Matematické modelování elmg. polí — 2. kap.: Magnetostatika

Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

http://www.am.vsb.cz/lukas/

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Matematické modelování elmg. polí — Magnetostatika

Osnova

- Magnetostatika
- Modelová úloha
- 2d magnetostatika
  - Variační formulace
  - Metoda konečných prvků
  - Hraniční integrální formulace
  - Metoda hraničních prvků
  - Párování konečných a hraničních prvků
- 3d magnetostatika
  - Variační formulace
  - Metoda konečných prvků

Magnetostatika

popisuje magnetická (silová) pole stacionárních proudů.

Zákon zachování náboje

Úbytek náboje v objemovém elementu odpovídá toku náboje z povrchu elementu:

$$\oint_{\partial\Omega} \rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = -\int_{\Omega} \frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial t}\, dV(\mathbf{x}),$$

kde $\mathbf{v}$ je rychlost toku náboje (rychlost elektronů), t je čas.

Označme $\mathbf{j}(\mathbf{x}) := \rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})$ hustotu elektrického proudu. Pak Gaussova věta dává

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}(\mathbf{x})) = -\frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial t}.$$

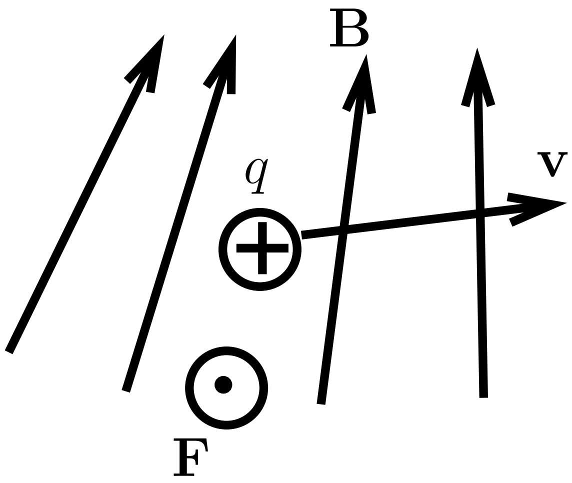
Označme dále tok elektrického náboje trubicí o průřezu Σ jako elektrický proud

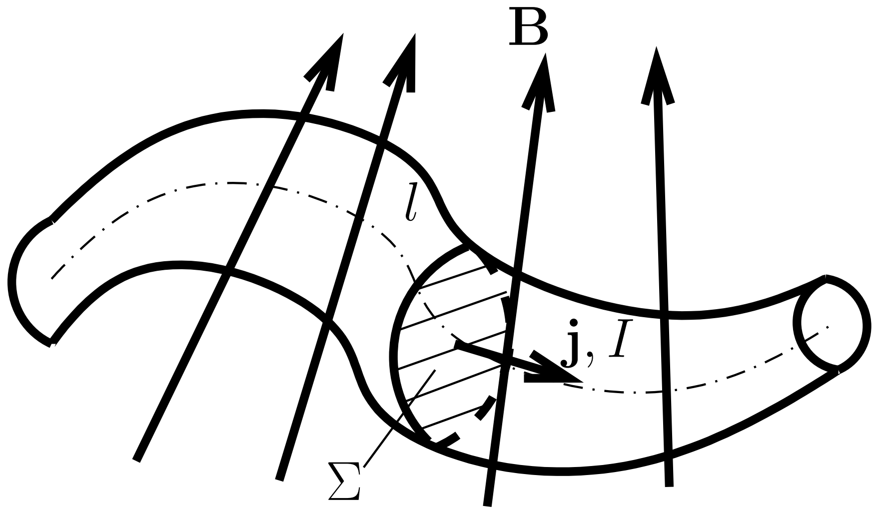
$$I(\Sigma) := \int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \text{konst.}$$

Magnetostatika

Lorentzova síla

je síla působící na pohybující se náboj nebo na proudovodič.





$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{F} = \int_l \int_{\Sigma(\mathbf{y})} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{x})\, dl(\mathbf{y}) = \int_l I(\mathbf{y})\mathbf{n}(\mathbf{y}) \times \mathbf{B}(\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}),$$

kde **B** je pole magnetické indukce.

Magnetostatika

Neexistují magnetické náboje.

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = 0$$

Gaussova věta dává:

$$\boxed{\mathrm{div}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.}$$

Ampérův zákon (ve vakuu)

Magnetické pole rotuje kolem budících proudů:

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{B}(\mathbf{x})\, \mathbf{dl}(\mathbf{x}) = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}),$$

kde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ je permeabilita vakua, přičemž $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, kde c je rychlost světla. Stokesova věta dává:

$$\boxed{\mathbf{rot}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.}$$

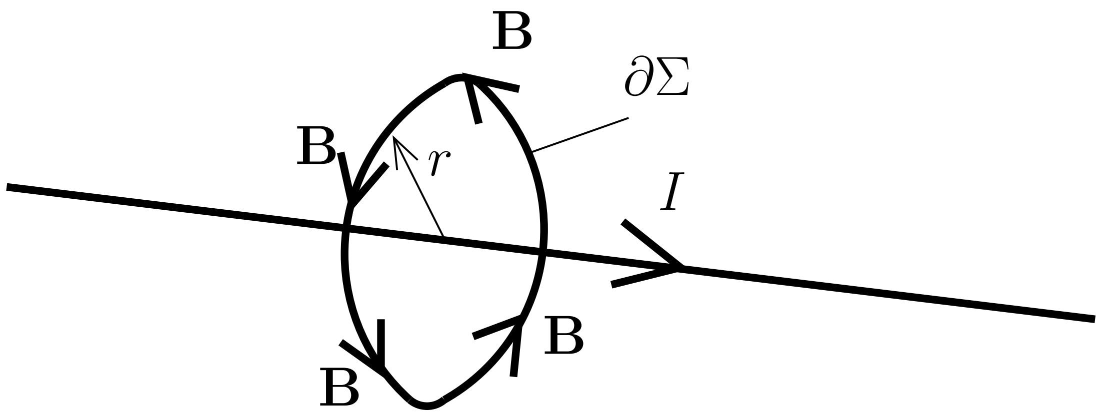
Magnetostatika

Příklad 5: Pole dlouhého vodiče

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{B}(\mathbf{x})\,\mathbf{dl}(\mathbf{x}) = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x})$$

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



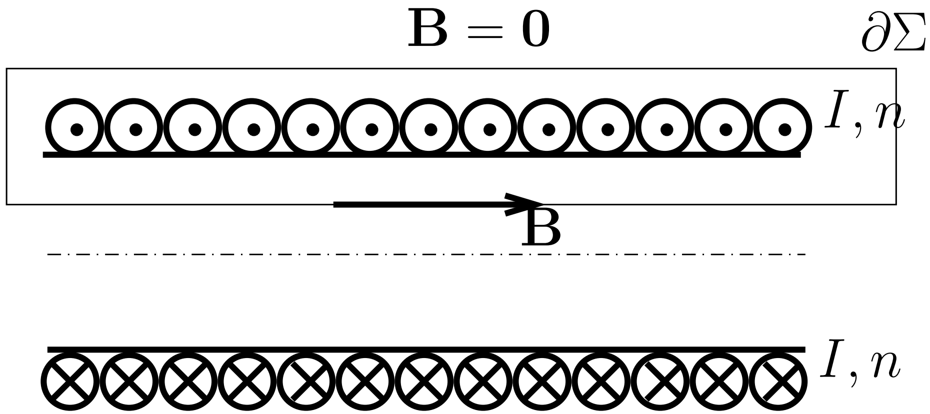
Příklad 6: Pole dlouhé cívky

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{B}(\mathbf{x})\,\mathbf{dl}(\mathbf{x}) = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x})$$

$$Bl = \mu_0 n l I$$

$$B = \mu_0 n I,$$

kde n je hustota závitů.

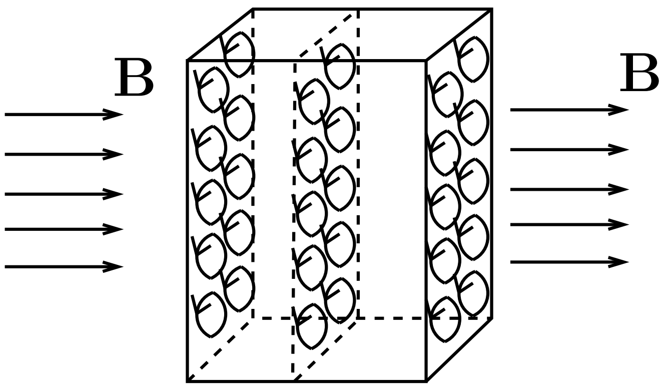


Magnetostatika

Ampérův zákon ve feromagnetiku

Ve feromagnetických materiálech se po vložení do magnetického pole vytvoří vrstvy zmagnetizovaných proudových smyček orientovaných v souladu s vnějším polem tak, že magnetické pole zesilují.

Označme $\mathbf{j}_{\mathrm{mag}}(\mathbf{x}) = \mathbf{rot}(\mathbf{M}(\mathbf{x}))$ hustotu magnetizovaných dipólů, kde $\mathbf{M}$ je magnetizace.



$$\mathbf{rot}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) = \mu_0(\mathbf{j}(\mathbf{x}) + \mathbf{j}_{\mathrm{mag}}(\mathbf{x}))$$

$$\mathbf{rot}\left(\frac{1}{\mu_{\mathrm{r}}}\mathbf{B}(\mathbf{x})\right) := \mathbf{rot}\left(\mathbf{B}(\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x})}{\mu_0}\right) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}),$$

kde $\mu_{\mathrm{r}} \geq 1$ je relativní permebailita.

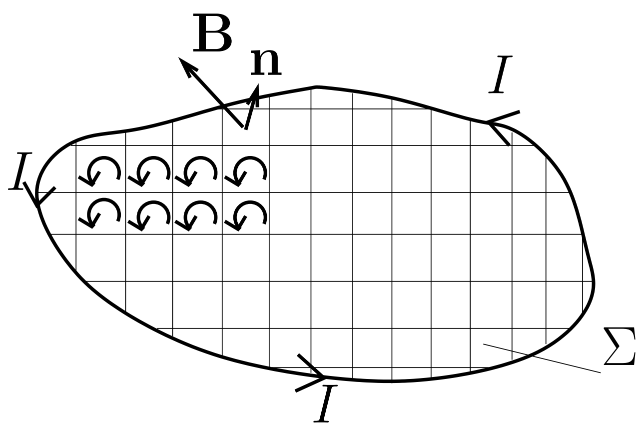
Označme $\mathbf{H}(\mathbf{x}) := \frac{1}{\mu_0 \mu_{\mathrm{r}}(\mathbf{x})}\mathbf{B}(\mathbf{x})$ magnetickou intenzitu:

$$\boxed{\mathbf{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x})) = \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.}$$

Magnetostatika

Magnetický vektorový potenciál

Energie proudové smyčky:



$$W = I \int_{\Sigma} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}).$$

Definujme magnetický vektorový potenciál $\mathbf{A}$:
$\mathbf{rot}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \mathbf{B}(\mathbf{x})$. Stokesova věta dává

$$W = I \int_{\Sigma} \mathbf{rot}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = I \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{u}(\mathbf{x})\, \mathbf{dl}(\mathbf{x}).$$

$\mathbf{u}$ je nejednoznačný, neboť

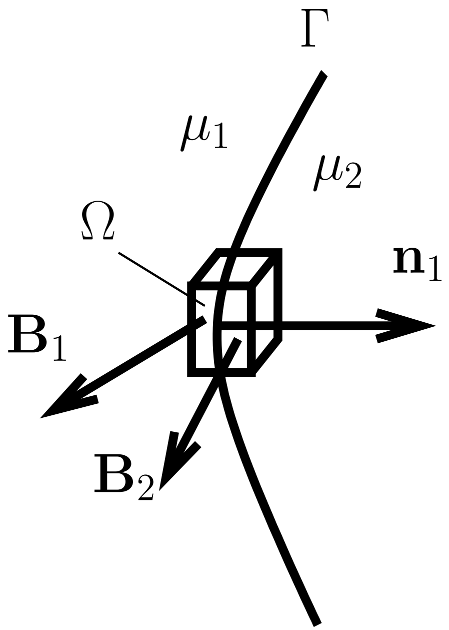
$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{rot}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \mathbf{rot}(\mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla\phi(\mathbf{x}))$$

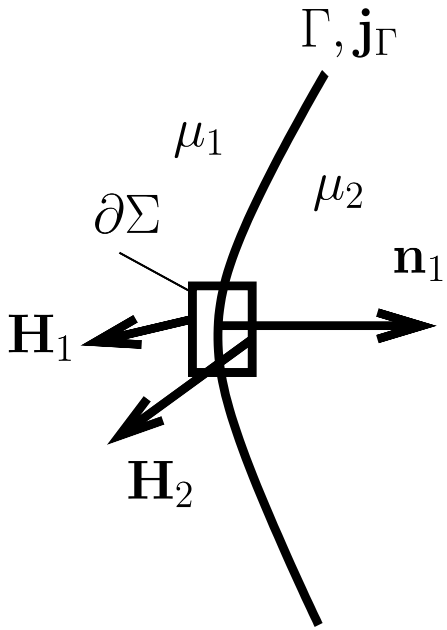
Jednoznačnost můžeme vynutit např. Coulombovskou kalibrační podmínkou:

$$\mathrm{div}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = 0 \text{ a poklesem v nekonečnu } |\mathbf{u}(\mathbf{x})| \rightarrow 0 \text{ pro } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty.$$

Magnetostatika

Podmínky na rozhraní





$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \boxed{(\mathbf{B}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_2(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Gamma.}$$

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{H}(\mathbf{x})\, \mathbf{dl}(\mathbf{x}) = \mu_0 \int_\Sigma \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) \Rightarrow$$

$$\boxed{(\mathbf{H}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{H}_2(\mathbf{x})) \times \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{j}_\Gamma(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Gamma.}$$

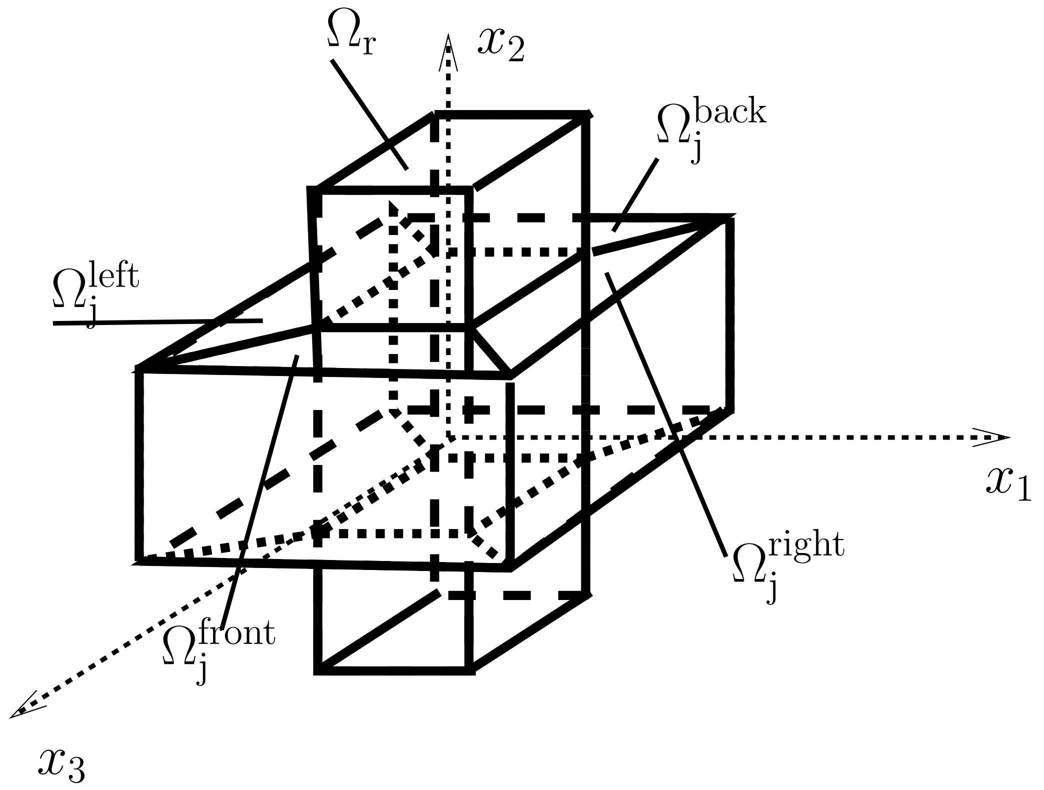
Matematické modelování elmg. polí — Magnetostatika

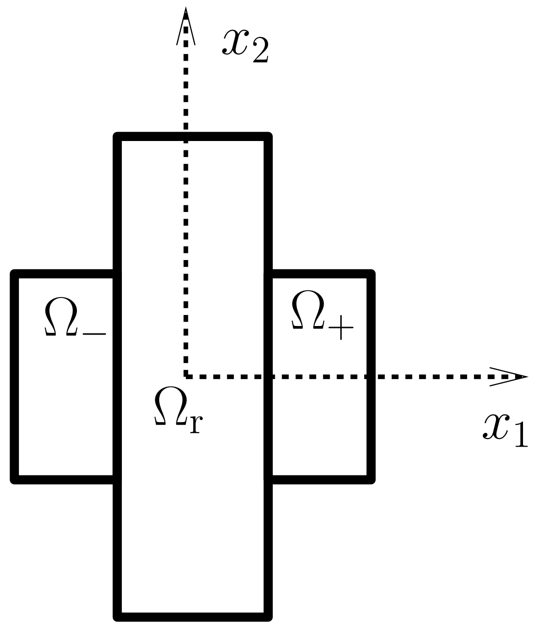
Osnova

- Magnetostatika
- Modelová úloha
- 2d magnetostatika
  - Variační formulace
  - Metoda konečných prvků
  - Hraniční integrální formulace
  - Metoda hraničních prvků
  - Párování konečných a hraničních prvků
- 3d magnetostatika
  - Variační formulace
  - Metoda konečných prvků

Modelová úloha

3d geometrie, redukce do 2d





Ω_+ ...kladná proudová hustota j, Ω_- ...záporná proudová hustota $-j$,
Ω_r ...feromagnetikum μ_r

Modelová úloha

3d matematický model

Hledáme $\mathbf{u}_0 : \overline{\Omega_0} \to \mathbb{R}^3$ a $\mathbf{u}_\mathrm{r} : \overline{\Omega_\mathrm{r}} \to \mathbb{R}^3$ tak, že

$$\left\{\begin{array}{rcll}
\mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_\mathrm{r}(\mathbf{x}))) & = & \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Omega_\mathrm{r}, \\
\mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}))) & = & \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_0 := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_\mathrm{r}}, \\
\mathrm{div}(\mathbf{u}_k(\mathbf{x})) & = & \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Omega_k, k \in \{0, \mathrm{r}\}, \\
(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_\mathrm{r}(\mathbf{x})) \times \mathbf{n}_\mathrm{r}(\mathbf{x}) & = & \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_\mathrm{r}, \\
\left(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x})) - \frac{1}{\mu_\mathrm{r}}\mathbf{rot}(\mathbf{u}_\mathrm{r}(\mathbf{x}))\right) \times \mathbf{n}_\mathrm{r}(\mathbf{x}) & = & \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_\mathrm{r}, \\
\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) & \to & \mathbf{0}, & |\mathbf{x}| \to \infty,
\end{array}\right.$$

kde

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) := (0, 0, -j) \text{ pro } \mathbf{x} \in \Omega_\mathrm{j}^{\mathrm{left}}, \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}) := (-j, 0, 0) \text{ pro } \mathbf{x} \in \Omega_\mathrm{j}^{\mathrm{front}},$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) := (0, 0, j) \text{ pro } \mathbf{x} \in \Omega_\mathrm{j}^{\mathrm{right}}, \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}) := (j, 0, 0) \text{ pro } \mathbf{x} \in \Omega_\mathrm{j}^{\mathrm{back}}, \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}) := \mathbf{0} \text{ jinde}.$$

Modelová úloha

2d matematický model

Hledáme $u_0 : \overline{\Omega_0} \to \mathbb{R}$ a $u_\mathrm{r} : \overline{\Omega_\mathrm{r}} \to \mathbb{R}$ tak, že

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\triangle\, u_\mathrm{r}(\mathbf{x}) & = & 0, & \mathbf{x} \in \Omega_\mathrm{r}, \\ -\triangle\, u_0(\mathbf{x}) & = & \mu_0\, j(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_0 := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_\mathrm{r}}, \\ u_0(\mathbf{x}) - u_\mathrm{r}(\mathbf{x}) & = & 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_\mathrm{r}, \\ \partial u_0(\mathbf{x})/\partial\mathbf{n}(\mathbf{x}) - \frac{1}{\mu_\mathrm{r}}\partial u_\mathrm{r}(\mathbf{x})/\partial\mathbf{n}(\mathbf{x}) & = & 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_\mathrm{r}, \\ u_0(\mathbf{x}) & \to & 0, & |\mathbf{x}| \to \infty, \end{array} \right.$$

kde

$$j(\mathbf{x}) := \begin{cases} -j, & \mathbf{x} \in \Omega_-, \\ j, & \mathbf{x} \in \Omega_+, \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$$

Magnetická indukce je pak tato:

$$\mathbf{B}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{rot}(0, 0, u(x_1, x_2)) = \left(\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}, -\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}, 0 \right).$$

Matematické modelování elmg. polí — Magnetostatika

Osnova

- Magnetostatika
- Modelová úloha
- 2d magnetostatika
  - Variační formulace
  - Metoda konečných prvků
  - Hraniční integrální formulace
  - Metoda hraničních prvků
  - Párování konečných a hraničních prvků
- 3d magnetostatika
  - Variační formulace
  - Metoda konečných prvků

Variační formulace

Ořezání výpočetní oblasti

Uvažujme $d := 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ pokrývající Ω_r a Ω_j a nechť

$$u(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

Neuvažujeme tedy nadále neomezenou oblast. Dopouštíme se tím chyby v modelování!

Zjednodušme zápis geometrie, konstanty μ_r a řešení takto:

$$\mu(\mathbf{x}) := \begin{cases} \mu_0\,\mu_\mathrm{r}, & \mathbf{x} \in \Omega_\mathrm{r}, \\ \mu_0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_\mathrm{r}}, \end{cases} \qquad u(\mathbf{x}) = \begin{cases} u_\mathrm{r}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_\mathrm{r}, \\ u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_0 := \Omega \setminus \overline{\Omega_\mathrm{r}}. \end{cases}$$

Greenova věta

Pro spoj. dif. funkce $q, v : \overline{\omega} \to \mathbb{R}$ a pěkné $\omega \subset \mathbb{R}^d$ s vnější jedn. normálou $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ platí:

$$\int_\omega \frac{\partial q(\mathbf{x})}{\partial x_i}\, v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = -\int_\omega q(\mathbf{x})\, \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x_i}\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\omega} q(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\, n_i(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}).$$

Variační formulace

Odvození variační formulace

Vezměme diferencovatelnou funkci $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $v(\mathbf{x}) = 0$ pro $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Z první rovnice

$$\int_{\Omega_\mathrm{r}} \frac{1}{\mu_0\,\mu_\mathrm{r}(\mathbf{x})}\,\triangle u_\mathrm{r}(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$$

a aplikací Greenovy věty dostáváme

$$\int_{\Omega_\mathrm{r}} \frac{1}{\mu_0\,\mu_\mathrm{r}(\mathbf{x})}\,\nabla u_\mathrm{r}(\mathbf{x})\,\nabla v(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_\mathrm{r}} \frac{1}{\mu_0\,\mu_\mathrm{r}(\mathbf{x})}\,\frac{\partial u_\mathrm{r}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}\,v(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}) = 0.$$

Podobně přenásobíme v a $1/\mu_0$ druhou rovnici, zintegrujeme ji a z Greenovy věty

$$\int_{\Omega_0} \frac{1}{\mu_0}\,\nabla u_0(\mathbf{x})\,\nabla v(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_0} \frac{1}{\mu_0}\,\frac{\partial u_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}\,v(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_\mathrm{j}} j(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Variační formulace

Odvození variační formulace (pokrač.)

Sečteme předchozí rovnice s vědomím, že normály k Ω_{r} a k Ω_0 na $\partial\Omega_{\mathrm{r}} \cap \partial\Omega_0$ jsou opačné

$$\int_\Omega \frac{1}{\mu(\mathbf{x})} \nabla u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial u_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} v(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) +$$
$$+ \int_{\partial\Omega_{\mathrm{r}}} \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial u_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} - \frac{1}{\mu_{\mathrm{r}}(\mathbf{x})} \frac{\partial u_{\mathrm{r}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \right) v(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \int_\Omega j(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Použijeme $v = 0$ na $\partial\Omega$ a definice $j(\mathbf{x})$, $\mu(\mathbf{x})$ a $u(\mathbf{x})$ a dostáváme variační rovnici

$$\int_\Omega \frac{1}{\mu(\mathbf{x})} \nabla u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_\Omega j(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Řešení u i testovací funkce v bereme z prostoru $V_0 := H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|.\|_1}$, kde $\|v\|_1 := \int_\Omega v(\mathbf{x})^2 + |\nabla v(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}$.

Variační formulace

Variační formulace

Hledáme $u \in V_0$ tak, že

$$\int_\Omega \frac{1}{\mu(\mathbf{x})} \nabla u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_\Omega j(\mathbf{x}) \, v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in V_0.$$

Pro tuto úlohu lze dokázat existenci jednoznačného řešení a jeho spojitou závislost na změnách geometrie Ω i materiálové funkce ε.

Energetická formulace

K variační formulaci lze dojít i z principu minima elektrostatické energie

$$\varphi(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{1}{\mu(\mathbf{x})} \, |\nabla v(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} - \int_\Omega j(\mathbf{x}) \, v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Minimum φ nastane ve stacionárním bodě $u \in V_0$, tj. $\forall v \in V_0$:

$$\varphi'(u, v) := \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = \int_\Omega \frac{1}{\mu(\mathbf{x})} \nabla u(\mathbf{x}) \, \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_\Omega j(\mathbf{x}) \, v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Matematické modelování elmg. polí — Magnetostatika

Osnova

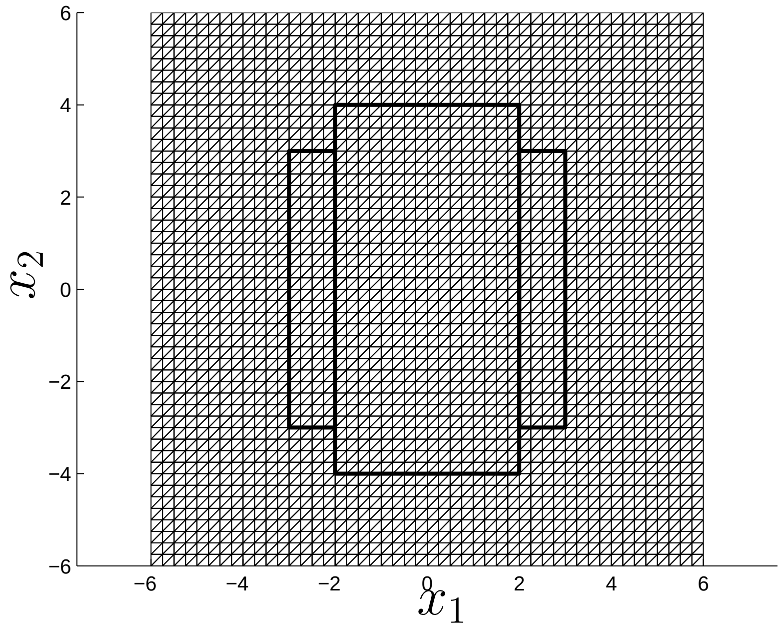
- Magnetostatika
- Modelová úloha
- 2d magnetostatika
  - Variační formulace
  - Metoda konečných prvků
  - Hraniční integrální formulace
  - Metoda hraničních prvků
  - Párování konečných a hraničních prvků
- 3d magnetostatika
  - Variační formulace
  - Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků

Diskretizace oblasti

Nechť $d := 2$. Diskretizujme Ω do m trojúhelníků tak, že sousedé mají společnou hranu nebo bod, hrany zachytí hranice podoblastí a nejostřejší úhel je zdola omezený

$$\overline{\Omega} = \cup_{k=1}^{m} \overline{T^k}, \quad T^i \cap T^j = \emptyset \text{ pro } i \neq j,$$



Metoda konečných prvků

MKP báze

Nad každým uzlem diskretizace $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ definujeme konečně–prvkovou bázovou funkcí $e_i^h(\mathbf{x}) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tak, že

$$\forall i\ \forall k\ :\ e_i^h(\mathbf{x})|_{T^k} = a_i^k + b_i^k x_1 + c_i^k x_2 \quad \text{a} \quad e_i^h(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

kde $a_i^k, b_i^k, c_i^k \in \mathbb{R}$. Máme aproximaci $V^h := \langle e_1^h(\mathbf{x}), \ldots, e_n^h(\mathbf{x}) \rangle$ prostoru $V := H^1(\Omega)$.

MKP aproximace Neumannovy úlohy

MKP aproximace formulace bez okrajové podmínky by byla tato: hledáme $\widetilde{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{u}_j\, e_j^h(\mathbf{x})$:

$$\widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{u}} = \widetilde{\mathbf{b}}, \quad \text{kde } (\widetilde{\mathbf{A}})_{ij} := a(e_j^h, e_i^h),\ (\widetilde{\mathbf{b}})_i := b(e_i^h),$$

kde $a(u, v)$, resp. $b(v)$, je bilineární, resp. lineární, forma na levé, resp. pravé, straně variační rovnice. Řešení této tzv. Neumannovy úlohy není jednoznačé.

Metoda konečných prvků

Sestavení MKP matic a vektorů

Iterujeme přes trojúhelníky a sčítáme lokální matice a vektory pravých stran, tj. např.

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{G}^k(\mathbf{A}^k), \quad \widetilde{\mathbf{b}} = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{H}^k(\mathbf{b}^k),$$

kde $\mathbf{A}^k \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\mathbf{b}^k \in \mathbb{R}^3$ a $\mathcal{G}^k : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, zobrazuje lokální matice na globální, $\mathcal{H}^k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^n$ zobrazuje lokální vektory na globální. Lokální příspěvky jsou tyto:

$$\mathbf{A}^k := \frac{1}{\mu^k} \left(\mathbf{B}^k_\nabla\right)^T \cdot \mathbf{B}^k_\nabla \frac{|\det(\mathbf{R}^k)|}{2},$$

$$\mathbf{b}^k := j^k \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{|\det(\mathbf{R}^k)|}{2},$$

kde $\mu^k := \mu(\mathbf{x})|_{T^k}$, $j^k := j(\mathbf{x})|_{T^k}$, $\mathbf{R}^k := \left(\mathbf{x}^{k_2} - \mathbf{x}^{k_1}, \mathbf{x}^{k_3} - \mathbf{x}^{k_1}\right)$ a $\mathbf{x}^{k_1}$, $\mathbf{x}^{k_2}$, $\mathbf{x}^{k_3}$ jsou uzly trojúhelníku T^k uspořádané v pravotočivém smyslu.

Metoda konečných prvků

MKP aproximace homogenní Dirichletovy úlohy

Buď $I := \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ množina indexů uzlů neležících na hranici $\partial\Omega$. Pak Galerkinovská aproximace naší homogenní Dirichletovy úlohy je:

$$\text{hledáme } u^h(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{n_0} u_k\, e^{i_k}(\mathbf{x}) \in V_0^h \;:\; a(u^h, e^{i_k}) = b(e^{i_k}) \quad \forall i_k \in I$$

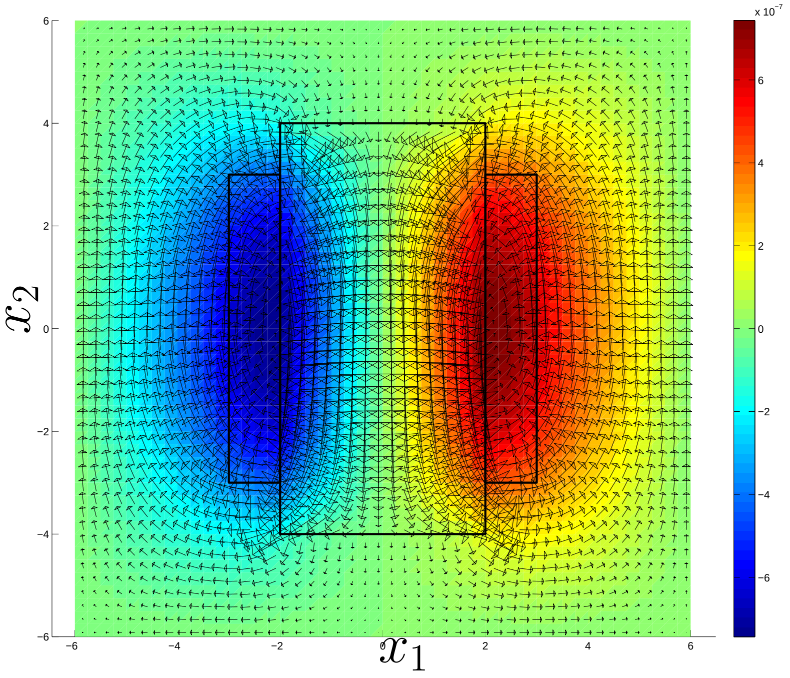
a odpovídající soustava lineárních rovnic vznikne restrikcí předchozí soustavy na I

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad \text{kde } \mathbf{A} := \widetilde{\mathbf{A}}_{I,I},\ \mathbf{b} := \widetilde{\mathbf{b}}_I \text{ a } \mathbf{u} := (u_1, u_2 \ldots, u_p)\,.$$

Metoda konečných prvků

Numerické řešení u a B

Volba $\mu_{\mathrm{r}} := 5000$, $J := 0.25$, $\Omega := (-6,6) \times (-6,6)$, $\Omega_- := (-3,-2) \times (-3,3)$, $\Omega_+ := (2,3) \times (-3,3)$, $\Omega_{\mathrm{r}} := (-2,2) \times (-4,4)$, s diskretizačním parametrem $h := 0.25$ vede na $n := 2401$ uzlů a $m := 4608$ trojúhelníků.



Matematické modelování elmg. polí — Magnetostatika

Osnova

- Magnetostatika
- Modelová úloha
- 2d magnetostatika
  - Variační formulace
  - Metoda konečných prvků
  - Hraniční integrální formulace
  - Metoda hraničních prvků
  - Párování konečných a hraničních prvků
- 3d magnetostatika
  - Variační formulace
  - Metoda konečných prvků

Hraniční integrální formulace

Metoda potenciálů

Uvažujme $d := 2$ a přeškálujme geometrii tak, že $\operatorname{diam}(\Omega_{\mathrm{r}} \cup \Omega_- \cup \Omega_+) < 1$. Hledáme řešení pomocí poteciálů jednoduché vrstvy

$$u_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_{\mathrm{r}}} w_{\mathrm{r}}(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}),\ \mathbf{x} \in \Omega_r,$$
$$u_0(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_{\mathrm{r}}} w_0(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}) + \mu_0\, j \left(\int_{\Omega_+} g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} - \int_{\Omega_-} g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right),\ \mathbf{x} \in \Omega_0,$$

kde $\Omega_0 := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_{\mathrm{r}} \cup \Omega_+ \cup \Omega_-}$, $\Gamma_{\mathrm{r}} := \partial\Omega_{\mathrm{r}}$, $\Gamma_+ := \partial\Omega_+$, $\Gamma_- := \partial\Omega_-$, $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) := -\frac{1}{2\pi} \ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ je fundamentální řešení Laplaceovy rovnice a kde $w_{\mathrm{r}}, w_0 : \Gamma_{\mathrm{r}} \to \mathbb{R}$, $w_+ : \Gamma_+ \to \mathbb{R}$ a $w_- : \Gamma_- \to \mathbb{R}$ jsou neznámé hustoty potenciálů. Řešení splňuje

$$-\triangle u_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in \Omega_{\mathrm{r}}, \quad -\triangle u_0(\mathbf{x}) = j(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Omega_0 \quad \text{a} \quad u_0(\mathbf{x}) \to C,\ |\mathbf{x}| \to \infty,$$

kde $C = 0$ díky symetrii úlohy. Zbývá splnit podmínky přechodu.

Hraniční integrální formulace

Vlastnosti potenciálu jednoduché vrstvy

Pro po částech spojité w_r je $\int_{\Gamma_\mathrm{r}} w_\mathrm{r}(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y})$ harmonická funkce v Ω_r a v $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_\mathrm{r}}$. Pro $\mathbf{x} \in \Gamma_\mathrm{r}$ bod spojitosti w_r, v jehož okolí je Γ hladká, platí, že pro $\Omega_\mathrm{r} \ni \widetilde{\mathbf{x}} \to \mathbf{x} \in \Gamma_\mathrm{r}$:

$$\int_{\Gamma_\mathrm{r}} w_\mathrm{r}(\mathbf{y})\, g(\widetilde{\mathbf{x}},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}) \to \int_{\Gamma_\mathrm{r}} w_\mathrm{r}(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}),$$

$$\mathbf{n}_\mathrm{r}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\widetilde{\mathbf{x}}} \int_{\Gamma_\mathrm{r}} w_\mathrm{r}(\mathbf{y})\, g(\widetilde{\mathbf{x}},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}) \to \frac{1}{2} w_\mathrm{r}(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_\mathrm{r}} w_\mathrm{r}(\mathbf{y})\, \frac{\partial g(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}\, dl(\mathbf{y}).$$

přičemž $\partial/\partial\mathbf{n}(\mathbf{x})$ je derivace podle vnější jednotkové normály k Ω_r. Podobně platí pro spojité w_0 a $\Omega_0 \ni \widetilde{\mathbf{x}} \to \mathbf{x} \in \Gamma_\mathrm{r}$:

$$\int_{\Gamma_\mathrm{r}} w_0(\mathbf{y})\, g(\widetilde{\mathbf{x}},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}) \to \int_{\Gamma_\mathrm{r}} w_0(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}),$$

$$\mathbf{n}_\mathrm{r}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\widetilde{\mathbf{x}}} \int_{\Gamma_\mathrm{r}} w_0(\mathbf{y})\, g(\widetilde{\mathbf{x}},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}) \to -\frac{1}{2} w_0(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_\mathrm{r}} w_0(\mathbf{y})\, \frac{\partial g(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}\, dl(\mathbf{y}).$$

Hraniční integrální formulace

Vlastnosti Newtonova potenciálu

Newtonův objemový potenciál je spojitý i se svou normálovou derivací nezávisle, zda se k hranici blížíme zevnitř, či zvenku, tedy pro $\Gamma_{\mathrm{r}} \not\ni \widetilde{\mathbf{x}} \to \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathrm{r}}$:

$$\int_{\Omega_\pm} g(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y})\, dl(\mathbf{x}) \to \int_{\Omega_\pm} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, dl(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{n}_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\widetilde{\mathbf{x}}} \int_{\Omega_\pm} g(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y})\, dl(\mathbf{x}) \to \int_{\Omega_\pm} \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}\, dl(\mathbf{x})$$

Hraniční integrální formulace

Formulace

Pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, resp. $\mathbf{x} \in \Gamma_\mathrm{r}$ (až na rohy), zaveďme operátory

$$[V_\mathrm{r} w](\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_\mathrm{r}} w(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}),\;\; [K_\mathrm{r} w](\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_\mathrm{r}} w(\mathbf{y})\, \frac{\partial g(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}\, dl(\mathbf{y})$$

a funkce

$$\begin{aligned} N(\mathbf{x}) &:= \mu_0\, j \left(\int_{\Omega_+} g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} - \int_{\Omega_-} g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right), \\ M(\mathbf{x}) &:= \mu_0\, j \left(\int_{\Omega_+} \frac{\partial g(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}\, d\mathbf{y} - \int_{\Omega_-} \frac{\partial g(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}\, d\mathbf{y} \right) \end{aligned}$$

Pak podmínky přechodu dávají následující hraniční integrální formulaci

$$\left\{ \begin{array}{ccccl} V_\mathrm{r} w_\mathrm{r} & - & V_\mathrm{r} w_0 & = & N,\;\; \mathbf{x} \in \Gamma_\mathrm{r}, \\ -\frac{1}{\mu_\mathrm{r}}(\frac{1}{2} I + K_\mathrm{r})\, w_r & - & (-\frac{1}{2} I + K_\mathrm{r})\, w_0 & = & M,\;\; \mathbf{x} \in \Gamma_\mathrm{r}, \end{array} \right.$$

kde I značí identické zobrazení.

Matematické modelování elmg. polí — Magnetostatika

Osnova

- Magnetostatika
- Modelová úloha
- 2d magnetostatika
  - Variační formulace
  - Metoda konečných prvků
  - Hraniční integrální formulace
  - Metoda hraničních prvků
  - Párování konečných a hraničních prvků
- 3d magnetostatika
  - Variační formulace
  - Metoda konečných prvků

Metoda hraničních prvků

Diskretizace hranic

Diskretizujme Γ_r do disjunktních úseček

$$\bigcup_{k=1}^{m_\mathrm{r}} \overline{S_\mathrm{r}^k} = \Gamma_\mathrm{r}$$

a uvažujme po úsečkách konstantní bázové funkce f_r^i tak, že

$$f_\mathrm{r}^i(\mathbf{x})\big|_{S_\mathrm{r}^j} = \delta_{ij} \text{ pro } i, j = 1, \ldots, m_\mathrm{r}.$$

Hledáme souřadnice neznámých hustot $\mathbf{w}_\mathrm{r}, \mathbf{w}_0 \in \mathbb{R}^m$

$$w_\mathrm{r}(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{m_\mathrm{r}} w_{\mathrm{r}k}\, f_\mathrm{r}^i(\mathbf{x}), \quad w_0(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{m_\mathrm{r}} w_{0k}\, f_\mathrm{r}^i(\mathbf{x}).$$

Metoda hraničních prvků

Kolokační metoda

Rovnice splníme pouze ve středech úseček $\mathbf{x}_{\mathrm{r}}^k \in S_{\mathrm{r}}^k$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{\mathrm{r,r}} & -\mathbf{V}_{\mathrm{r,r}} \\ -\frac{1}{\mu_r}\left(\frac{1}{2}\mathbf{I}_{\mathrm{r}} + \mathbf{K}_{\mathrm{r,r}}\right) & \frac{1}{2}\mathbf{I}_{\mathrm{r}} - \mathbf{K}_{\mathrm{r,r}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{\mathrm{r}} \\ \mathbf{w}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

kde $\mathbf{I}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}^{m_{\mathrm{r}} \times m_{\mathrm{r}}}$ je jednotková matice a kde $(\mathbf{V}_{\mathrm{r,r}})_{ij} := \int_{S_{\mathrm{r}}^j} g(\mathbf{x}_{\mathrm{r}}^i, \mathbf{y})\, dl(\mathbf{y})$, $(\mathbf{K}_{\mathrm{r,r}})_{ij} := \int_{S_{\mathrm{r}}^j} \nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}_{\mathrm{r}}^i, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_{\mathrm{r}}^j\, dl(\mathbf{y})$, $(\mathbf{N})_i := N(\mathbf{x}_{\mathrm{r}}^i)$, $(\mathbf{M})_i := M(\mathbf{x}_{\mathrm{r}}^i)$, přičemž $\mathbf{n}_{\mathrm{r}}^j$ značí jednotkovou normálu k S_{r}^j směřující ven z Ω_{r}.

Metoda hraničních prvků

Výpočet prvků vektorů N

Prvky matic $\mathbf{V}_{\mathrm{r,r}}$ a $\mathbf{K}_{\mathrm{r,r}}$ vypočteme stejně jako v kapitole Elektrostatika. Při výpočtu $\mathbf{N}$ použijeme následující integrál:

$$\int_a^b \int_c^d \ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 \, dy_2 \, dy_1 = F_1(a) - F_1(b) - F_2(a,c) + F_2(a,d) + F_2(b,c) - F_2(b,d) + \\ + F_3(a,c) - F_3(a,d) - F_3(b,c) + F_3(b,d) - 3(b-a)(d-c),$$

kde

$$F_1(y_1) := \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(y_1 - x_1)\, y_1\, (y_1 - 2x_1)\, (\operatorname{sgn}(c - x_2) - \operatorname{sgn}(d - x_2))\,,$$

$$F_2(y_1, y_2) := \left((y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2\right) \operatorname{arctg} \frac{y_1 - x_1}{y_2 - x_2},$$

$$F_3(y_1, y_2) := (y_1 - x_1)(y_2 - x_2) \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2$$

Metoda hraničních prvků

Výpočet prvků vektorů M

Při výpočtu $\mathbf{M}$ použijeme tento integrál:

$$\int_a^b \int_c^d \nabla_{\mathbf{x}} \ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \cdot \mathbf{n}\, dy_2\, dy_1 = \int_a^b \int_c^d \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}\, dy_2\, dy_1 = G_1(a) - G_1(b) +$$
$$+ G_2(a,c) - G_2(a,d) - G_2(b,c) + G_2(b,d) - G_3(a,c) + G_3(a,d) + G_3(b,c) - G_3(b,d),$$

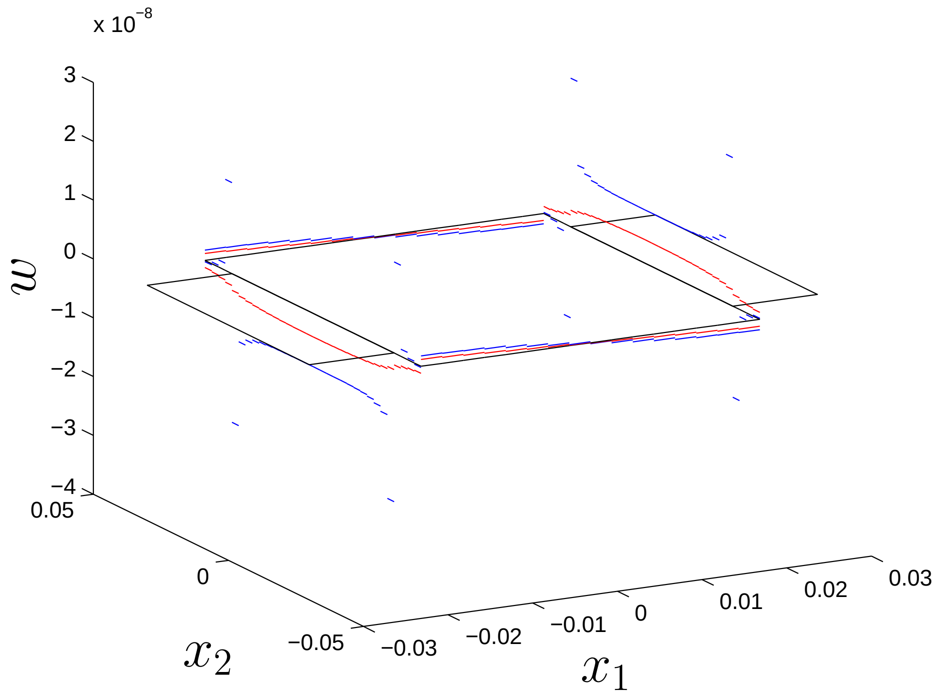
kde

$$G_1(y_1) := \frac{\pi}{2}\,|y_1 - x_1|\, n_1\, \left(\operatorname{sgn}(d - x_2) - \operatorname{sgn}(c - x_2)\right),$$
$$G_2(y_1,y_2) := \left((y_1 - x_1)n_1 - (y_2 - x_2)n_2\right) \operatorname{arctg}\frac{y_1 - x_1}{y_2 - x_2},$$
$$G_3(y_1,y_2) := \frac{1}{2}\left((y_1 - x_1)n_2 + (y_2 - x_2)n_1\right) \ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2.$$

Metoda hraničních prvků

Numerické řešení w_r a w_0

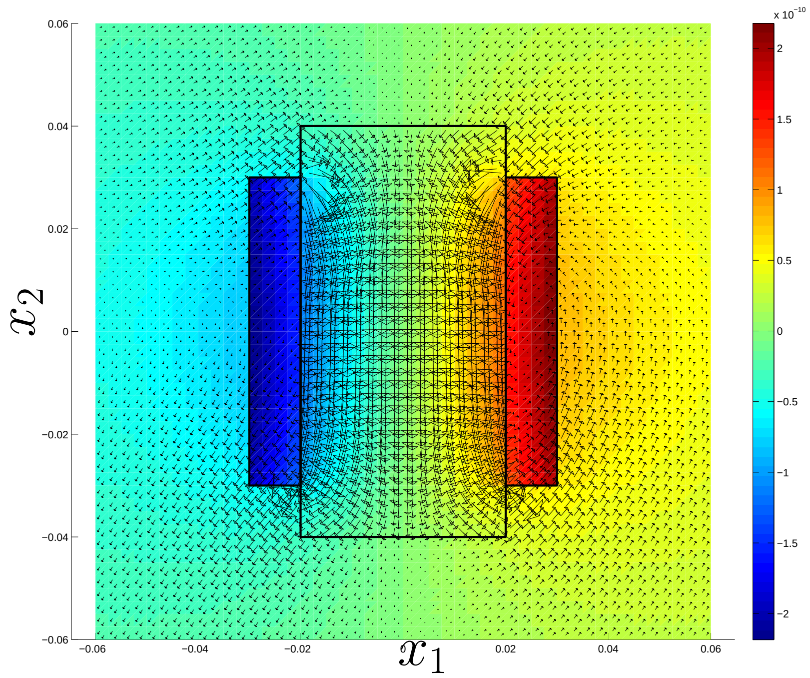
Volba $\mu_\mathrm{r} := 5000$, $J := 0.25$, $\Omega := (-0.06, 0.06) \times (-0.06, 0.06)$, $\Omega_- := (-0.03, -0.02) \times (-0.03, 0.03)$, $\Omega_+ := (0.02, 0.03) \times (-0.03, 0.03)$, $\Omega_\mathrm{r} := (-0.02, 0.02) \times (-0.04, 0.04)$, $h := 0.0025$ vede na $m_\mathrm{r} := 96$ úseček.



Metoda hraničních prvků

Numerické řešení u a B

Volba $\mu_\mathrm{r} := 5000$, $J := 0.25$, $\Omega := (-0.06, 0.06) \times (-0.06, 0.06)$, $\Omega_- := (-0.03, -0.02) \times (-0.03, 0.03)$, $\Omega_+ := (0.02, 0.03) \times (-0.03, 0.03)$, $\Omega_\mathrm{r} := (-0.02, 0.02) \times (-0.04, 0.04)$, $h := 0.0025$ vede na $m_\mathrm{r} := 96$ úseček.



Matematické modelování elmg. polí — Magnetostatika

Osnova

- Magnetostatika
- Modelová úloha
- 2d magnetostatika
  - Variační formulace
  - Metoda konečných prvků
  - Hraniční integrální formulace
  - Metoda hraničních prvků
  - Párování konečných a hraničních prvků
- 3d magnetostatika
  - Variační formulace
  - Metoda konečných prvků

Párování konečných a hraničních prvků

Odvození formulace

Základem párování je následující variační rovnice na oblasti Ω_r:

$$\frac{1}{\mu_\mathrm{r}}\int_{\Omega_\mathrm{r}} -\triangle u_\mathrm{r}(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_\mathrm{r}} \frac{1}{\mu_\mathrm{r}} \nabla u_\mathrm{r}(\mathbf{x})\, \nabla v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_\mathrm{r}} \frac{1}{\mu_\mathrm{r}} \frac{\partial u_\mathrm{r}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}\, v(\mathbf{x})\, dl(\mathbf{x}) = 0,$$

v níž nahradíme tok u_r přes Γ_r tokem u_0

$$\int_{\Omega_\mathrm{r}} \frac{1}{\mu_\mathrm{r}} \nabla u_\mathrm{r}(\mathbf{x})\, \nabla v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_\mathrm{r}} \frac{\partial u_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}\, v(\mathbf{x})\, dl(\mathbf{x}) = 0.$$

Řešení u_0 hledáme opět v následujícím tvaru

$$u_0(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_\mathrm{r}} w_0(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}) + \mu_0\, j \left(\int_{\Omega_+} g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} - \int_{\Omega_-} g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right),$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\mathrm{r}$. Zbývá zaručit spojitost řešení

$$u_\mathrm{r}(\mathbf{x}) - u_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\mathrm{r}.$$

Párování konečných a hraničních prvků

Odvození formulace

S využitím symbolů V_r, K_r, jeho skoku a definic N a M: hledáme $u_\mathrm{r} \in \mathcal{V}_\mathrm{r} := H^1(\Omega_\mathrm{r})$ a $w_0 : \Gamma_\mathrm{r} \longrightarrow \mathbb{R}$ tak, že

$$\left\{ \begin{array}{ccccccl} a_\mathrm{r}(u_\mathrm{r}, v) & - & b_\mathrm{r}\left(\left(-\frac{1}{2}\, I + L_\mathrm{r}\right) w_0, v\right) & = & b_\mathrm{r}(M, v) & \forall v \in \mathcal{V}_\mathrm{r}, \\ u_\mathrm{r} & - & V_\mathrm{r}\, w_0 & = & N & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\mathrm{r}, \end{array} \right.$$

kde I je identita a kde

$$a_\mathrm{r}(u_\mathrm{r}, v) := \int_{\Omega_\mathrm{r}} \frac{1}{\mu_\mathrm{r}} \nabla u_\mathrm{r} \nabla v \, d\mathbf{x}, \quad b_\mathrm{r}(u, v) := \int_{\Gamma_\mathrm{r}} u\, v \, dl(\mathbf{x}).$$

Galerkinova formulace úlohy

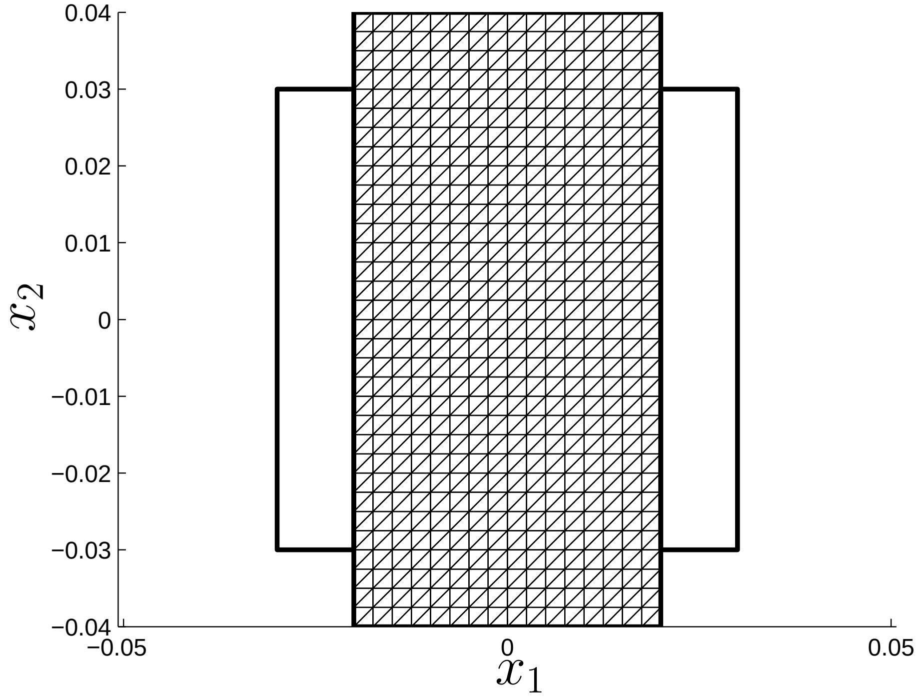
Zaveďme $\mathcal{W}_\mathrm{r} := H^{1/2}(\Gamma_\mathrm{r})$ Sobolevův prostor stop na Γ_r. Hledáme $u_\mathrm{r} \in \mathcal{V}_\mathrm{r}$ a $w_0 \in \mathcal{W}_\mathrm{r}$:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccl} a_\mathrm{r}(u_\mathrm{r}, v) & - & b_\mathrm{r}\left(\left(-\frac{1}{2}\, I + L_\mathrm{r}\right) w_0, v\right) & = & b_\mathrm{r}(M, v) & \forall v \in \mathcal{V}_\mathrm{r}, \\ b_\mathrm{r}(u_\mathrm{r}, q) & - & b_\mathrm{r}(V_\mathrm{r}\, w_0, q) & = & b_\mathrm{r}(N, q) & \forall q \in \mathcal{W}_\mathrm{r}. \end{array} \right.$$

Párování konečných a hraničních prvků

Konečně–prvková diskretizace

Diskretizace $\mathcal{V}_\mathrm{r}$ metodou konečných prvků vede na triangulaci Ω_r do m_r trojúhelníků T^k, v jejichž uzlech $\mathbf{x}_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n_\mathrm{r}\}$, definujeme konečně–prvkové bázové funkce e_i^h. Máme aproximaci $\mathcal{V}_\mathrm{r}^h \subset \mathcal{V}_\mathrm{r}$. Bilineární forma $a_\mathrm{r}(.,.)$ vede na matici $\mathbf{A}_\mathrm{r} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{r} \times n_\mathrm{r}}$.



Párování konečných a hraničních prvků

Hraničně–prvková diskretizace

Diskretizace prostoru $\mathcal{W}_\mathrm{r}$ metodou hraničních prvků je indukována předchozí triangulací Ω_r. To vede na s_r hraničních úseček S_r^i a p_r hraničních uzlů $\mathbf{x}_{i_1}, \ldots, \mathbf{x}_{i_{p_r}}$, kde $i_k \in \{1, 2, \ldots, n_\mathrm{r}\}$. Nad úsečkami S_r^i definujeme hraničně-prvkové nespojité po částech konstantní bázové funkce f_r^i, jejichž lineární obal nám dá prostor $\mathcal{W}_\mathrm{r}^h \subset \mathcal{W}_\mathrm{r}$. Při diskretizaci MHP bilineární formy $b_\mathrm{r}(.,.)$ použijeme nejhrubší kvadraturní formuli, a to obdélníkové pravidlo

$$\int_{S_\mathrm{r}^k} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \approx f(\mathbf{x}_\mathrm{r}^k)\, |S_\mathrm{r}^k|,$$

kde $\mathbf{x}_\mathrm{r}^k$ je střed úsečky S_r^k a $|S_\mathrm{r}^k|$ je její délka. To nám umožní využít již napočítané prvky matic $\mathbf{V}_{\mathrm{r},\mathrm{r}}$, $\mathbf{K}_{\mathrm{r},\mathrm{r}}$ a vektorů $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$.

Párování konečných a hraničních prvků

Galerkinova metoda

Párováním vede na

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{r} & \mathbf{B}_\mathrm{r} \\ \mathbf{C}_\mathrm{r} & \mathbf{D}_\mathrm{r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\mathrm{r} \\ \mathbf{w}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_\mathrm{r} \\ \mathbf{c}_\mathrm{r} \end{pmatrix}.$$

kde řádky $\mathbf{B}_\mathrm{r} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{r} \times s_\mathrm{r}}$ a složky $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{r}}$ jsou

$$(\mathbf{B}_\mathrm{r})_{i,*} := \frac{1}{2} |S_\mathrm{r}^i| \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{1}{2} \mathbf{I}_\mathrm{r} - \mathbf{K}_{\mathrm{r},\mathrm{r}} \right)_{i_k,*}, \quad (\mathbf{b}_\mathrm{r})_i := \frac{1}{2} |S_\mathrm{r}^i| \sum_{k=1}^{2} (\mathbf{M})_{i_k}.$$

přičemž $i_1, i_2 \in \{1, 2, \ldots, p_\mathrm{r}\}$ jsou hraniční indexy uzlů S_r^i. Dále $\mathbf{C}_\mathrm{r} \in \mathbb{R}^{s_\mathrm{r} \times n_\mathrm{r}}$

$$(\mathbf{C}_\mathrm{r})_{i,j} := \begin{cases} \frac{1}{2} |S_\mathrm{r}^i|, & \text{pokud } \mathbf{x}_j,\ j \in \{1, 2, \ldots, n_\mathrm{r}\}, \text{ je jeden ze dvou uzlů } S_\mathrm{r}^i, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

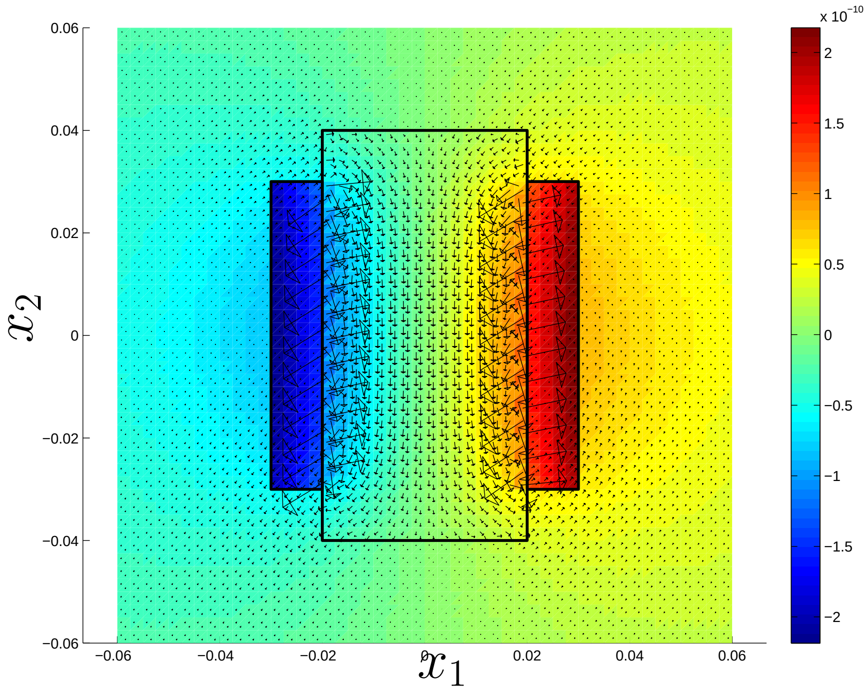
Konečně matice $\mathbf{D}_\mathrm{r} \in \mathbb{R}^{s_\mathrm{r} \times s_\mathrm{r}}$ a vektor $\mathbf{c}_\mathrm{r} \in \mathbb{R}^{s_\mathrm{r}}$ jsou definovány po řádcích takto:

$$(\mathbf{D}_\mathrm{r})_{i,*} := -|S_\mathrm{r}^i| \, (\mathbf{V}_{\mathrm{r},\mathrm{r}})_{i,*}, \quad (\mathbf{c}_\mathrm{r})_i := |S_\mathrm{r}^i| \, (\mathbf{N})_i.$$

Párování konečných a hraničních prvků

Numerické řešení u a B

Volba $\mu_\mathrm{r} := 5000$, $J := 0.25$, $\Omega_\mathrm{r} := (-0.02, 0.02) \times (-0.04, 0.04)$, $\Omega_- := (-0.03, -0.02) \times (-0.03, 0.03)$, $\Omega_+ := (0.02, 0.03) \times (-0.03, 0.03)$, $h := 0.0025$ vede na $n_\mathrm{r} := 544$ MKP uzlů a $s_\mathrm{r} := 96$ MHP úseček.



Matematické modelování elmg. polí — Magnetostatika

Osnova

- Magnetostatika
- Modelová úloha
- 2d magnetostatika
  - Variační formulace
  - Metoda konečných prvků
  - Hraniční integrální formulace
  - Metoda hraničních prvků
  - Párování konečných a hraničních prvků
- 3d magnetostatika
  - Variační formulace
  - Metoda konečných prvků

Variační formulace

Ořezání výpočetní oblasti

Uvažujme $d := 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ pokrývající Ω_r a Ω_j a nechť

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

Neuvažujeme tedy nadále neomezenou oblast. Dopuštíme se tím chyby v modelování!

Zjednodušme zápis geometrie, konstanty μ_r a řešení takto:

$$\mu(\mathbf{x}) := \begin{cases} \mu_0\, \mu_\mathrm{r}, & \mathbf{x} \in \Omega_\mathrm{r}, \\ \mu_0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_\mathrm{r}}, \end{cases} \qquad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u}_\mathrm{r}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_\mathrm{r}, \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_0 := \Omega \setminus \overline{\Omega_\mathrm{r}}. \end{cases}$$

Variační formulace

Greenova věta

Pro spoj. dif. funkce $\varphi, \psi : \overline{\omega} \to \mathbb{R}$ a pěkné $\omega \subset \mathbb{R}^d$ s vnější jedn. normálou $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ platí:

$$\int_\omega \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_i}\, \psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = - \int_\omega \varphi(\mathbf{x})\, \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_i}\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\omega} \varphi(\mathbf{x})\, \psi(\mathbf{x})\, n_i(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}).$$

Opakovaným použitím si odvodíme analogii Greenovy formule pro operátor **rot**

$$\int_\Omega \mathbf{rot}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3} \right) v_1 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1} \right) v_2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right) v_3 \right] =$$

$$= - \int_\Omega \left[\left(w_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - w_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) + \left(w_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - w_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \left(w_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - w_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \right] +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \left[(w_3 n_2 - w_2 n_3)\, v_1 + (w_1 n_3 - w_3 n_1)\, v_2 + (w_2 n_1 - w_1 n_2)\, v_3 \right] =$$

$$= - \int_\Omega \mathbf{w} \cdot (-\mathbf{rot}(\mathbf{v})) - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{w} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} = \int_\Omega \mathbf{w} \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{v}) + \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n})\,.$$

Variační formulace

Odvození variační formulace

Vezměme dif. funkci $\mathbf{v} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0$ pro $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Z první rovnice

$$\int_{\Omega_\mathrm{r}} \frac{1}{\mu_0\,\mu_\mathrm{r}(\mathbf{x})} \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_\mathrm{r}(\mathbf{x}))) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$$

a aplikací Greenovy věty dostáváme

$$\int_{\Omega_\mathrm{r}} \frac{1}{\mu_0\,\mu_\mathrm{r}(\mathbf{x})} \mathbf{rot}(\mathbf{u}_\mathrm{r}(\mathbf{x}))\cdot\nabla v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_\mathrm{r}} \frac{1}{\mu_0\,\mu_\mathrm{r}(\mathbf{x})} \mathbf{rot}(\mathbf{u}_\mathrm{r}(\mathbf{x}))\cdot(\mathbf{v}(\mathbf{x})\times\mathbf{n}(\mathbf{x}))\, dS(\mathbf{x}) = 0.$$

Podobně přenásobíme v a $1/\mu_0$ druhou rovnici, zintegrujeme ji a z Greenovy věty

$$\int_{\Omega_0} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{rot}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}))\cdot\nabla v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_0} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{rot}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}))\cdot(\mathbf{v}(\mathbf{x})\times\mathbf{n}(\mathbf{x}))\, dS(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_\mathrm{j}} \mathbf{j}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Variační formulace

Odvození variační formulace (pokrač.)

Sečteme předchozí rovnice s vědomím, že normály k Ω_r a k Ω_0 na $\partial\Omega_\mathrm{r} \cap \partial\Omega_0$ jsou opačné

$$\int_\Omega \frac{1}{\mu(\mathbf{x})} \mathbf{rot}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{rot}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}))\, dS(\mathbf{x}) +$$
$$+ \int_{\partial\Omega_\mathrm{r}} \frac{1}{\mu_0} \left(\left(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x})) - \frac{1}{\mu_\mathrm{r}(\mathbf{x})} \mathbf{rot}(\mathbf{u}_\mathrm{r}(\mathbf{x})) \right) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) \right) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \int_\Omega \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Použijeme $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0$ na $\partial\Omega$ a definice $\mathbf{j}(\mathbf{x})$, $\mu(\mathbf{x})$ a $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ a dostáváme variační rovnici

$$\int_\Omega \frac{1}{\mu(\mathbf{x})} \mathbf{rot}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Řešení $\mathbf{u}$ i testovací funkce $\mathbf{v}$ bereme z prostoru $\mathbf{V}_0 := \mathbf{H_0}(\mathbf{rot};\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)^3}^{\|\cdot\|_{\mathbf{rot}}}$, kde $\|v\|_{\mathbf{rot}} := \int_\Omega |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 + |\mathbf{rot}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))|^2\, d\mathbf{x}$.

Variační formulace

Odvození variační formulace (pokrač.)

Potenciál $\mathbf{u}$ je jednoznačný až na libovolné gradientní pole $\nabla\varphi$. Minimalizujme

$$E(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{\mu(\mathbf{x})}\,|\mathbf{rot}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))|^2\,d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{j}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},$$

jehož nekonečně mnoho stacionárních bodů $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \nabla\varphi \in \mathbf{V_0}$ jsou řešením rovnice

$$E'(\mathbf{u}+\nabla\varphi,\mathbf{v}) = 0 \quad \forall\mathbf{v}\in\mathbf{V_0}.$$

Jednoznačnost dodá Coulombova kalibrační podmínka: hledáme $\mathbf{u}\in\mathbf{V_0}$ tak, že

$$\forall\mathbf{v}\in\mathbf{V_0}:\ E(\mathbf{u}) \le E(\mathbf{v}) \text{ vzhledem k } \mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0,$$

přičemž kalibrační podmínku chápeme ve slabém smyslu. Hledáme $\mathbf{u}\in\mathbf{V_0}$ a $\lambda\in V_0 := H_0^1(\Omega)$ tak, že

$$\left\{\begin{array}{rcll} \int_\Omega \frac{1}{\mu}\mathbf{rot}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{rot}(\mathbf{v}) + \int_\Omega \nabla\lambda\cdot\mathbf{v} & = & \int_\Omega \mathbf{j}\cdot\mathbf{v} & \forall\mathbf{v}\in\mathbf{V_0}, \\ \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi & = & 0 & \forall\varphi\in V_0. \end{array}\right.$$

Matematické modelování elmg. polí — Magnetostatika

Osnova

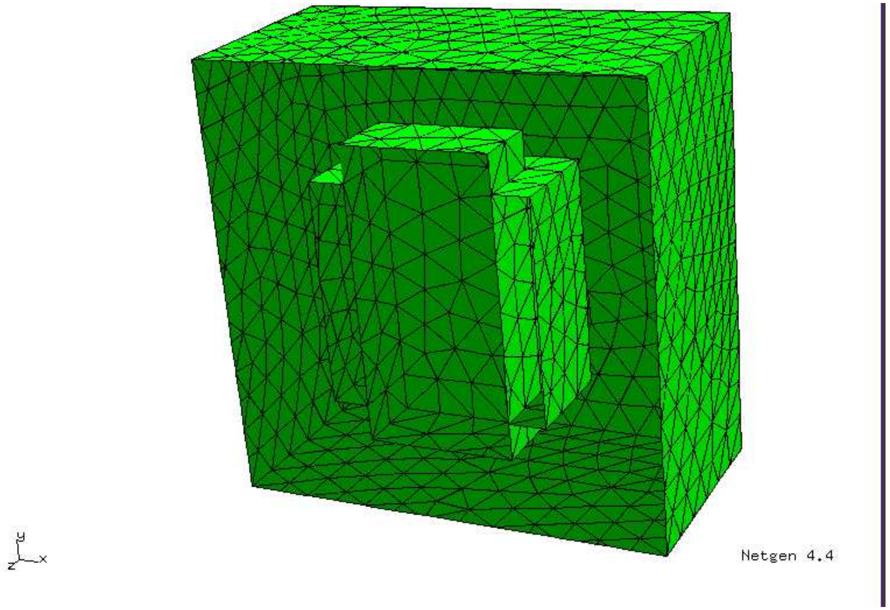
- Magnetostatika
- Modelová úloha
- 2d magnetostatika
  - Variační formulace
  - Metoda konečných prvků
  - Hraniční integrální formulace
  - Metoda hraničních prvků
  - Párování konečných a hraničních prvků
- 3d magnetostatika
  - Variační formulace
  - Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků

Diskretizace oblasti

Nechť $d := 3$. Diskretizujme Ω do m čtyřstěnů tak, že sousedé mají společnou stěnu, hranu, nebo bod, stěny zachytí hranice podoblastí a nejostřejší úhel je zdola omezený

$$\overline{\Omega} = \cup_{k=1}^{m} \overline{T^k}, \quad T^i \cap T^j = \emptyset \text{ pro } i \neq j.$$



Metoda konečných prvků

MKP aproximace $V := H^1(\Omega)$

Nad každým uzlem diskretizace $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ definujeme konečně–prvkovou bázovou funkcí $e_i^h(\mathbf{x}) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tak, že

$$\forall i \; \forall k \;:\; e_i^h(\mathbf{x})|_{T^k} = a_i^k + b_i^k x_1 + c_i^k x_2 + d_i^k x_3 \quad \text{a} \quad e_i^h(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

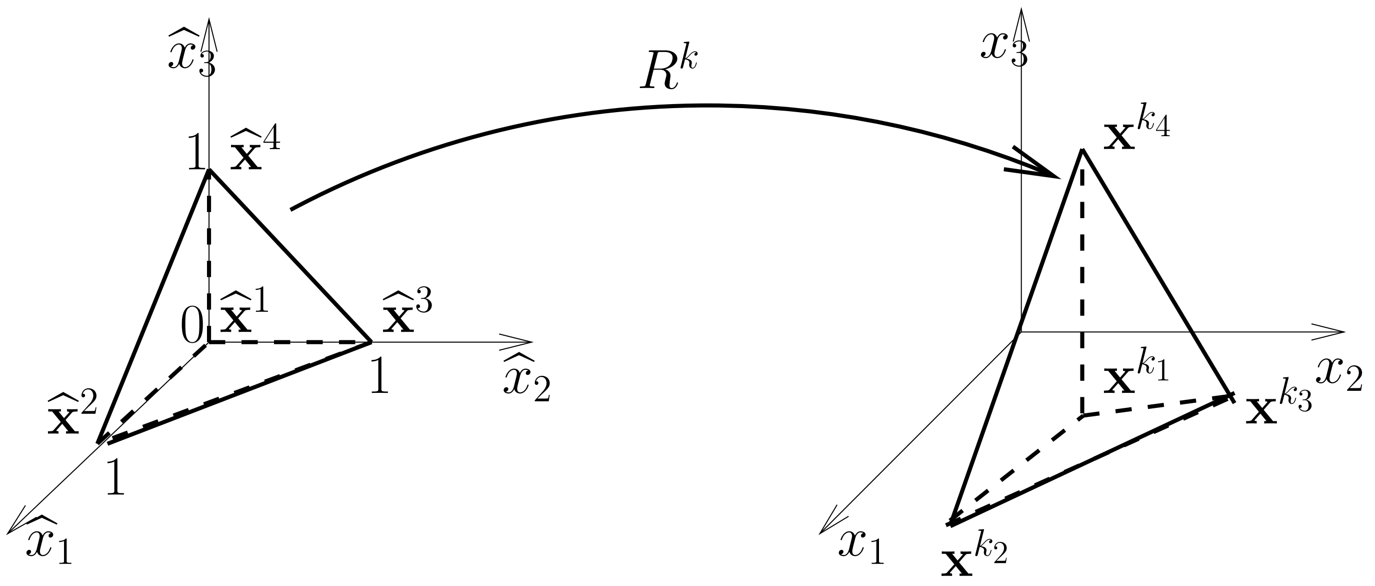
kde $a_i^k, b_i^k, c_i^k, d_i^k \in \mathbb{R}$. Máme aproximaci $V^h := \langle e_1^h(\mathbf{x}), \ldots, e_n^h(\mathbf{x}) \rangle$ prostoru V.

Metoda konečných prvků

Lokální bázové funkce V^h

Zobrazme $\widehat{T}$ s vrcholy (uzly) $\widehat{\mathbf{x}}^1$, $\widehat{\mathbf{x}}^2$, $\widehat{\mathbf{x}}^3$ a $\widehat{\mathbf{x}}^4$ na T^k s vrcholy $\mathbf{x}^{k_1}$, $\mathbf{x}^{k_2}$, $\mathbf{x}^{k_3}$ a $\mathbf{x}^{k_4}$

$$\mathbf{x} := R^k(\widehat{\mathbf{x}}) := \mathbf{R}^k \cdot \widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^{k_1}, \quad \text{kde } \mathbf{R}^k := \left(\mathbf{x}^{k_2} - \mathbf{x}^{k_1}, \mathbf{x}^{k_3} - \mathbf{x}^{k_1}, \mathbf{x}^{k_4} - \mathbf{x}^{k_1}\right).$$



Pak $e^{k_i}(\mathbf{x}) := \widehat{e}^i(\widehat{\mathbf{x}})$ pro $i \in \{1,2,3,4\}$ a $\widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{T}$ při substituci $\mathbf{x} := R^k(\widehat{\mathbf{x}})$, kde

$$\widehat{e}^1(\widehat{\mathbf{x}}) := 1 - \widehat{x}_1 - \widehat{x}_2 - \widehat{x}_3, \quad \widehat{e}^2(\widehat{\mathbf{x}}) := \widehat{x}_1, \quad \widehat{e}^3(\widehat{\mathbf{x}}) := \widehat{x}_2, \quad \widehat{e}^4(\widehat{\mathbf{x}}) := \widehat{x}_3.$$

Metoda konečných prvků

Gradient uzlové báze

Pro smíšenou bilineární formu $\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla\varphi$ potřebujeme spočítat gradienty bázových funkcí, pro něž lze ukázat platnost analogického vzorce jako ve 2 dimenzích

$$\mathbf{B}^k_\nabla := \left(\nabla e^{k_1}(\mathbf{x}), \nabla e^{k_2}(\mathbf{x}), \nabla e^{k_3}(\mathbf{x}), \nabla e^{k_4}(\mathbf{x})\right) = \left(\mathbf{R}^k\right)^{-T} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

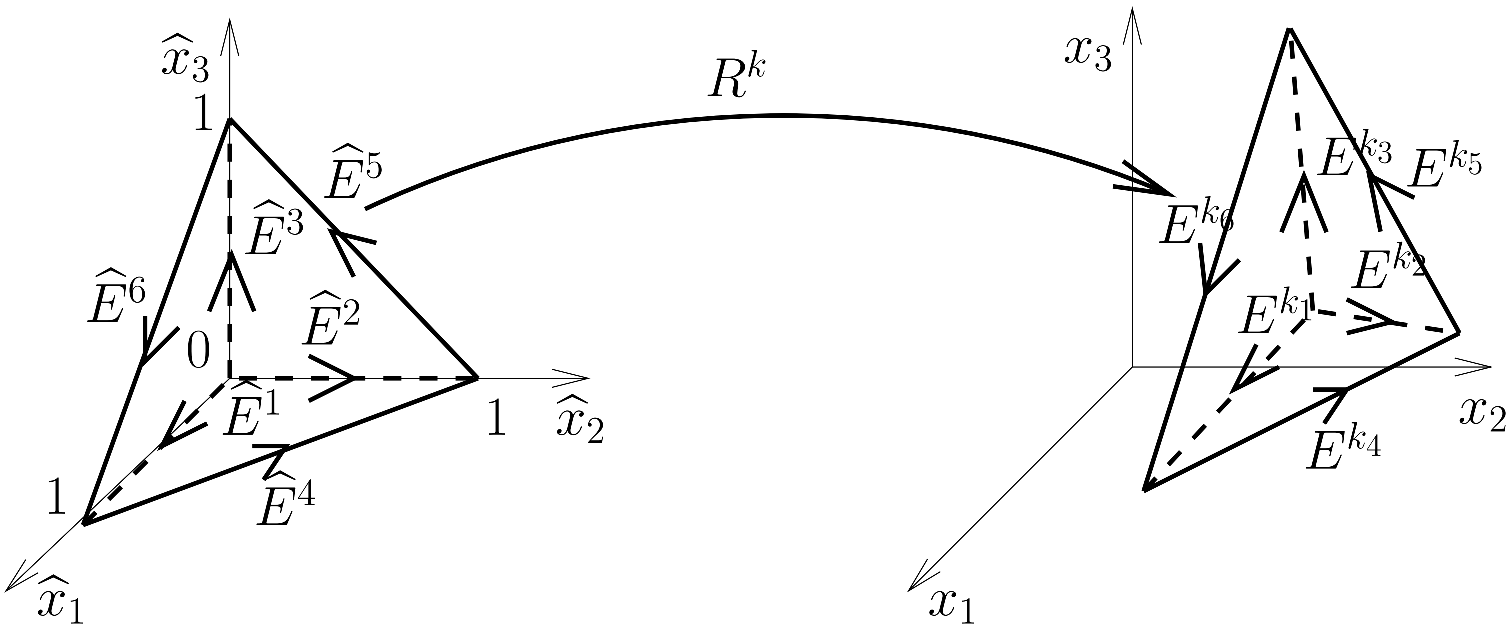
kde matice $(\mathbf{R}^k)^{-T}$ obsahuje derivace vnitřní funkce, tedy afinního zobrazení R^k, a sloupce druhé matice jsou gradienty referenčních bázových funkcí.

Metoda konečných prvků

Nédélecova MKP aproximace $\mathbf{V} := \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$

Nad každou orientovanou hranou $E^i : \mathbf{x}^{i_1} \to \mathbf{x}^{i_2}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n_\mathrm{e}\}$ diskretizace definujeme konečně–prvkovou bázovou funkci, kde $\mathbf{t}_j := \left(\mathbf{x}^{j_2} - \mathbf{x}^{j_1}\right) / \left|\mathbf{x}^{j_2} - \mathbf{x}^{j_1}\right|$,

$$\boldsymbol{\xi}^i(\mathbf{x})|_{T^k} = \mathbf{a}^i_k + \mathbf{b}^i_k \times \mathbf{x} \quad \text{a} \quad \int_{E^j} \boldsymbol{\xi}^i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}^j \, dl(\mathbf{x}) = \delta_{ij},$$



Metoda konečných prvků

Lokální bázové funkce $\mathbf{V}^h$

Uvažujme ref. čtyřstěn s orientovanými hranami $\widehat{E}^1 : \widehat{\mathbf{x}}^1 \longrightarrow \widehat{\mathbf{x}}^2$, $\widehat{E}^2 : \widehat{\mathbf{x}}^1 \longrightarrow \widehat{\mathbf{x}}^3$, $\widehat{E}^3 : \widehat{\mathbf{x}}^1 \longrightarrow \widehat{\mathbf{x}}^4$, $\widehat{E}^4 : \widehat{\mathbf{x}}^2 \longrightarrow \widehat{\mathbf{x}}^3$, $\widehat{E}^5 : \widehat{\mathbf{x}}^3 \longrightarrow \widehat{\mathbf{x}}^4$, $\widehat{E}^6 : \widehat{\mathbf{x}}^4 \longrightarrow \widehat{\mathbf{x}}^2$ a ref. bázové funkce

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}^1(\widehat{\mathbf{x}}) := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \times \widehat{\mathbf{x}},\ \widehat{\boldsymbol{\xi}}^2(\widehat{\mathbf{x}}) := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \times \widehat{\mathbf{x}},$$

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}^3(\widehat{\mathbf{x}}) := \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \times \widehat{\mathbf{x}},\ \widehat{\boldsymbol{\xi}}^4(\widehat{\mathbf{x}}) := \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \widehat{\mathbf{x}},$$

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}^5(\widehat{\mathbf{x}}) := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \widehat{\mathbf{x}}, \qquad \widehat{\boldsymbol{\xi}}^6(\widehat{\mathbf{x}}) := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \times \widehat{\mathbf{x}}.$$

Jim odpovídající konečně–prvkové bázové funkce jsou tyto:

$$\boldsymbol{\xi}^{k_i}(\mathbf{x}) = \mathrm{sign}_k(E^{k_i})\ \left(\mathbf{R}^k\right)^{-T} \cdot \widehat{\boldsymbol{\xi}}(\widehat{\mathbf{x}}), \quad \mathrm{sign}_k(E^{k_i}) := \begin{cases} 1, & \text{orientace } E^{k_i} \text{ shodná s } \widehat{E}^i \\ -1, & \text{orientace } E^{k_i} \text{ opačná k } \widehat{E}^i. \end{cases}$$

Metoda konečných prvků

Rotace hranové báze

Potřebujeme rotace hranových funkcí

$$\mathbf{B}^k_{\mathbf{rot}} := \big(\mathbf{rot}(\boldsymbol{\xi}^1), \mathbf{rot}(\boldsymbol{\xi}^2), \mathbf{rot}(\boldsymbol{\xi}^3), \mathbf{rot}(\boldsymbol{\xi}^4), \mathbf{rot}(\boldsymbol{\xi}^5), \mathbf{rot}(\boldsymbol{\xi}^6)\big)$$
$$= \frac{1}{\det(\mathbf{R}^k)} \mathbf{R}^k \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \operatorname{diag}\big(\operatorname{sign}_k(E^{k_i})\big)_{i=1}^6 .$$

Potřebujeme hodnoty bázových funkcí v těžišti $\mathbf{x}^k_{\mathrm{c}} := (1/4)\sum_{i=1}^4 \mathbf{x}^{k_i}$ čtyřstěnu T^k

$$\mathbf{B}^k_{\mathrm{Id}} := \big(\boldsymbol{\xi}^1(\mathbf{x}^k_{\mathrm{c}}), \boldsymbol{\xi}^2(\mathbf{x}^k_{\mathrm{c}}), \boldsymbol{\xi}^3(\mathbf{x}^k_{\mathrm{c}}), \boldsymbol{\xi}^4(\mathbf{x}^k_{\mathrm{c}}), \boldsymbol{\xi}^5(\mathbf{x}^k_{\mathrm{c}}), \boldsymbol{\xi}^6(\mathbf{x}^k_{\mathrm{c}})\big)$$
$$= \big(\mathbf{R}^k\big)^{-T} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \operatorname{diag}\big(\operatorname{sign}_k(E^{k_i})\big)_{i=1}^6 .$$

Metoda konečných prvků

Lokální matice a vektory

Lokální příspěvek do matice bilineární formy $\int_\Omega (1/\mu)\mathbf{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$ je

$$\mathbf{A}^k := \frac{1}{\mu^k} \left(\mathbf{B}^k_{\mathbf{rot}}\right)^T \cdot \mathbf{B}^k_{\mathbf{rot}} \frac{|\det(\mathbf{R}^k)|}{6},$$

kde $\mu^k := \mu(\mathbf{x})|_{T^k}$. Lokální příspěvek do matice bilineární formy $\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla\varphi$ je

$$\mathbf{B}^k := \left(\mathbf{B}^k_{\nabla}\right)^T \cdot \mathbf{B}^k_{\mathrm{Id}} \frac{|\det(\mathbf{R}^k)|}{6}.$$

Lokální příspěvek vektoru lineární formy $\int_\Omega \mathbf{j} \cdot \mathbf{v}$ je

$$\mathbf{b}^k := \left(\mathbf{B}^k_{\mathrm{Id}}\right)^T \cdot \mathbf{j}^k \frac{|\det(\mathbf{R}^k)|}{6},$$

kde $\mathbf{j}^k := \mathbf{j}(\mathbf{x})|_{T^k}$.

Metoda konečných prvků

Globální matice a vektory

$$\widetilde{\mathbf{A}} := \sum_{k=1}^{m} \mathcal{G}^k(\mathbf{A}^k), \quad \widetilde{\mathbf{B}} := \sum_{k=1}^{m} \mathcal{L}^k(\mathbf{B}^k), \quad \widetilde{\mathbf{b}} := \sum_{k=1}^{m} \mathcal{H}^k(\mathbf{b}^k),$$

kde $\mathcal{G}^k : \mathbb{R}^{6\times 6} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_\mathrm{e}\times n_\mathrm{e}}$, $\mathcal{L}^k : \mathbb{R}^{4\times 6} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n_\mathrm{e}}$ a $\mathcal{H}^k : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^{n_\mathrm{e}}$ zobrazují lokální hranové matice, uzlově–hranové matice, resp. lokální hranové vektory na globální.

$$\mathbf{A} := \widetilde{\mathbf{A}}_{I^\mathrm{e},I^\mathrm{e}}, \quad \mathbf{B} := \widetilde{\mathbf{B}}_{I,I^\mathrm{e}}, \quad \mathbf{b} := \widetilde{\mathbf{b}}_{I^\mathrm{e}},$$

kde $I^\mathrm{e} := \left\{i_1^\mathrm{e}, i_2^\mathrm{e}, \ldots, i_{p^\mathrm{e}}^\mathrm{e}\right\}$ a $I := \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ jsou indexy hran a uzlů mimo $\partial\Omega$.

MKP aproximace

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{p^\mathrm{e}} u_k \, \boldsymbol{\xi}^{i_k^\mathrm{e}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}^h(\mathbf{x})|_{T^k} = \mathbf{B}^k_{\mathbf{rot}} \cdot \mathbf{u}^k$, kde $\mathbf{u}^k$ je lokální vektor řešení doplněný o nuly pro hrany čtyřstěnu T^k ležící na $\partial\Omega$.

Metoda konečných prvků

Numerické řešení $\mathbf{B} := \mathbf{rot}(\mathbf{u})$

Volba geometrie $\Omega := (-6,6)^3$, $\Omega_{\mathrm{j}} := (-3,3)^3 \setminus (\langle -2,2\rangle \times \langle -3,3\rangle \times \langle -2,2\rangle)$, $\Omega_{\mathrm{r}} := (-2,2) \times (-4,4) \times (-2,2)$, $h := 1$ vede na $n := 2401$ uzlů a $m := 4608$ trojúhelníků.