

Matematické modelování elmg. polí — 3. kap.: Elmg. vlnění

Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

<http://www.am.vsb.cz/lukas/>

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



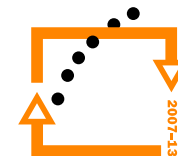
evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdelávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Matematické modelování elmg. polí — Elmg. vlnění

Osnova

- Maxwellovy rovnice
- Elektromagnetické vlnění
- Modelová úloha
- Hraniční integrální formulace
- Metoda hraničních prvků

Maxwellovy rovnice

Stacionární Maxwellovy rovnice v nevodivém prostředí

jsou dva nezávislé systémy:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div}(\mathbf{D}(\mathbf{x})) = \rho(\mathbf{x}) \\ \operatorname{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \end{array} \right\} \text{elektrostatika}$$

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x})) = \mathbf{j}(\mathbf{x}) \\ \operatorname{div}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) = 0 \end{array} \right\} \text{magnetostatika}$$

spolu s materiálovými vztahy $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mu_r(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x})$, s okrajovými podmínkami a podmínkami v ∞ .

Zavedeme-li **potenciály** $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla u(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \operatorname{rot}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$, dostáváme:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) &= \rho(\mathbf{x}) \\ \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu_0 \mu_r(\mathbf{x})} \operatorname{rot}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))\right) &= \mathbf{j}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Maxwellovy rovnice

Ohmův zákon

Vodivé materiály se vyznačují velkým počtem volných elektronů a po vložení do elektrostatického pole dochází k jejich pohybu, tedy teče proud. Vodivé materiály jsou modelovány lineárním Ohmovým zákonem:

$$\mathbf{j}_{\text{Ohm}}(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}),$$

kde σ je elektrická vodivost.

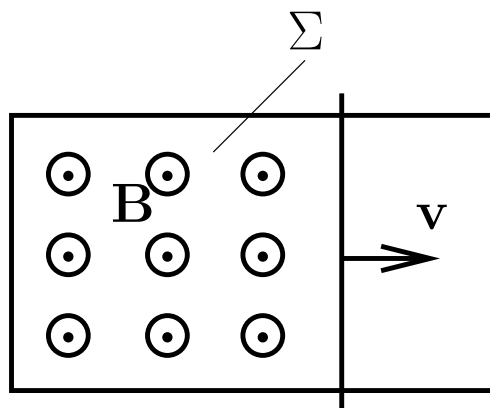
Stacionární Maxwellovy rovnice ve vodivém prostředí

Elektrostatické pole přispívá k tvorbě magnetického pole:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{D}(\mathbf{x})) &= \rho(\mathbf{x}) \\ \operatorname{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) &= \mathbf{0} \\ \operatorname{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x})) &= \mathbf{j}(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}) \\ \operatorname{div}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Maxwellovy rovnice

Faradayův zákon elektromagnetické indukce



Časové změny magnetického pole indukují elektrické pole, které působí proti těmto změnám:

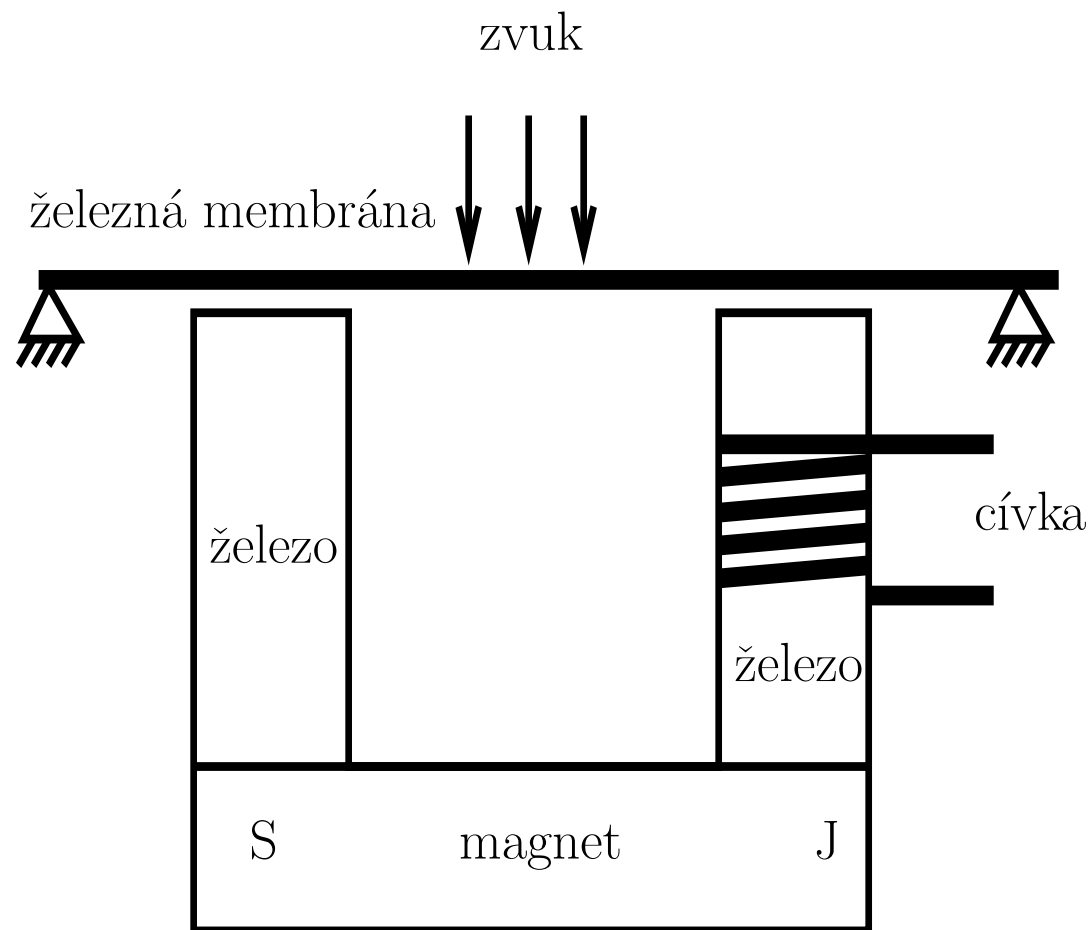
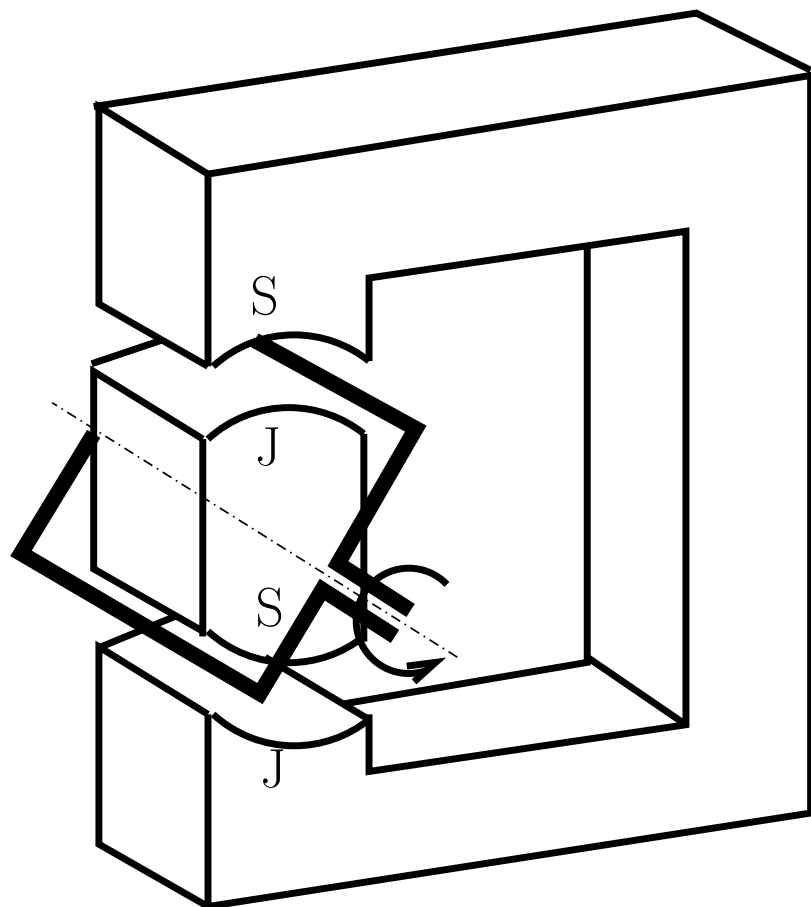
$$\oint_{\partial\Sigma(t)} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{l}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma(t)} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS(\mathbf{x}).$$

Stokesova věta dává:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Maxwellovy rovnice

Motory a generátory, telefon



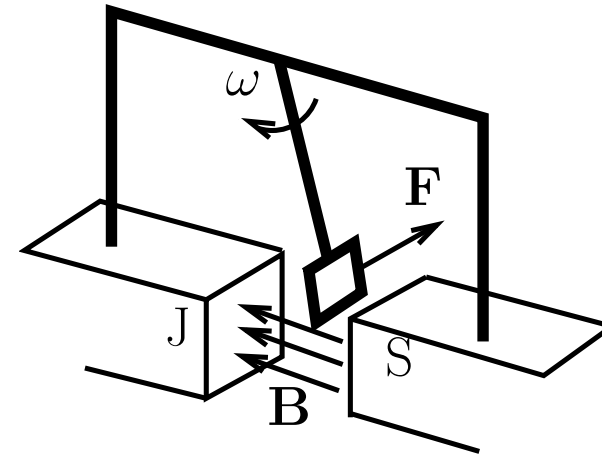
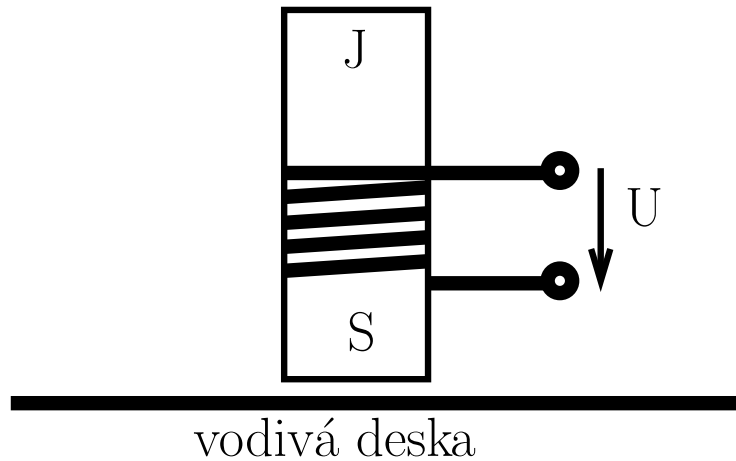
Maxwellovy rovnice

Vířivé proudy

Při změně magnetického pole se ve vodivém prostředí indukují tzv. vířivé proudy:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\sigma(\mathbf{x})} \mathbf{j}_{\text{Ohm}}(\mathbf{x}, t) \right) = - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}.$$

Elektrická pec, elektrická brzda



Maxwellovy rovnice

Maxwellovy rovnice před Maxwellem (nízko-frekvenční aproximace)

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad \mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ (2) \quad \mathbf{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \sigma(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \\ (3) \quad \mathbf{div}(\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)) = \rho(\mathbf{x}, t) \\ (4) \quad \mathbf{div}(\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) = 0 \end{array} \right\} \text{ pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t \in [0, \infty),$$

kde $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \mu_r(\mathbf{x})\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$.

Maxwellův posuvný proud

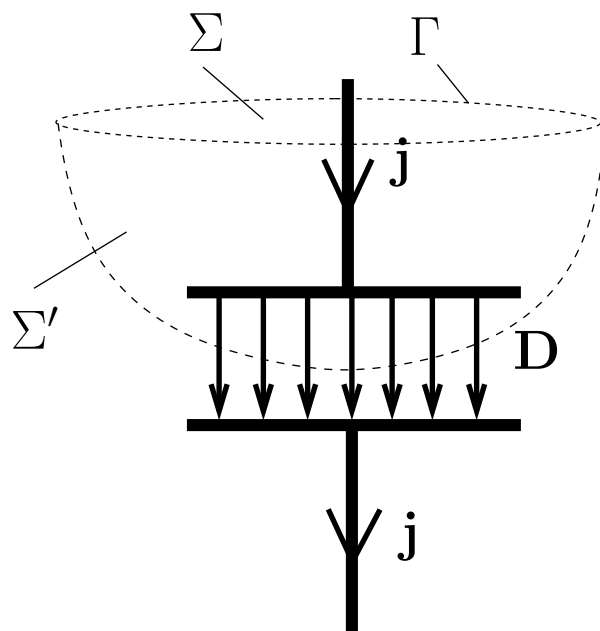
V nevodivých materiálech, $\sigma(\mathbf{x}) = 0$, by ale neplatil zákon zachování náboje (5):

$$0 = \mathbf{div}(\mathbf{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t))) \stackrel{(2)}{=} \mathbf{div}(\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)) \stackrel{(5)}{=} -\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \stackrel{(3)}{=} -\mathbf{div}\left(\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\right) \neq 0,$$

$$\Rightarrow (2) \quad \mathbf{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sigma(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t \in [0, \infty).$$

Maxwellovy rovnice

Příklad posuvného proudu: nabíjení kondenzátoru



$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{l}(\mathbf{x}) &= \int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\Sigma'} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Maxwellovy rovnice

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ \mathbf{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) &= \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sigma(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{div}(\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)) &= \rho(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{div}(\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t \in [0, \infty),$$

kde $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \mu_r(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$.

Podmínky na rozhraní

Nechť na Σ je $\varepsilon_r(\mathbf{x})$ nebo $\mu_r(\mathbf{x})$ v normálovém směru $\mathbf{n}_\Sigma(\mathbf{x})$ nespojité, pak:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) - \mathbf{E}_2(\mathbf{x}, t)) \times \mathbf{n}_\Sigma(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{H}_1(\mathbf{x}, t) - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, t)) \times \mathbf{n}_\Sigma(\mathbf{x}) &= \mathbf{j}_\Sigma(\mathbf{x}, t) \\ (\mathbf{D}_1(\mathbf{x}, t) - \mathbf{D}_2(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}_\Sigma(\mathbf{x}) &= \rho_\Sigma(\mathbf{x}, t) \\ (\mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t) - \mathbf{B}_2(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}_\Sigma(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ pro } \mathbf{x} \in \Sigma, t \in [0, \infty).$$

Matematické modelování elmg. polí — Elmg. vlnění

Osnova

- Maxwellovy rovnice
- Elektromagnetické vlnění
- Modelová úloha
- Hraniční integrální formulace
- Metoda hraničních prvků

Elektromagnetické vlnění

Vlnové rovnice v prostředí bez volných nábojů

Nechť $\varepsilon_0\varepsilon_r(\mathbf{x}) = \varepsilon$, $\mu_0\mu_r(\mathbf{x}) = \mu$ a $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma$ pro $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, pak:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t))) &= -\mu \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t))) &= \mathbf{rot}(\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)) \end{aligned} \right\} \text{ pro } \mathbf{x} \in \Omega,$$

přičemž $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ je rychlost světla ve vakuu.

Okrajové podmínky

dokonalý vodič: $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ pro $\mathbf{x} \in \partial\Omega$,

nedokonalý vodič: $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \frac{1}{\sigma(\mathbf{x})}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{n}(\mathbf{x})) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ pro $\mathbf{x} \in \partial\Omega$

+ počáteční podmínky na $\mathbf{E}(\mathbf{x}, 0)$, $\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, 0)}{\partial t}$, $\mathbf{H}(\mathbf{x}, 0)$ a $\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{x}, 0)}{\partial t}$ pro $\mathbf{x} \in \Omega$.

Elektromagnetické vlnění

Rovnice Helmholtzova typu

Předpokládejme harmonické budící proudy i výsledná pole s kmitočtem $\omega > 0$:

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \right\}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \right\},$$

pak $\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \rightsquigarrow -i\omega(\cdot)$ a **rot** je aplikována na $\hat{\mathbf{j}}$ a $\hat{\mathbf{E}}$:

$$\operatorname{rot} \left(\operatorname{rot} \left(\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) \right) \right) - \hat{k}^2 \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = i\omega\mu \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega$$

kde $\hat{k}^2 = \omega^2 \varepsilon \mu + i\omega\sigma \approx \omega^2/c^2$ je vlnové číslo.

Rovinné vlny

Pro $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ v \mathbb{R}^3 je řešením Helmholtzovy elektrické rovnice např.:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

kde $\mathbf{E}_0 \in \mathbb{R}^3$ je amplituda, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ je směr šíření, $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}_0$ a $|\mathbf{k}|^2$ je vlnové číslo.

Elektromagnetické vlnění

Silver–Müllerova radiační podmínka

Vnější radiační úloha vyžaduje splnění podmínky, že se vlny v nekonečnu neodrážejí:

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}| \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \times \text{rot}(\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x})) + ik\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) \right) = \mathbf{0}.$$

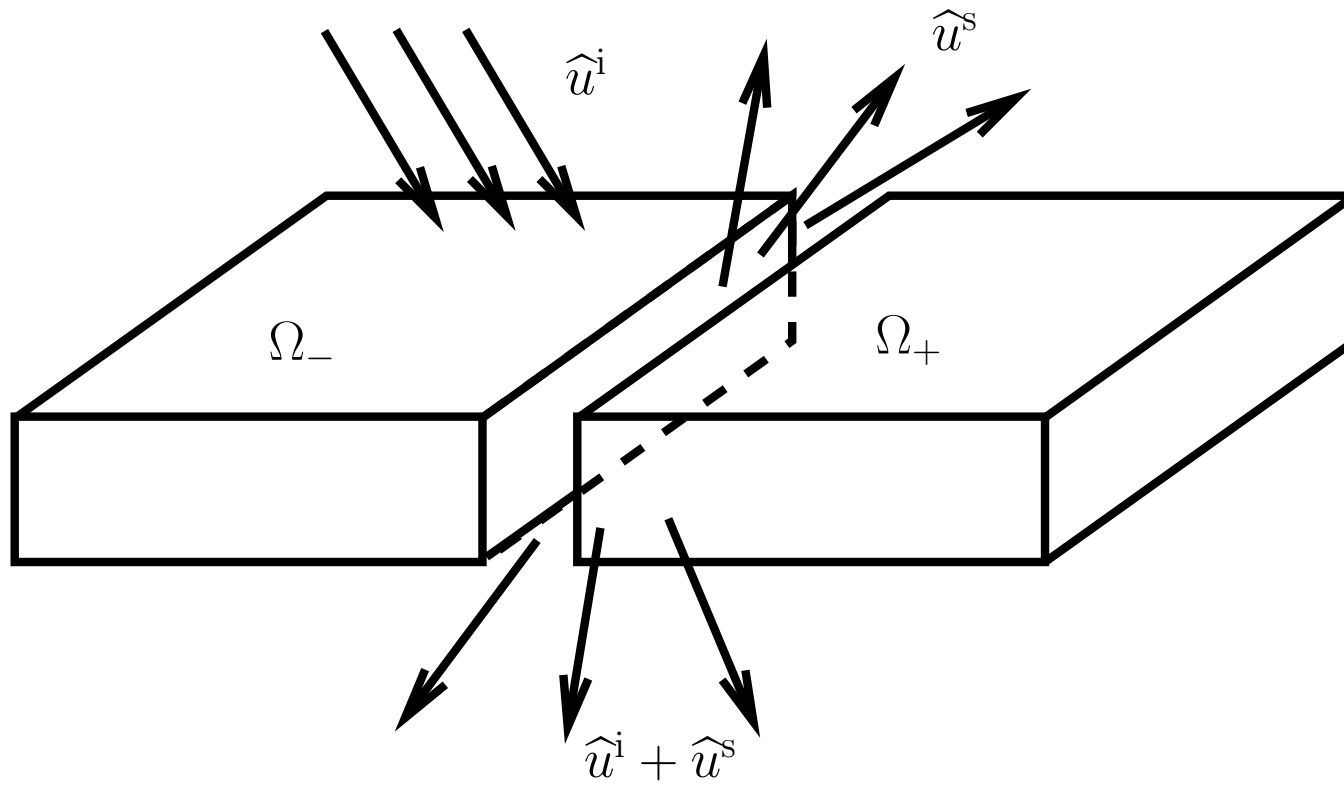
Matematické modelování elmg. polí — Elmg. vlnění

Osnova

- Maxwellovy rovnice
- Elektromagnetické vlnění
- Modelová úloha
- Hraniční integrální formulace
- Metoda hraničních prvků

Modelová úloha

3d geometrie



Modelová úloha

Matematický model

Uvažujme rovinou vlnu ve vakuu, předpokládejme, že vlnová délka

$$\lambda := \frac{2\pi}{\kappa} = 2\pi \frac{c}{\omega}$$

je srovnatelná se šířkou štěrbinu. Hledejme aproximaci $\hat{u} := \hat{\mathbf{E}}_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ splňující okrajovou podmínku $\hat{u} = 0$. Předpokládáme rovinnou incidenční vlnu

$$\hat{u}^i(\mathbf{x}) := \hat{u}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}.$$

Hledáme rozptýlenou vlnu \hat{u}^s tak, že celkové záření $\hat{u}(\mathbf{x}) := \hat{u}^i(\mathbf{x}) + \hat{u}^s(\mathbf{x})$ splňuje

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \hat{u}^s(\mathbf{x}) - \kappa^2 \hat{u}^s(\mathbf{x}) = \Delta \hat{u}^i(\mathbf{x}) + \kappa^2 \hat{u}^i(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\ \hat{u}^s(\mathbf{x}) = -\hat{u}^i(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ |\mathbf{x}| \left(\nabla \hat{u}^s(\mathbf{x}) \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - i\kappa \hat{u}^s(\mathbf{x}) \right) \rightarrow 0, & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \end{array} \right.$$

kde $\Omega := \Omega_- \cup \Omega_+ \subset \mathbb{R}^3$ je oblast vodivých kvádrů a kde jsme Silver–Müllerovu radiační podmínku nahradili tzv. Sommerfeldovou radiační podmínkou.

Matematické modelování elmg. polí — Elmg. vlnění

Osnova

- Maxwellovy rovnice
- Elektromagnetické vlnění
- Modelová úloha
- Hraniční integrální formulace
- Metoda hraničních prvků

Hraniční integrální formulace

Metoda potenciálů

Hledáme řešení pomocí potenciálů jednoduché vrstvy

$$\widehat{u}^s(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_-} w_-(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma_+} w_+(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega},$$

kde

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{e^{i\kappa|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

je fundamentální řešení Helmholtzovy rovnice, $\Gamma_- := \partial\Omega_-$, $\Gamma_+ := \partial\Omega_+$ a $w_- : \Gamma_- \rightarrow \mathbb{C}$, $w_+ : \Gamma_+ \rightarrow \mathbb{C}$ jsou neznámé hustoty potenciálů.

Vlastnosti potenciálu jednoduché vrstvy

Pro po částech spojitě w splňuje $\int_{\Gamma} w(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y})$ Helmholtzovu rovnici v $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ a Sommerfeldovu radiační podmínku. Pro $\mathbf{x} \in \Gamma$ bod spojitosti w , v jehož okolí je Γ hladká, je potenciál jednoduché vrstvy spojitý.

Hraniční integrální formulace

Formulace

Pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, resp. $\mathbf{x} \in \Gamma_r$ (až na rohy), zaved' me operátory

$$[V_- w](\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_-} w(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}), \quad [V_+ w](\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_+} w(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}).$$

Zbývá splnit podmínku odrazu na Γ . Ta dává následující hraničně-integrální formulaci

$$\begin{cases} [V_- w_-](\mathbf{x}) + [V_+ w_+](\mathbf{x}) = -\widehat{u}^i(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_-, \\ [V_- w_-](\mathbf{x}) + [V_+ w_+](\mathbf{x}) = -\widehat{u}^i(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_+. \end{cases}$$

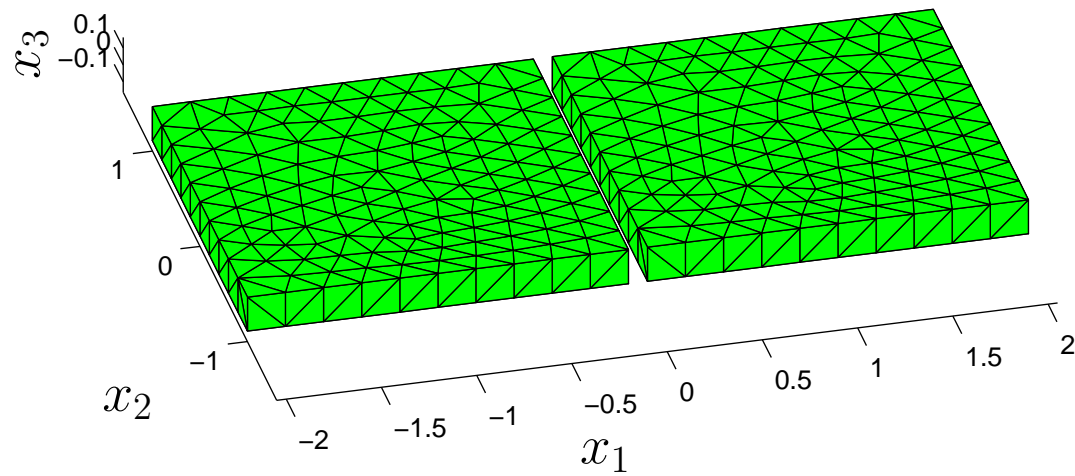
Matematické modelování elmg. polí — Elmg. vlnění

Osnova

- Maxwellovy rovnice
- Elektromagnetické vlnění
- Modelová úloha
- Hraniční integrální formulace
- Metoda hraničních prvků

Metoda hraničních prvků

Diskretizace hranic



Metoda hraničních prvků

Diskretizace hranic

Diskretizujeme Γ do disjunktních trojúhelníků

$$\bigcup_{k=1}^{m_-} \overline{T_-^k} = \Gamma_- \quad \text{a} \quad \bigcup_{k=1}^{m_+} \overline{T_+^k} = \Gamma_+$$

a uvažujme po trojúhelníciích konstantní bázové funkce f_-^k a f_+^k tak, že

$$f_-^i(\mathbf{x})|_{T_-^j} = \delta_{ij} \text{ pro } i = 1, \dots, m_-, \quad \text{resp.} \quad f_+^i(\mathbf{x})|_{T_+^j} = \delta_{ij} \text{ pro } i = 1, \dots, m_+.$$

Hledáme souřadnice neznámých hustot $\mathbf{w}_- \in \mathbb{R}^{m_-}$ a $\mathbf{w}_+ \in \mathbb{R}^{m_+}$

$$w_-(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{m_-} w_{-k} f_-^k(\mathbf{x}), \quad w_+(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{m_+} w_{+k} f_+^k(\mathbf{x}),$$

přičemž hledané souřadnicové vektory označíme $\mathbf{w}_- := (w_{-1}, \dots, w_{-m_-})$ a $\mathbf{w}_+ := (w_{+1}, \dots, w_{+m_+})$.

Metoda hraničních prvků

Kolokační metoda

Rovnice splníme pouze v těžištích trojúhelníků $\mathbf{x}_-^k \in T_-^k$, $\mathbf{x}_+^k \in T_+^k$. To vede na soustavu $m_- + m_+$ lineárních rovnic o stejném počtu neznámých

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{-,-} & \mathbf{V}_{-,+} \\ \mathbf{V}_{+,-} & \mathbf{V}_{+,+} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{w}_- \\ \mathbf{w}_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_-^i \\ \hat{\mathbf{u}}_+^i \end{pmatrix},$$

kde $(\mathbf{V}_{p,q})_{i,j} := \int_{T_q^j} g(\mathbf{x}_p^i, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y})$ a $(\hat{\mathbf{u}}_p^i)_i := \hat{u}^i(\mathbf{x}_p^i)$ pro $p, q \in \{-, +\}$.

Metoda hraničních prvků

Gaussova kvadratura na úsečce

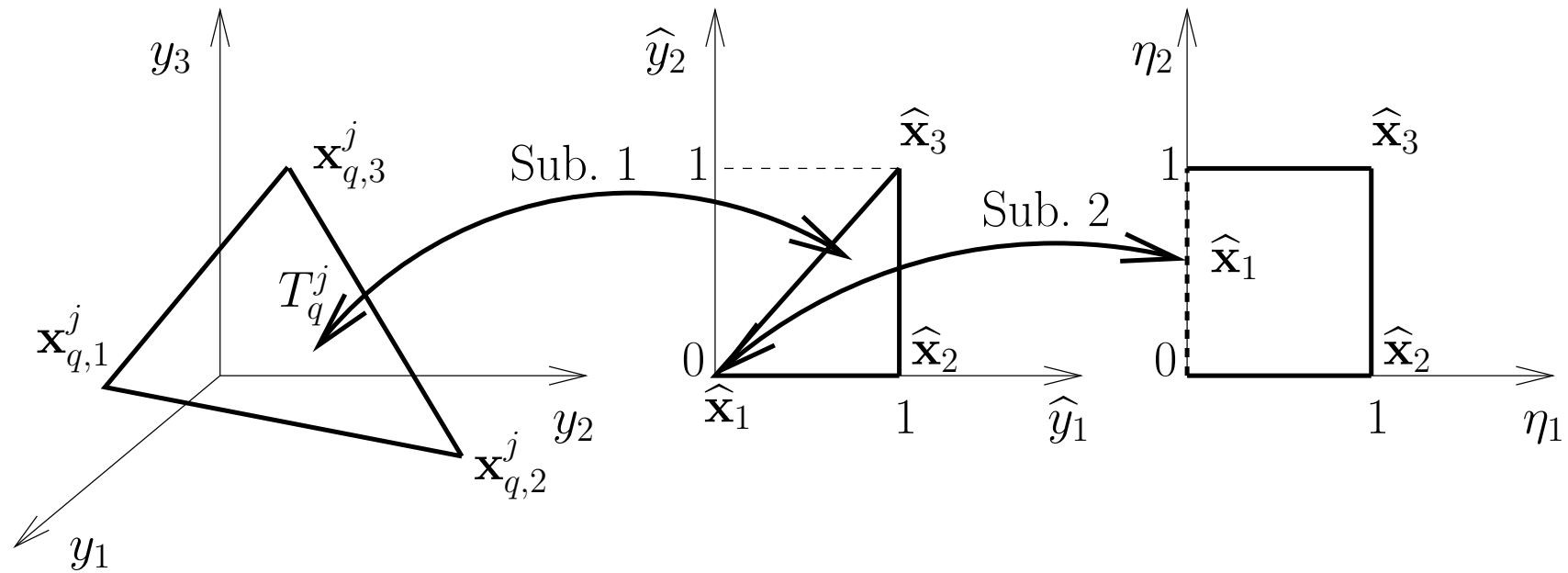
V tabulce uvádíme Gaussovy kvadraturní body ξ_k^N a příslušné váhy w_k^N pro aproximaci

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^N w_k^N f(\xi_k^N).$$

řád N	1	2	3	4	5
body ξ_k^N	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3-2\sqrt{6/5}}}{2\sqrt{7}}$ $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3+2\sqrt{6/5}}}{2\sqrt{7}}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5+2\sqrt{10/7}}}{6}$ $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5+2\sqrt{10/7}}}{6}$
váhy w_k^N	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$ $\frac{5}{18}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{72}$ $\frac{18-\sqrt{30}}{72}$	$\frac{64}{225}$ $\frac{322+13\sqrt{70}}{1800}$ $\frac{322-13\sqrt{70}}{1800}$

Metoda hraničních prvků

Výpočet prvků $V_{p,q}$ — regulární případ



Metoda hraničních prvků

Výpočet prvků $\mathbf{V}_{p,q}$ — regulární případ (pokrač.)

Při sestavování matic $(\mathbf{V}_{p,q})_{i,j}$, $i \neq j$, použijeme

$$\text{Sub 1: } \widehat{\mathbf{y}} := \underbrace{\left(\mathbf{x}_{q,2}^j - \mathbf{x}_{q,1}^j, \mathbf{x}_{q,3}^j - \mathbf{x}_{q,2}^j \right)}_{=: \mathbf{R}_q^j} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}_{q,1}^j, \quad \text{Sub 2: } \eta_1 := \widehat{y}_1, \quad \eta_1 \eta_2 := \widehat{y}_2$$

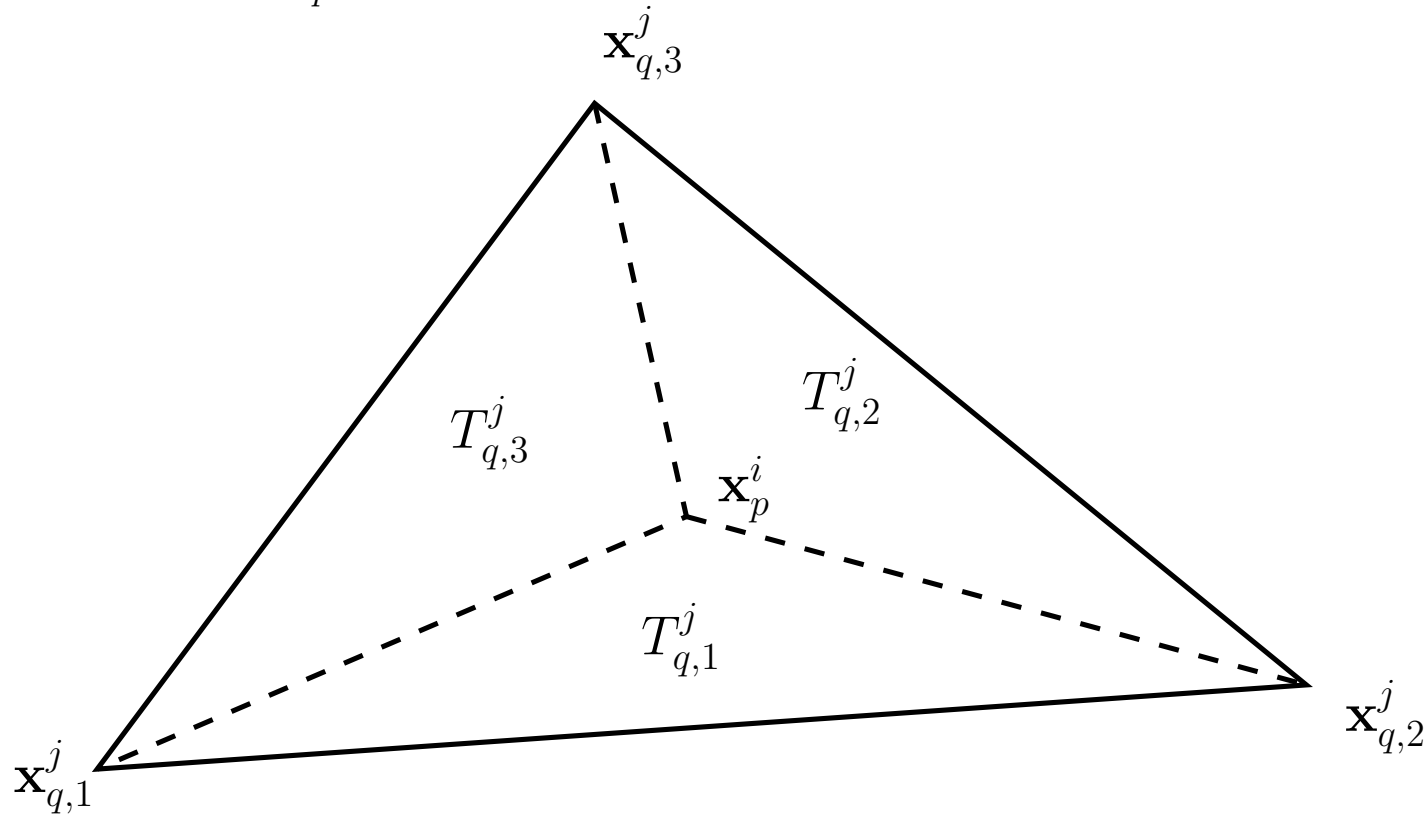
a integrál se transformuje a aproximuje Gaussovou kvadraturou takto:

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_{p,q})_{i,j} &= \int_{T_q^j} \frac{e^{i\kappa |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}|}}{4\pi |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}|} dS(\mathbf{y}) \stackrel{\text{Sub.1}}{=} \int_0^1 \int_0^{\widehat{y}_1} \frac{e^{i\kappa |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{R}_q^j \cdot \widehat{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_{q,1}^j|}}{4\pi |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{R}_q^j \cdot \widehat{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_{q,1}^j|} |\det \mathbf{R}_q^j| d\widehat{y}_2 d\widehat{y}_1 \stackrel{\text{Sub.2}}{=} \\ &\stackrel{\text{Sub.2}}{=} \int_0^1 \int_0^1 \eta_1 \frac{e^{i\kappa |\mathbf{x}_p^i - \eta_1 \mathbf{R}_q^j \cdot (1, \eta_2) - \mathbf{x}_{q,1}^j|}}{4\pi |\mathbf{x}_p^i - \eta_1 \mathbf{R}_q^j \cdot (1, \eta_2) - \mathbf{x}_{q,1}^j|} |\det \mathbf{R}_q^j| d\eta_2 d\eta_1 \approx \\ &\approx \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N w_\alpha^N w_\beta^N \xi_\alpha^N \frac{e^{i\kappa |\mathbf{x}_p^i - \xi_\alpha^N \mathbf{R}_q^j \cdot (1, \xi_\beta^N) - \mathbf{x}_{q,1}^j|}}{4\pi |\mathbf{x}_p^i - \xi_\alpha^N \mathbf{R}_q^j \cdot (1, \xi_\beta^N) - \mathbf{x}_{q,1}^j|} |\det \mathbf{R}_q^j|. \end{aligned}$$

Metoda hraničních prvků

Výpočet prvků $\mathbf{V}_{p,q}$ — singulární případ

Pro $(\mathbf{V}_{p,q})_{i,j}$, $i = j$, je kolokační bod \mathbf{x}_p^i těžištěm T_q^j . Ten rozložíme na $T_{q,1}^j$, $T_{q,2}^j$ a $T_{q,3}^j$ se singularitami v rohu \mathbf{x}_p^i .



Metoda hraničních prvků

Výpočet prvků $V_{p,q}$ — singulární případ (pokrač.)

Transformujeme singulární bod \mathbf{x}_p^i na $\widehat{\mathbf{x}}_1 := (0, 0)$ pomocí

$$\text{Sub 3: } \widehat{\mathbf{y}} := \underbrace{\left(\mathbf{x}_{q,1}^j - \mathbf{x}_p^i, \mathbf{x}_{q,2}^j - \mathbf{x}_{q,1}^j \right)}_{=: \mathbb{R}_{q,1}^j} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}_p^i, \quad \text{Sub 4: } \widehat{\mathbf{y}} := \underbrace{\left(\mathbf{x}_{q,2}^j - \mathbf{x}_p^i, \mathbf{x}_{q,3}^j - \mathbf{x}_{q,2}^j \right)}_{=: \mathbb{R}_{q,2}^j} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}_p^i,$$

$$\text{Sub 5: } \widehat{\mathbf{y}} := \underbrace{\left(\mathbf{x}_{q,3}^j - \mathbf{x}_p^i, \mathbf{x}_{q,1}^j - \mathbf{x}_{q,3}^j \right)}_{=: \mathbb{R}_{q,3}^j} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}_p^i,$$

Metoda hraničních prvků

Výpočet prvků $\mathbf{V}_{p,q}$ — singulární případ (pokrač.)

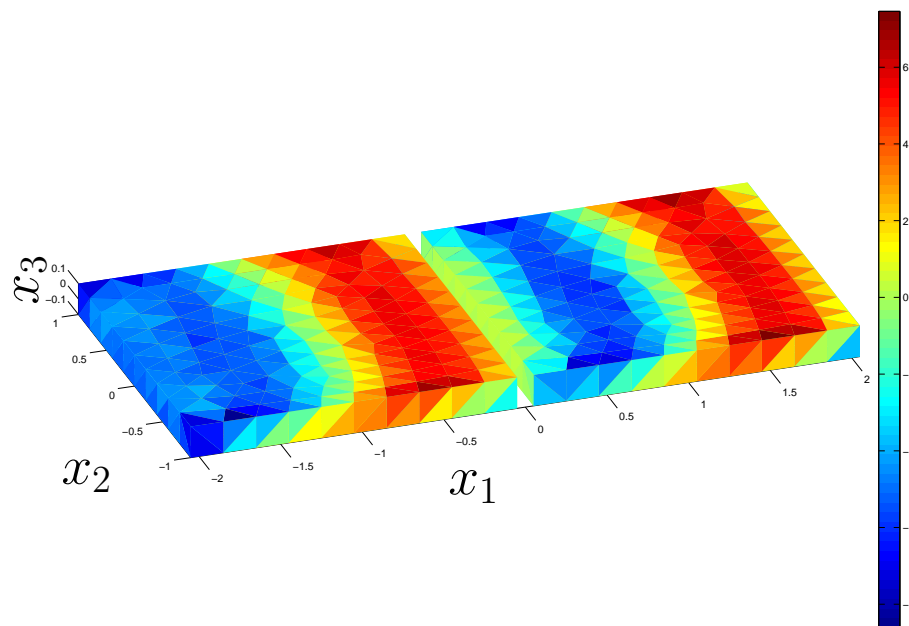
Následně singularity odstraníme substitucí 2 a aproximujeme Gaussovou kvadraturou

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{V}_{p,q})_{i,j} &= \int_{T_q^j} \frac{e^{\nu\kappa |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}|}}{4\pi |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}|} dS(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^3 \int_{T_{q,k}^j} \frac{e^{\nu\kappa |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}|}}{4\pi |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}|} dS(\mathbf{y}) \stackrel{\text{Sub.3,4,5}}{=} \\
 &\stackrel{\text{Sub.3,4,5}}{=} \sum_{k=1}^3 \int_0^1 \int_0^{\hat{y}_1} \frac{e^{\nu\kappa |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{R}_{q,k}^j \cdot \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_p^i|}}{4\pi |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{R}_{q,k}^j \cdot \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_p^i|} \left| \det \mathbf{R}_{q,k}^j \right| d\hat{y}_2 d\hat{y}_1 \stackrel{\text{Sub.2}}{=} \\
 &\stackrel{\text{Sub.2}}{=} \sum_{k=1}^3 \int_0^1 \int_0^1 \frac{e^{\nu\kappa \eta_1 |\mathbf{R}_{q,k}^j \cdot (1, \eta_2)|}}{4\pi |\mathbf{R}_{q,k}^j \cdot (1, \eta_2)|} \left| \det \mathbf{R}_{q,k}^j \right| d\eta_2 d\eta_1 \approx \\
 &\approx \sum_{k=1}^3 \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N w_\alpha^N w_\beta^N \frac{e^{\nu\kappa \xi_\alpha^N |\mathbf{R}_{q,k}^j \cdot (1, \xi_\beta^N)|}}{4\pi |\mathbf{R}_{q,k}^j \cdot (1, \xi_\beta^N)|} \left| \det \mathbf{R}_{q,k}^j \right|, \quad p = q \text{ a } i = j.
 \end{aligned}$$

Metoda hraničních prvků

Numerické řešení w_+ , w_-

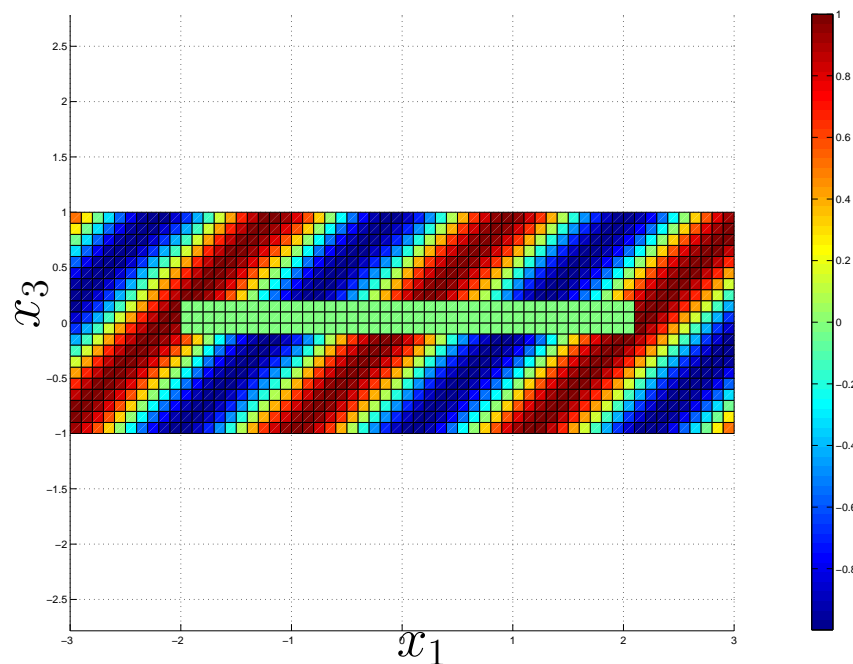
Volba $\Omega_- := (-2.05, -0.05) \times (-1, 1) \times (-0.1, 0.1)$ a $\Omega_+ := (0.05, 2.05) \times (-1, 1) \times (-0.1, 0.1)$, $h := 0.2$ vede na $m_- = m_+ := 282$ trojúhelníků. Inc. vlna \widehat{u}^i dopadá v rovině $x_2 := 0$ zleva pod úhlem 45° s $\lambda := 1.5$.



Metoda hraničních prvků

Numerické řešení $\operatorname{Re} \hat{u}^i$

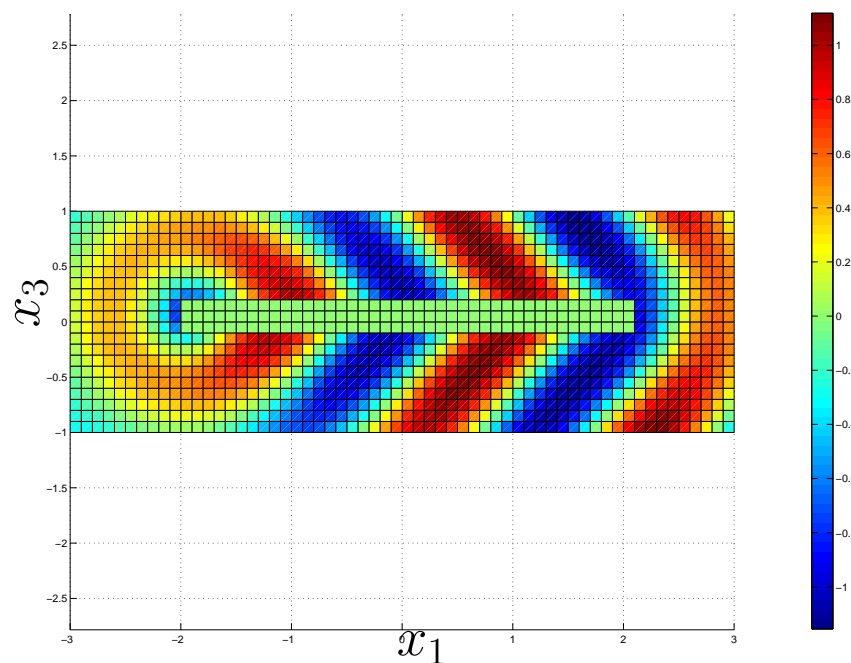
Volba $\Omega_- := (-2.05, -0.05) \times (-1, 1) \times (-0.1, 0.1)$ a $\Omega_+ := (0.05, 2.05) \times (-1, 1) \times (-0.1, 0.1)$, $h := 0.2$ vede na $m_- = m_+ := 282$ trojúhelníků. Inc. vlna \hat{u}^i dopadá v rovině $x_2 := 0$ zleva pod úhlem 45° s $\lambda := 1.5$.



Metoda hraničních prvků

Numerické řešení $\operatorname{Re} \hat{u}^s$

Volba $\Omega_- := (-2.05, -0.05) \times (-1, 1) \times (-0.1, 0.1)$ a $\Omega_+ := (0.05, 2.05) \times (-1, 1) \times (-0.1, 0.1)$, $h := 0.2$ vede na $m_- = m_+ := 282$ trojúhelníků. Inc. vlna \hat{u}^i dopadá v rovině $x_2 := 0$ zleva pod úhlem 45° s $\lambda := 1.5$.



Metoda hraničních prvků

Numerické řešení $\text{Re } \hat{u}$

Volba $\Omega_- := (-2.05, -0.05) \times (-1, 1) \times (-0.1, 0.1)$ a $\Omega_+ := (0.05, 2.05) \times (-1, 1) \times (-0.1, 0.1)$, $h := 0.2$ vede na $m_- = m_+ := 282$ trojúhelníků. Inc. vlna \hat{u}^i dopadá v rovině $x_2 := 0$ zleva pod úhlem 45° s $\lambda := 1.5$.

