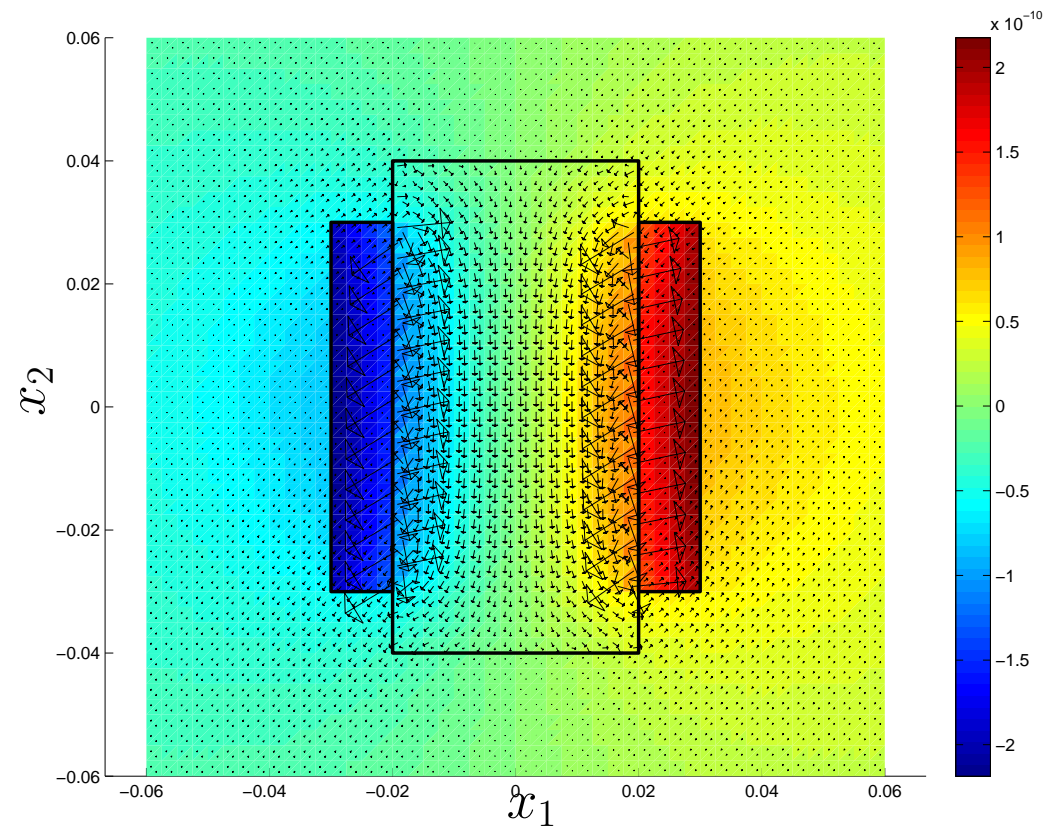


vede na smíšenou úlohu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{B}_r \\ \mathbf{C}_r & \mathbf{D}_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{w}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_r \\ \mathbf{c}_r \end{pmatrix}.$$

Magnetostatika

MKP \circ MHP — umožňuje nelineární úlohy i neomezené oblasti



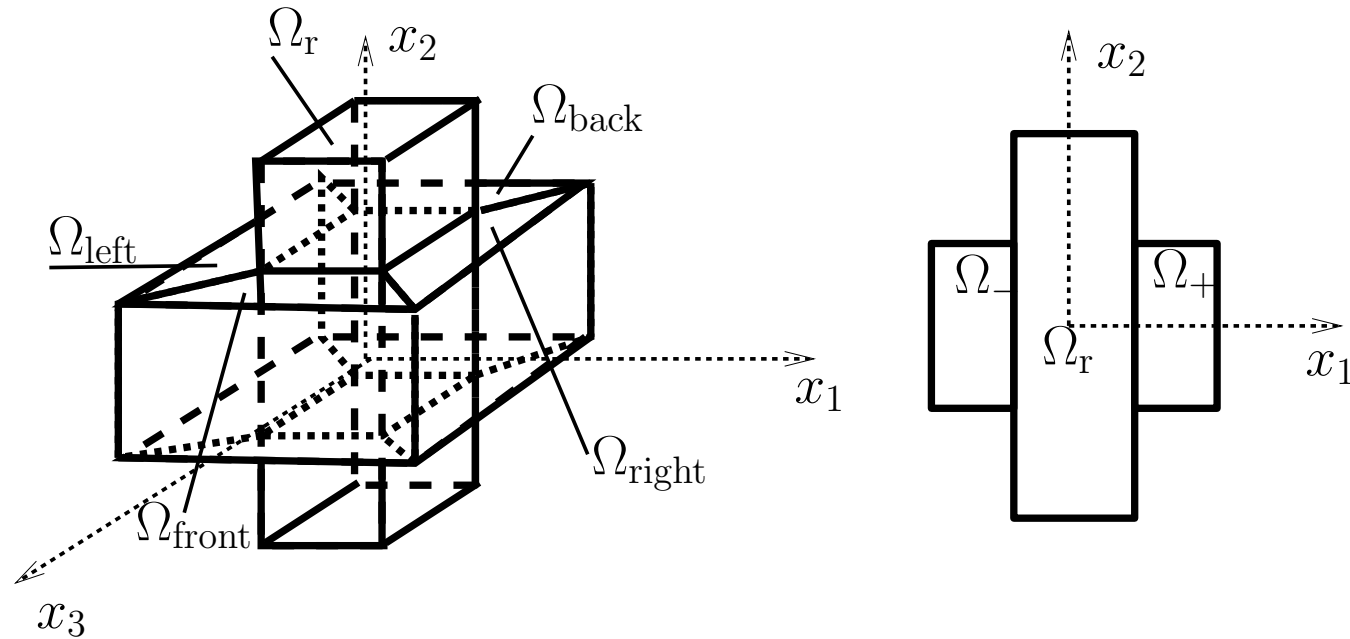
Matematické modelování elektromagnetických polí

Osnova

- Elektrostatika
 - Fyzika
 - Modelová úloha, redukce do 2d
 - Variační formulace, MKP
 - Hraniční integrální formulace, MHP
 - MKP vers. MHP
- Magnetostatika
 - Modelová úloha ve 2d, MKP \circlearrowright MHP
 - Modelová úloha ve 3d, MKP
- Elektromagnetické záření
 - Modelová úloha ve 3d, MHP

Magnetostatika

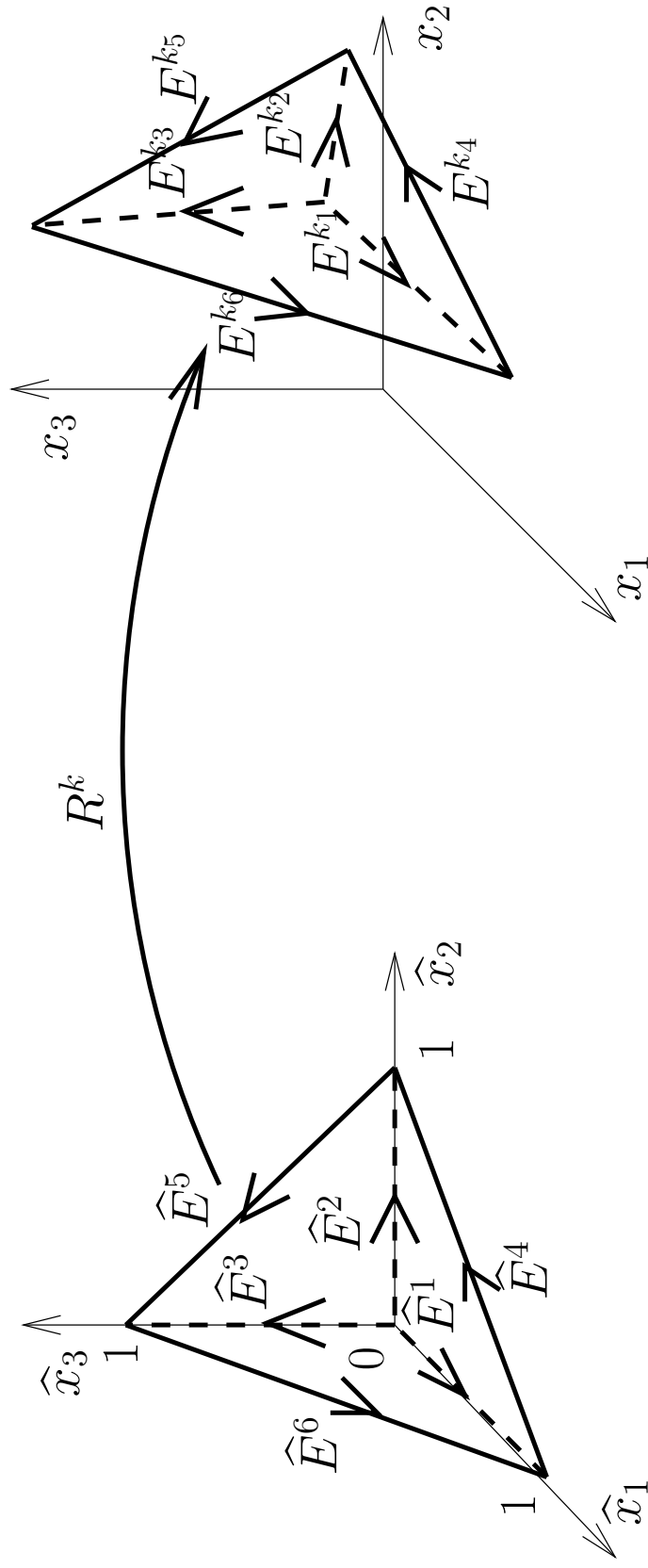
Modelová úloha ve 3d



$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_r(\mathbf{x}))) = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}))) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_0 := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_r}, \\ \mathbf{div}(\mathbf{u}_k(\mathbf{x})) = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Omega_k, k \in \{0, r\}, \\ (\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_r(\mathbf{x})) \times \mathbf{n}_r(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_r, \\ \left(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x})) - \frac{1}{\mu_r} \mathbf{rot}(\mathbf{u}_r(\mathbf{x})) \right) \times \mathbf{n}_r(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_r, \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0}, & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \end{array} \right.$$

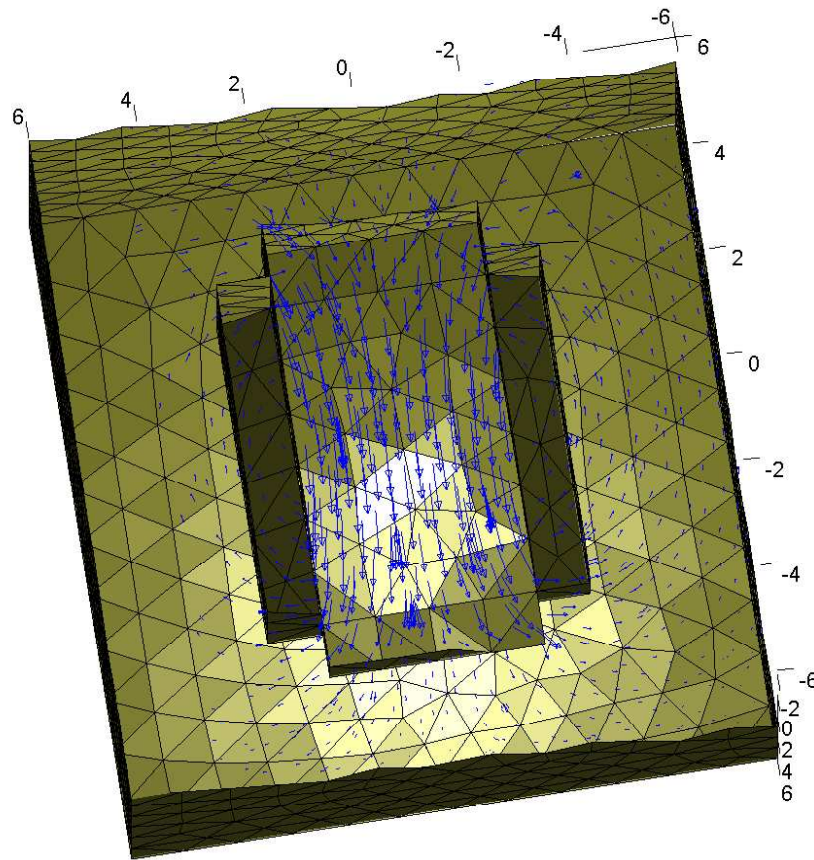
Magnetostatika

3d MKP — Nédelecovy hranové prvky



Magnetostatika

3d MKP — diskretizace a řešení



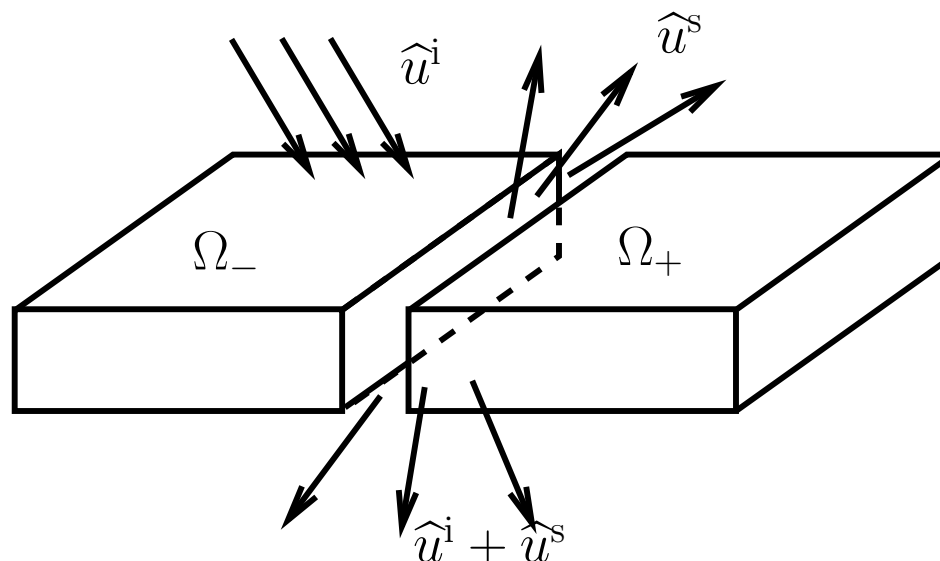
Matematické modelování elektromagnetických polí

Osnova

- Elektrostatika
 - Fyzika
 - Modelová úloha, redukce do 2d
 - Variační formulace, MKP
 - Hraniční integrální formulace, MHP
 - MKP vers. MHP
- Magnetostatika
 - Modelová úloha ve 2d, MKP \circlearrowright MHP
 - Modelová úloha ve 3d, MKP
- Elektromagnetické záření
 - Modelová úloha ve 3d, MHP

Rozptyl elektromagnetického záření

Modelová úloha ve 3d



Předpokládáme rovinnou incidenční vlnu $\hat{u}^i(\mathbf{x}) := \hat{u}_0^i e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ a hledáme rozptýlenou (odraženou) vlnu \hat{u}^s

$$\begin{cases} -\Delta \hat{u}^s(\mathbf{x}) - \kappa^2 \hat{u}^s(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \\ \hat{u}^s(\mathbf{x}) = -\hat{u}^i(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ |\mathbf{x}| \left(\nabla \hat{u}^s(\mathbf{x}) \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - i\kappa \hat{u}^s(\mathbf{x}) \right) \rightarrow 0, & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Rozptyl elektromagnetického záření

3d MHP

Díky fundamentálnímu řešení 3d Helmholtzovy rovnice

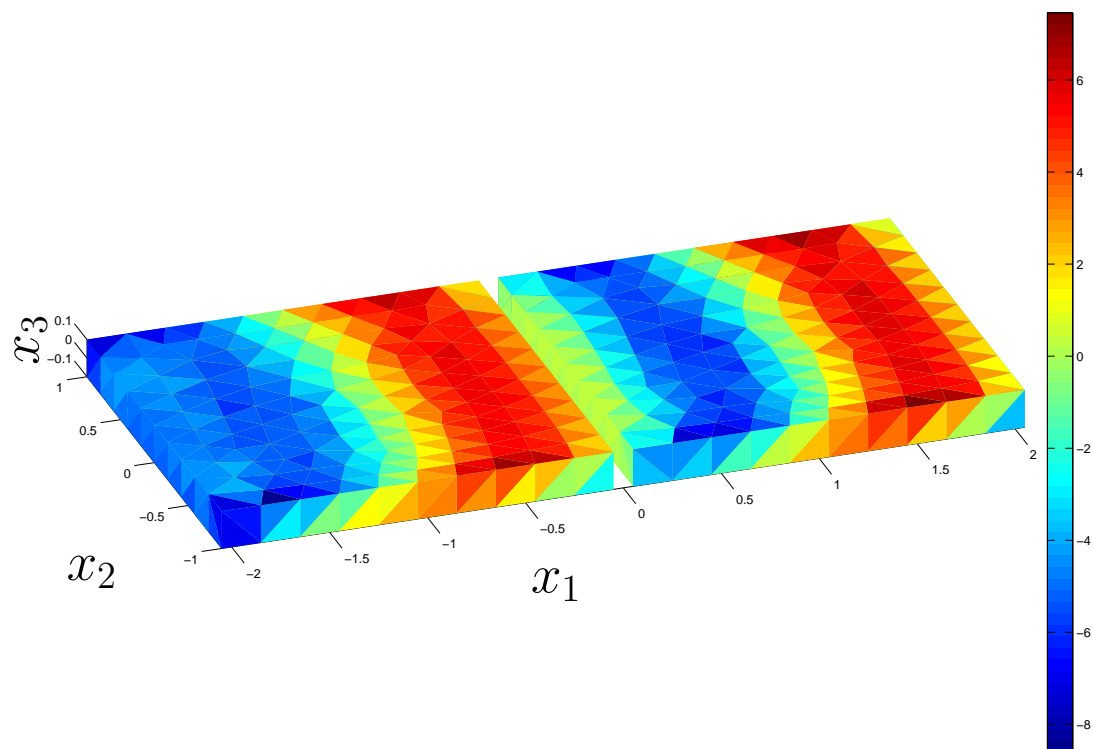
$$g_{\kappa}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{e^{i\kappa|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \quad \kappa := |\mathbf{k}|,$$

dostaneme MHP diskretizací následující soustavu rovnic:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{-,-} & \mathbf{V}_{-,+} \\ \mathbf{V}_{+,-} & \mathbf{V}_{+,+} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{-} \\ \mathbf{w}_{+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{-}^i \\ \hat{\mathbf{u}}_{+}^i \end{pmatrix}.$$

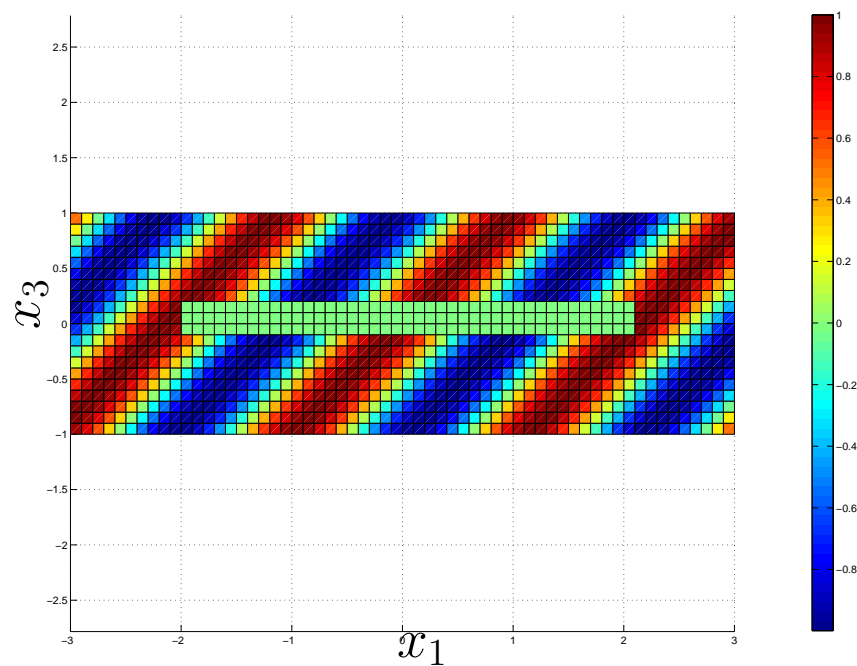
Rozptyl elektromagnetického záření

3d MHP — reálná složka hustoty hraničního potenciálu w



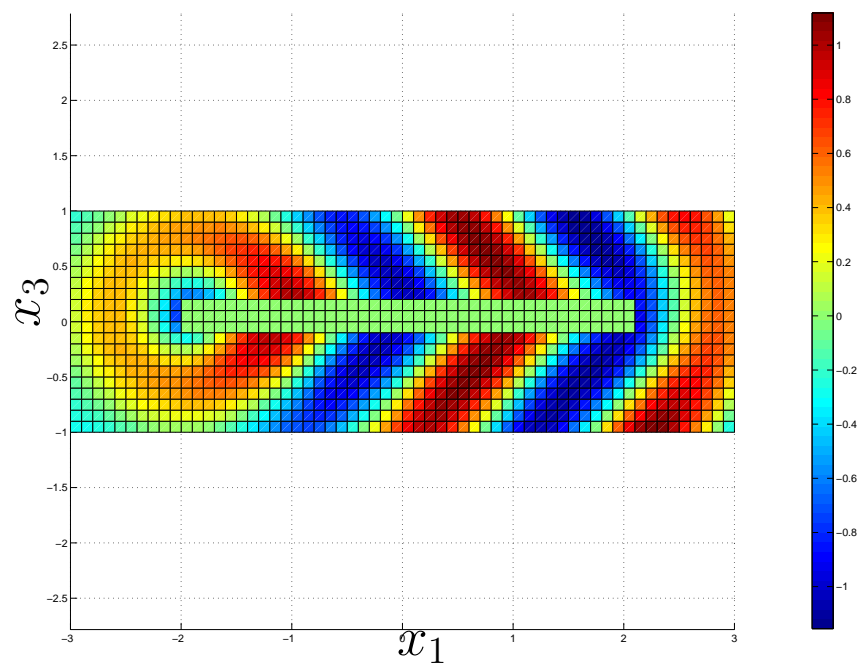
Rozptyl elektromagnetického záření

3d MHP — reálná složka incidenční vlny



Rozptyl elektromagnetického záření

3d MHP — reálná složka odražené vlny



Rozptyl elektromagnetického záření

3d MHP — reálná složka celkové vlny modeluje stín

