Matematické modelování elmg. polí — 1. kap.: Elektrostatika

Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

http://www.am.vsb.cz/lukas/

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Matematické modelování elmg. polí — Elektrostatika

Osnova

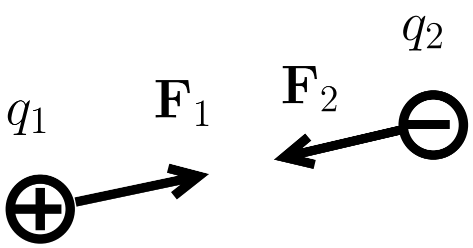
- Elektrostatika
- Modelová úloha
- Variační formulace
- Metoda konečných prvků
- Hraniční integrální formulace
- Metoda hraničních prvků

Elektrostatika

popisuje časově neměnná eletrická (silová) pole nabitých těles.

Coulombův zákon

vyjadřuje síly mezi náboji.



$$\mathbf{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2} \cdot \mathbf{e}_{12} = -\mathbf{F}_2,$$

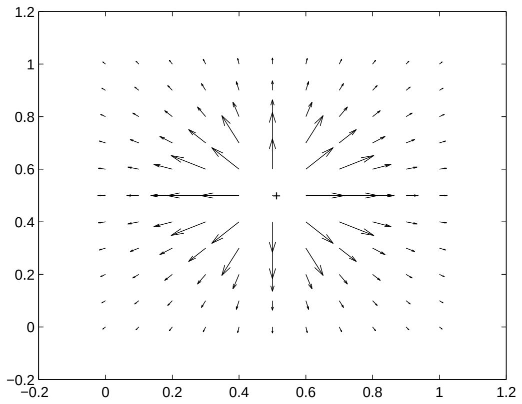
$q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ ... elektrické náboje (v Coulombech),
$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ ... polohy nábojů, $\mathbf{e}_{12} := (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)/|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$,
$\varepsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12}$ ... permitivita vakua

Elektrostatika

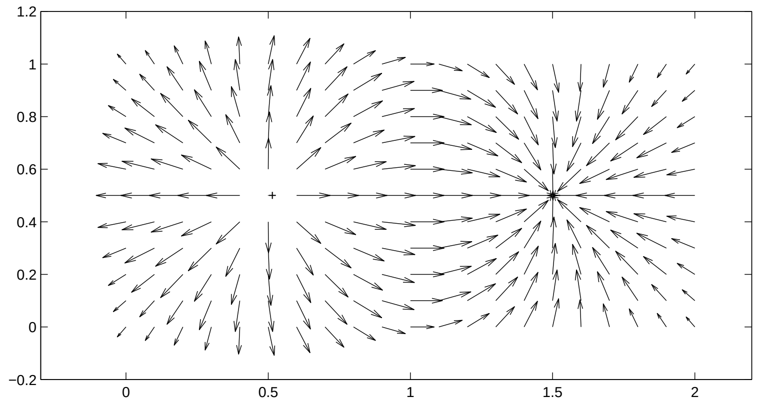
Intenzita elektrického pole

je síla elektrického pole na jednotkový náboj.

pole kladného náboje



pole dvou nesouhlasných nábojů



Platí princip superpozice, např.:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\Omega \frac{\rho(\mathbf{y})(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}\, dV(\mathbf{y}),$$

kde $\rho(\mathbf{y})$ je objemová hustota náboje v $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, tj. $\mathrm{supp}(\rho) \subset \Omega$.

Elektrostatika

Gaussův zákon (ve vakuu)

Tok elektrického pole z povrchu objemového elementu je určen náboji v tomto objemu. Gaussův zákon je ekvivalentní s Coulombovým zákonem.

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x})\, dV(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \Omega \subset \mathbb{R}^3,$$

kde $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ je vnější jednotková normála k $\partial\Omega$.

Gaussova věta: $\oint_{\partial\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathrm{div}(\mathbf{E}(\mathbf{x}))\, dV(\mathbf{x})$ dává

$$\boxed{\mathrm{div}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.}$$

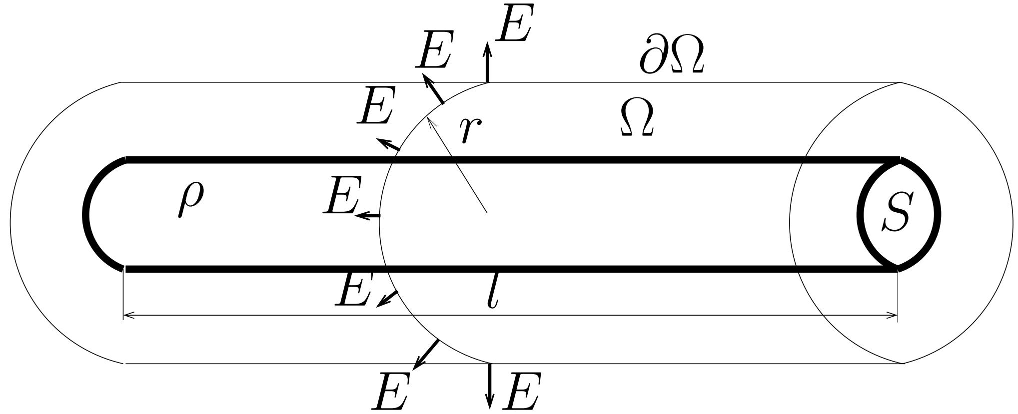
Elektrostatika

Příklad 1: Pole dlouhé nabité tyče

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}\, dV(\mathbf{x})$$

$$E(r) 2\pi r l = \frac{\rho S l}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho S}{2\pi r \varepsilon_0}$$

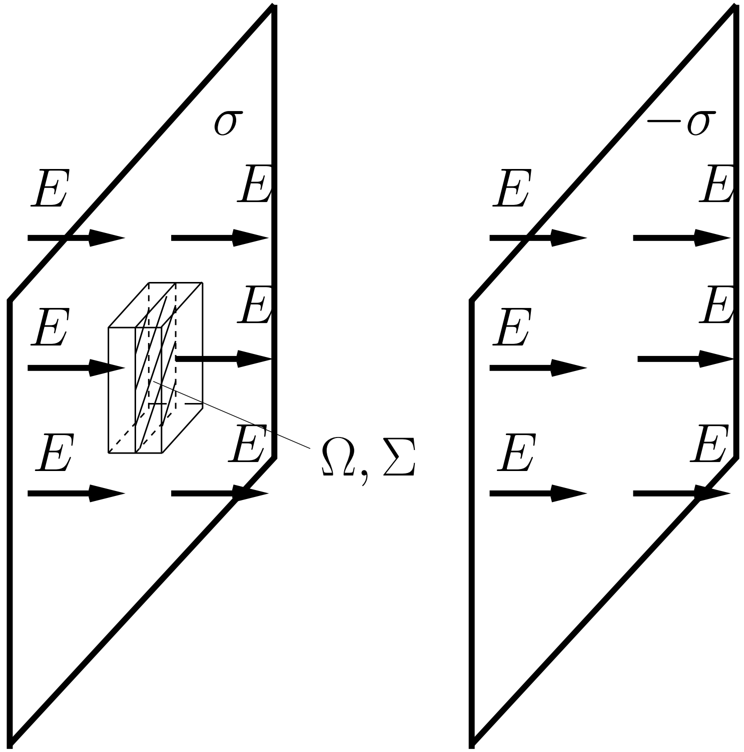


Příklad 2: Pole nabité desky

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{E}_+(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} \frac{\sigma(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}\, dS(\mathbf{x})$$

$$2E_+|\Sigma| = \frac{\sigma|\Sigma|}{\varepsilon_0}$$

$$E_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



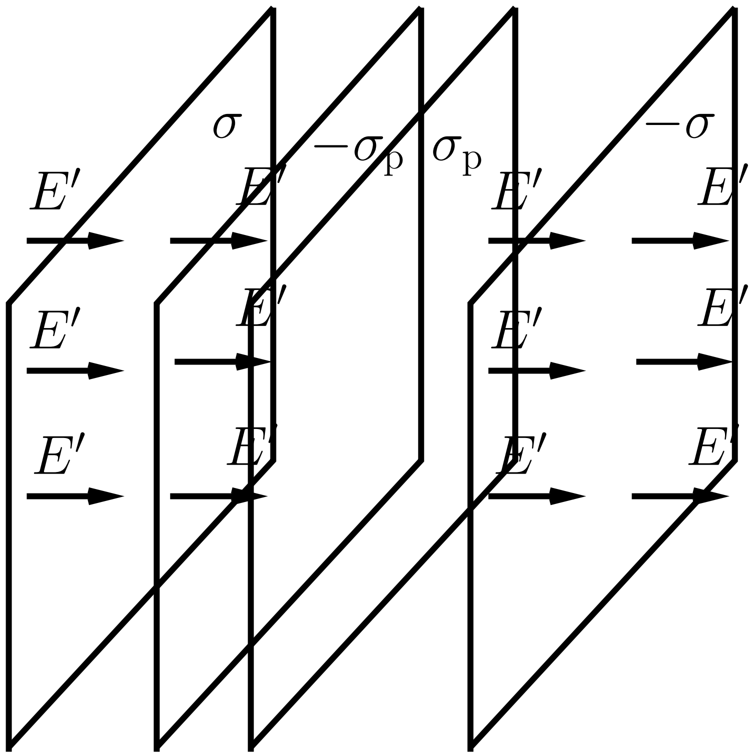
Příklad 3: Pole deskového kondenzátoru

$$E = 2E_+ = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Elektrostatika

Příklad 4: Pole dvou vnořených deskových kondenzátorů s opačnou orientací

$E' = E - E_\mathrm{p} = \frac{\sigma - \sigma_\mathrm{p}}{\varepsilon_0}$



Příklad modeluje chování polarizovaných nábojů (vnitřní kondenzátor) v dielektriku, které je vloženo do elektrostatického pole (vnější kondenzátor).

Elektrostatika

Gaussův zákon v dielektriku

V dielektrických materiálech se po vložení do elektrostatického pole vytvoří vrstvy polarizovaných nábojů orientovaných v souladu s vnějším polem. Ty se chovají jako vnořené kondenzátory, viz příklad 4, tedy zeslabují vnější pole.

Označme $\rho_{\mathrm{pol}}(\mathbf{x}) = \operatorname{div}(-\mathbf{P}(\mathbf{x}))$ hustotu polarizovaného náboje v dielektriku, kde $\mathbf{P}$ je elektrostatická polarizace.

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) = \frac{\rho(\mathbf{x}) + \rho_{\mathrm{pol}}(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon_{\mathrm{r}}\mathbf{E}(\mathbf{x})) := \operatorname{div}\left(\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}\right) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0},$$

kde $\varepsilon_{\mathrm{r}} \geq 1$ je relativní permitivita. Označme $\mathbf{D}(\mathbf{x}) := \varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x})$ el. indukci:

$$\boxed{\operatorname{div}(\mathbf{D}(\mathbf{x})) = \rho(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.}$$

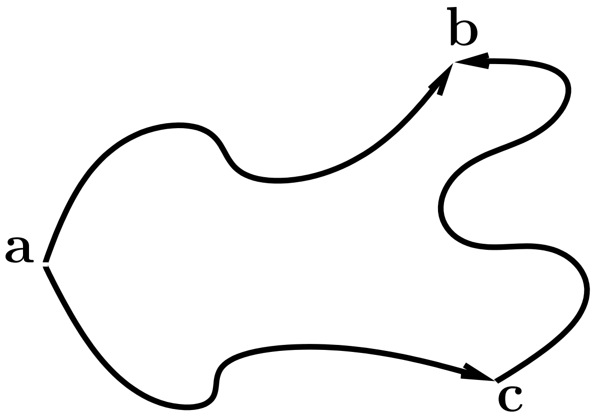
Elektrostatika

Elektrický potenciál (napětí)

Elektrostatické pole je potenciální:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla u(\mathbf{x}),$$

kde u je elektrický potenciál (napětí). Tzn. práce, kterou vykoná elektrostatické pole působící na jednotkový náboj, nezávisí na dráze:



$$W_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} = -\int_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} \mathbf{E}(\mathbf{x})\,\mathbf{dl}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} \nabla u(\mathbf{x})\,\mathbf{dl}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{b}) - u(\mathbf{a})$$

$$= W_{\mathbf{a}\to\mathbf{c}} + W_{\mathbf{c}\to\mathbf{b}}$$

a tedy:

$$-\oint_k \mathbf{E}(\mathbf{x})\,\mathbf{dl}(\mathbf{x}) = 0$$

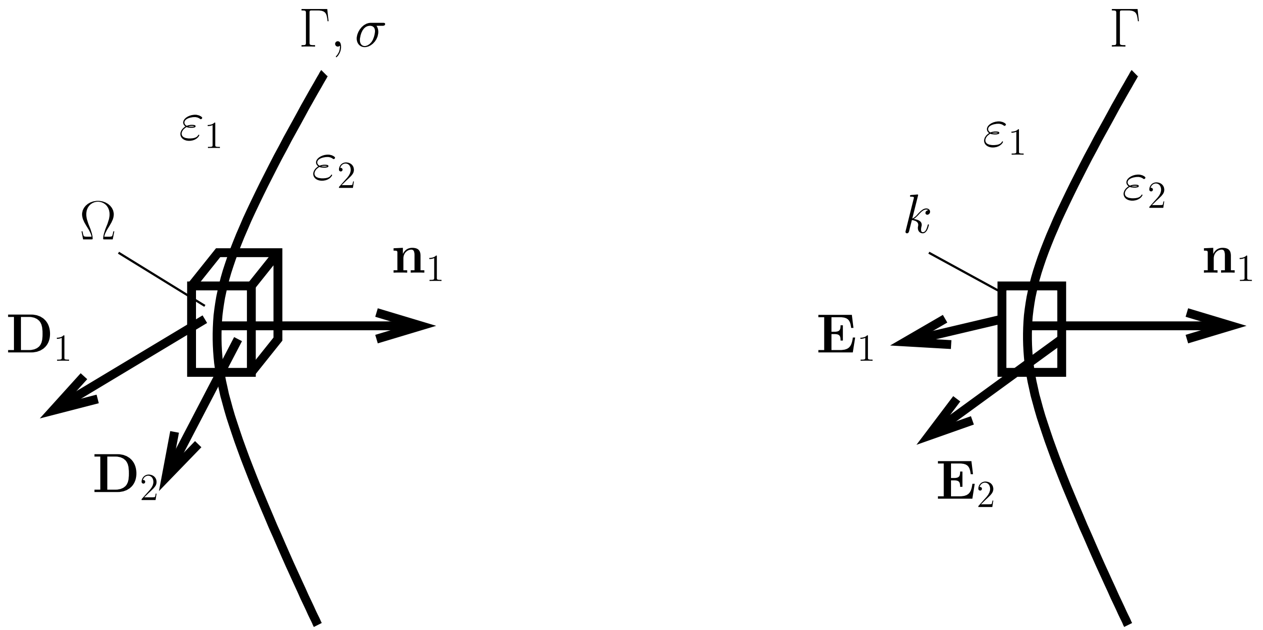
pro jakoukoliv uzavřenou křivku k.

Stokesova věta: $\oint_{\partial S} \mathbf{E}(\mathbf{x})\,\mathbf{dl}(\mathbf{x}) = \int_S \mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x})$ dává

$$\boxed{\mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.}$$

Elektrostatika

Podmínky na rozhraní



$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \int_\Omega \rho(\mathbf{x})\, dV(\mathbf{x}) \Rightarrow \boxed{(\mathbf{D}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{D}_2(\mathbf{x}))\cdot\mathbf{n}_1(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x}\in\Gamma.}$$

$$\oint_k \mathbf{E}(\mathbf{x})\, \mathbf{dl}(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \boxed{(\mathbf{E}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{E}_2(\mathbf{x}))\times\mathbf{n}_1(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pro } \mathbf{x}\in\Gamma.}$$

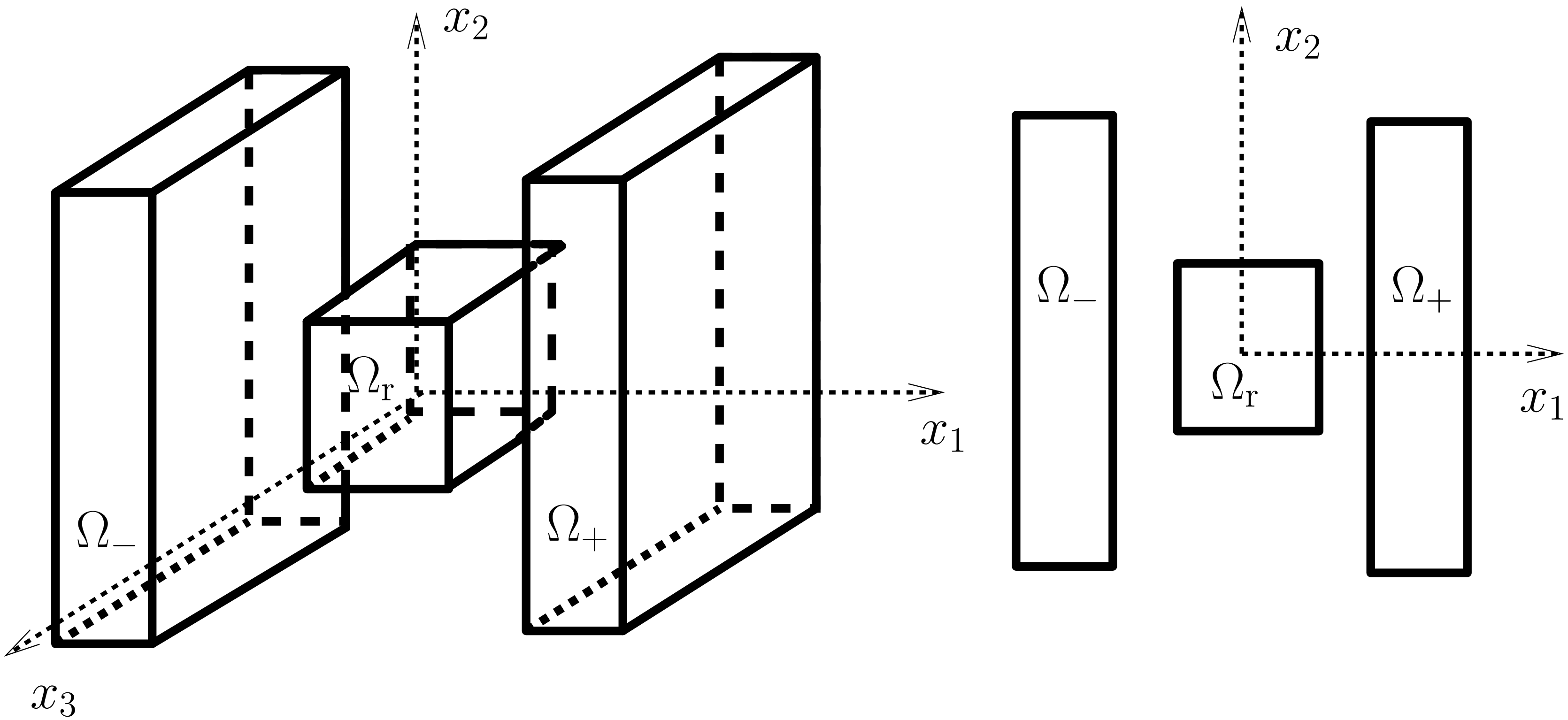
Matematické modelování elmg. polí — Elektrostatika

Osnova

- Elektrostatika
- Modelová úloha
- Variační formulace
- Metoda konečných prvků
- Hraniční integrální formulace
- Metoda hraničních prvků

Modelová úloha

3d geometrie, redukce do 2d



$\Omega_+ \ldots$ kladný potenciál U, $\Omega_- \ldots$ záporný potenciál $-U$, $\Omega_r \ldots$ dielektrikum ε_r

Modelová úloha

Matematický model

Hledáme $u_0 : \overline{\Omega_0} \to \mathbb{R}$ a $u_{\mathrm{r}} : \overline{\Omega_{\mathrm{r}}} \to \mathbb{R}$ tak, že

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\triangle u_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}) & = & 0 & \mathbf{x} \in \Omega_{\mathrm{r}}, \\ -\triangle u_0(\mathbf{x}) & = & 0 & \mathbf{x} \in \Omega_0 := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_{\mathrm{r}} \cup \Omega_+ \cup \Omega_-}, \\ \partial u_0(\mathbf{x})/\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \varepsilon_{\mathrm{r}} \partial u_{\mathrm{r}}(\mathbf{x})/\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}) & = & 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega_{\mathrm{r}}, \\ u_0(\mathbf{x}) - u_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}) & = & 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega_{\mathrm{r}}, \\ u_0(\mathbf{x}) & = & U & \mathbf{x} \in \partial\Omega_+, \\ u_0(\mathbf{x}) & = & -U & \mathbf{x} \in \partial\Omega_-, \\ u_0(\mathbf{x}) & \to & 0 & |\mathbf{x}| \to \infty, \end{array} \right.$$

kde $d := 3$, resp. $d := 2$, viz předchozí obrázek vlevo, resp. vpravo.

Matematické modelování elmg. polí — Elektrostatika

Osnova

- Elektrostatika
- Modelová úloha
- Variační formulace
- Metoda konečných prvků
- Hraniční integrální formulace
- Metoda hraničních prvků

Variační formulace

Ořezání výpočetní oblasti

Uvažujme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ pokrývající Ω_{r}, Ω_+ i Ω_- takovou, že $\Omega \cap \Omega_+ = \Omega \cap \Omega_- = \emptyset$, a nechť

$$u(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega \setminus (\partial\Omega_+ \cup \partial\Omega_-).$$

Neuvažujeme tedy nadále neomezenou oblast. Dopuštíme se tím chyby v modelování!

Zjednodušme zápis geometrie, konstanty ε_{r} a řešení takto:

$$\varepsilon(\mathbf{x}) := \begin{cases} \varepsilon_0\, \varepsilon_{\mathrm{r}}, & \mathbf{x} \in \Omega_{\mathrm{r}}, \\ \varepsilon_0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_{\mathrm{r}}}, \end{cases} \qquad u(\mathbf{x}) = \begin{cases} u_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_{\mathrm{r}}, \\ u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_0 := \Omega \setminus \overline{\Omega_{\mathrm{r}} \cup \Omega_+ \cup \Omega_-}. \end{cases}$$

Greenova věta

Pro spoj. dif. funkce $q, v : \overline{\omega} \to \mathbb{R}$ a pěkné $\omega \subset \mathbb{R}^d$ s vnější jedn. normálou $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ platí:

$$\int_\omega \frac{\partial q(\mathbf{x})}{\partial x_i}\, v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = -\int_\omega q(\mathbf{x})\, \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x_i}\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\omega} q(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\, n_i(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}).$$

Variační formulace

Odvození variační formulace

Vezměme diferencovatelnou funkci $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $v(\mathbf{x}) = 0$ pro $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Z první rovnice

$$\int_{\Omega_{\mathrm{r}}} -\varepsilon_0\, \varepsilon_{\mathrm{r}}\, \triangle u_{\mathrm{r}}(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$$

a aplikací Greenovy věty dostáváme

$$\int_{\Omega_{\mathrm{r}}} \varepsilon_0\, \varepsilon_{\mathrm{r}}\, \nabla u_{\mathrm{r}}(\mathbf{x})\, \nabla v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_{\mathrm{r}}} \varepsilon_0\, \varepsilon_{\mathrm{r}}\, \frac{\partial u_{\mathrm{r}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}\, v(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = 0.$$

Podobně přenásobíme v a ε_0 druhou rovnici, zintegrujeme ji a užijeme Greenovu větu

$$\int_{\Omega_0} \varepsilon_0\, \nabla u_0(\mathbf{x})\, \nabla v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_0} \varepsilon_0\, \frac{\partial u_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}\, v(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = 0.$$

Variační formulace

Odvození variační formulace (pokrač.)

Sečteme předchozí rovnice s vědomím, že normály k Ω_r a k Ω_0 na $\partial\Omega_\mathrm{r} \cap \partial\Omega_0$ jsou opačné

$$\int_\Omega \varepsilon(\mathbf{x})\, \nabla u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_0 \frac{\partial u_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} v(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) + \\ + \int_{\partial\Omega_\mathrm{r}} \varepsilon_0 \left(\frac{\partial u_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} - \varepsilon_\mathrm{r} \frac{\partial u_\mathrm{r}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \right) v(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = 0.$$

Použijeme $v = 0$ na $\partial\Omega$ a definice $\varepsilon(\mathbf{x})$ a $u(\mathbf{x})$ a dostáváme variační rovnici

$$\int_\Omega \varepsilon(\mathbf{x})\, \nabla u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Zbývá určit množinu, v níž budeme hledat řešení u a množinu testovacích funkcí v.

Variační formulace

Sobolevův prostor

Má-li mít variační rovnice smysl, pak

- integrály $\int_\Omega |\nabla w(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}$ musí mít smysl a být konečné,
- platí rovnost $v(\mathbf{x}) = 0$ pro $\mathbf{x} \in \partial\Omega$
- a $u(\mathbf{x})$ vyhovuje předepsaným okrajovým podmínkám pro $\mathbf{x} \in \partial\Omega_-$ a $\mathbf{x} \in \partial\Omega_+$.

Z teorie variačních metod prvnímu požadavku vyhovuje Sobolevův prostor

$$V := H^1(\Omega) := \{v(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega) \; : \; \nabla v(\mathbf{x}) \in [L^2(\Omega)]^d\},$$

kde funkce z $L^2(\Omega)$ splňují $\int_\Omega v^2 < \infty$ a ∇ je zobecněný gradient.

Pro námi uvažovanou Ω lze V definovat také následujícím zúplněním

$$H^1(\Omega) := \overline{C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)}^{\|.\|_1}, \quad \|v\|_1 := \int_\Omega v(\mathbf{x})^2 + |\nabla v(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x},$$

tedy $H^1(\Omega)$ obsahuje funkce z $C^\infty(\overline{\Omega})$, ale i všechny jejich cauchyovské posloupnosti.

Variační formulace

Prostor testovacích funkcí

V prostoru $H^1(\Omega)$ již nemá smysl vyžadovat splnění $v(\mathbf{x}) = 0$ bodově na $\partial\Omega$. Testovací funkce v budeme vybírat ze Sobolevova prostoru

$$V_0 := H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_1},$$

kde $v \in C_0^\infty(\Omega)$, právě když $v \in C^\infty(\Omega)$ a $\operatorname{supp} v := \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega : \ v(\mathbf{x}) \neq 0\}} \subset \Omega$.

Množina řešení

Řešení u hledáme v množině $V_U := \overline{C_U^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_1}$, kde

$$\begin{aligned} C_U^\infty(\Omega) := \{v \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} v \subset \Omega \cup \overline{\Omega_+} \cup \overline{\Omega_-}, \\ v(\mathbf{x}) = U \text{ na } \partial\Omega_+ \text{ a } v(\mathbf{x}) = -U \text{ na } \partial\Omega_-\}. \end{aligned}$$

Variační formulace

Variační formulace

Hledáme $u \in V_U$ tak, že

$$\int_\Omega \varepsilon(\mathbf{x})\, \nabla u(\mathbf{x})\, \nabla v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall v \in V_0.$$

Pro tuto úlohu lze dokázat existenci jednoznačného řešení a jeho spojitou závislost na změnách geometrie Ω i materiálové funkce ε.

Energetická formulace

K variační formulaci lze dojít i z principu minima elektrostatické energie

$$\varphi(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega \varepsilon(\mathbf{x})\, |\nabla v(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}.$$

Minimum φ nastane ve stacionárním bodě $u \in V_U$, tj.

$$\varphi'(u, v) := \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = \int_\Omega \varepsilon(\mathbf{x})\, \nabla u(\mathbf{x})\, \nabla v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall v \in V_0.$$

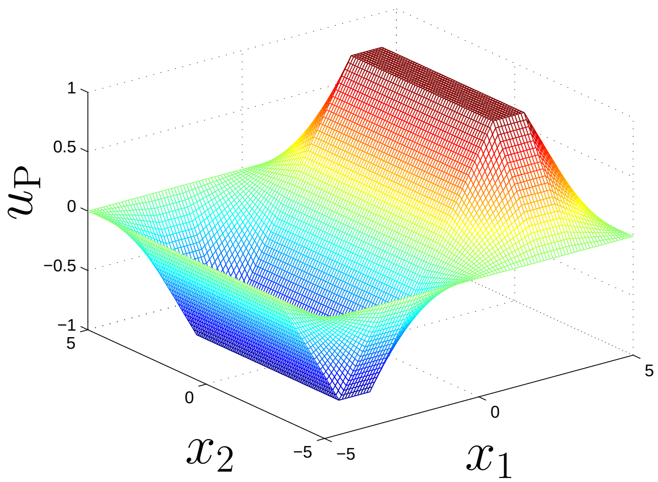
Variační formulace

Nehomogenní Dirichletova okr. podmínka: metoda partikulárního řešení

Je nepraktické, že $V_U \neq V_0$. Řešení rozložíme $u := u_\mathrm{H} + u_\mathrm{P}$, kde $u_\mathrm{H} \in V_0$ a $u_\mathrm{P} \in V_U$.
Pak řešíme úlohu: najdi $u_\mathrm{H} \in V_0$ tak, že

$$\int_\Omega \varepsilon(\mathbf{x})\, \nabla u_\mathrm{H}(\mathbf{x})\, \nabla v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = -\int_\Omega \varepsilon(\mathbf{x})\, \nabla u_\mathrm{P}(\mathbf{x})\, \nabla v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \quad \forall v \in V_0.$$

u_P závisí na geometrii, naštěstí se po diskretizaci ukáže, že u^P nepotřebujeme.



Variační formulace

Nehomogenní Dirichletova okr. podmínka: metoda penalizace

V inženýrské komunitě je oblíben tento přístup: hledáme $u_\rho \in V$ tak, že $\forall v \in V$

$$\int_\Omega \varepsilon(\mathbf{x})\, \nabla u_\rho(\mathbf{x})\, \nabla v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \rho \int_{\partial\Omega_+} u_\rho(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\, dl(\mathbf{x}) + \rho \int_{\partial\Omega_-} u_\rho(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\, dl(\mathbf{x}) +$$
$$+ \rho \int_\Gamma u_\rho(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\, dl(\mathbf{x}) = \rho \int_{\partial\Omega_+} U\, v(\mathbf{x})\, dl(\mathbf{x}) - \rho \int_{\partial\Omega_-} U\, v(\mathbf{x})\, dl(\mathbf{x}),$$

kde $\Gamma := \partial\Omega \setminus \overline{\partial\Omega_+ \cup \partial\Omega_-}$, $\rho \gg 0$ je penalizační parametr.

Platí, že

$$\|u_\rho - u\|_1 \to 0 \quad \text{pro } \rho \to \infty.$$

Variační formulace

Nehomogenní Dirichletova okr. podmínka: smíšená formulace

Matematicky přímočarý přístup je hledání vázaného extrému φ vzhledem k omezením $u(\mathbf{x}) = U$ na $\partial\Omega_+$, $u(\mathbf{x}) = -U$ na $\partial\Omega_-$ a $u(\mathbf{x}) = 0$ na Γ. Vázaný extrém nastane ve stacionárním bodě lagrangeovského funkcionálu

$$L(u; \lambda_+, \lambda_-) := \varphi(u) + \int_{\partial\Omega_+} \lambda_+(\mathbf{x})(u(\mathbf{x}) - U)\, dl(\mathbf{x}) + \\ + \int_{\partial\Omega_-} \lambda_-(\mathbf{x})(u(\mathbf{x}) + U)\, dl(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \lambda(\mathbf{x}) u(\mathbf{x})\, dl(\mathbf{x})$$

Variační formulace

Nehomogenní Dirichletova okr. podmínka: smíšená formulace

Řešíme úlohu: hledáme $(u;\lambda_+,\lambda_-,\lambda)\in V\times L^2(\partial\Omega_+)\times L^2(\partial\Omega_-)\times L^2(\Gamma)$ tak, že

$$\left\{\begin{aligned}
\int_\Omega \varepsilon\,\nabla u\,\nabla v\,d\mathbf{x}+\int_{\partial\Omega_+}\lambda_+\,v\,dl(\mathbf{x})+\int_{\partial\Omega_-}\lambda_-\,v\,dl(\mathbf{x})+\int_\Gamma\lambda\,v\,dl(\mathbf{x})&=0\quad\forall v\in V,\\
\int_{\partial\Omega_+}u\,q_+\,dl(\mathbf{x})&=U\int_{\partial\Omega_+}q_+\,dl(\mathbf{x})\quad\forall q_+\in L^2(\partial\Omega_+),\\
\int_{\partial\Omega_-}u\,q_-\,dl(\mathbf{x})&=-U\int_{\partial\Omega_-}q_-\,dl(\mathbf{x})\quad\forall q_-\in L^2(\partial\Omega_-),\\
\int_\Gamma u\,q\,dl(\mathbf{x})&=0\quad\forall q\in L^2(\Gamma).
\end{aligned}\right.$$

Řešení u je jednoznačné a spojitě závisí na datech, tj. $\partial\Omega$, $\partial\Omega_+$, $\partial\Omega_-$, ε a U. Lagrangeovské multiplikátory λ_+, λ_- a λ jsou nejednoznačné.

Matematické modelování elmg. polí — Elektrostatika

Osnova

- Elektrostatika
- Modelová úloha
- Variační formulace
- Metoda konečných prvků
- Hraniční integrální formulace
- Metoda hraničních prvků

Metoda konečných prvků

Galerkinova metoda = projekce na podprostor

Metoda partikulárního řešení i penalizace vedou na následující abstraktní úlohu. Mějme Hilbertův prostor V, jeho duál V^*, spojitý lineární operátor $A \in \mathcal{L}(V, V^*)$, který je symetrický a eliptický, spojitý lin. funkcionál $b \in V^*$, hledáme $u \in V$:

$$A(u) = b, \ \text{t.j. } \forall v \in V: \ \langle A(u), v \rangle = \langle b, v \rangle.$$

Dle Rieszovy věty je úloha jednoznačně řešitelná a řešení je stabilní $\|u\|_V = \|b\|_{V^*}$. Uvažujme dále podprostor $V^h \subset V$ a hledejme Galerkinovu aproximaci $u^h \in V^h$:

$$\forall v^h \in V^h: \ \langle A(u^h), v^h \rangle = \langle b, v^h \rangle.$$

Tato úloha je také jednoznačně řešitelná a $\|u^h\|_V \leq \|b\|_{V^*}$. Odečtením rovnic zjistíme, že Galerkinova aproximace u^h je A–ortogonální projekcí řešení u

$$\forall v^h \in V^h: \quad \langle A(u - u^h), v^h \rangle = 0, \quad \text{t.j. } u^h = P_A(u).$$

Metoda konečných prvků spočívá ve specifické volbě konečně–dimenzionálního podprostoru V^h.

Metoda konečných prvků

Galerkinova metoda = projekce na podprostor

Uvažujme Galerkinovu aproximaci na konečně–dimenzionálním podprostoru $V^h \subset V$

$$\forall v^h \in V^h : \ \langle A(u^h), v^h \rangle = \langle b, v^h \rangle.$$

Mějme bázi generující $V^h = \langle e_1^h, \ldots, e_n^h \rangle$ a hledejme souřadnice $\mathbf{u} := (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, přičemž $u^h = \sum_{j=1}^n u_j \, e_j^h$. Dosadíme-li za v^h postupně všechny bázové funkce, dostáváme díky linearitě A následující soustavu lineárních rovnic

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad \text{kde } (\mathbf{A})_{ij} := \langle A(e_j^h), e_i^h \rangle \text{ a } (\mathbf{b})_i := \langle b, e_i^h \rangle.$$

Jelikož je libovolné $v^h \in V^h$ lineární kombinací bázových funkcí, stejnou lineární kombinací řádků soustavy dostaneme původní rovnici.

Galerkinova aproximace na konečně–dimenzionálním podprostoru je tedy soustava lineárních rovnic.

Metoda konečných prvků

Odhad chyby Galerkinovy aproximace: Céaovo lemma

$$\|u - u^h\|_V \le C \inf_{v^h \in V^h} \|u - v^h\| =: C \operatorname{dist}(u, V^h)$$

Důkaz. Pro libovolné $v^h \in V^h$:

$$\begin{aligned}
\|u - u^h\|_V^2 &\overset{A \text{ elip.}}{\le} \frac{1}{C_A} \langle A(u - u^h), u - u^h \rangle \\
&= \frac{1}{C_A} \langle A(u - u^h), u \rangle - \underbrace{\langle A(u - u^h), u^h \rangle}_{=0, \text{ viz } P_A} - \underbrace{\langle A(u - u^h), v^h \rangle}_{=0, \text{ viz } P_A} \\
&\overset{A \text{ spoj.}}{\le} \frac{c_A}{C_A} \|u - u^h\|_V \, \|u - v^h\|_V
\end{aligned}$$

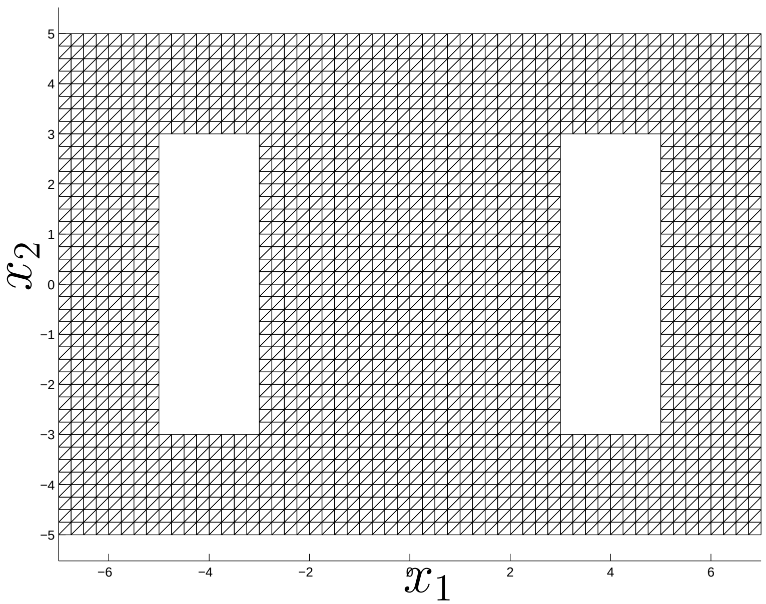
$\square$

Metoda konečných prvků

Diskretizace oblasti

Nechť $d := 2$. Diskretizujme Ω do m trojúhelníků tak, že sousedé mají společnou hranu nebo bod, hrany zachytí hranice podoblastí a nejostřejší úhel je zdola omezený

$$\overline{\Omega} = \cup_{k=1}^{m} \overline{T^k}, \quad T^i \cap T^j = \emptyset \text{ pro } i \neq j,$$



Metoda konečných prvků

MKP báze

Nad každým uzlem diskretizace $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ definujeme konečně–prvkovou bázovou funkcí $e_i^h(\mathbf{x}) : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ tak, že

$$\forall i \; \forall k \; : \; e_i^h(\mathbf{x})|_{T^k} = a_i^k + b_i^k x_1 + c_i^k x_2 \quad \text{a} \quad e_i^h(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

kde $a_i^k, b_i^k, c_i^k \in \mathbb{R}$. Takto získáváme aproximaci $V^h := \langle e_1^h(\mathbf{x}), \ldots, e_n^h(\mathbf{x}) \rangle$ prostoru V.

MKP aproximace penalizované formulace

MKP aproximace penalizované formulace je následující: hledáme $u_\rho^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} u_j \, e_j^h(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{A}_\rho \cdot \mathbf{u}_\rho = \mathbf{b}_\rho, \quad \text{kde } (\mathbf{A}_\rho)_{ij} := a_\rho(e_j^h, e_i^h), \; (\mathbf{b}_\rho)_i := b_\rho(e_i^h),$$

kde $a_\rho(u_\rho, v)$, resp. $b_\rho(v)$, je bilineární, resp. lineární, forma na levé, resp. pravé, straně penalizované variační rovnice.

Metoda konečných prvků

MKP aproximace metody partikulárního řešení

Mějme partikulární řešení $u_\mathrm{P} \in V_U$ a hledejme homogenní řešení $u_\mathrm{H}^h \in V_0^h$

$$a(u_\mathrm{H}^h, v^h) := \int_\Omega \varepsilon \,\nabla u_\mathrm{H}^h \,\nabla v^h = -\int_\Omega \varepsilon \,\nabla u_\mathrm{P} \,\nabla v^h \quad \forall v^h \in V_0^h,$$

kde $V_0^h \subset V^h$ jsou konečně–prvkové funkce nabývající nuly na $\partial\Omega$. Uspořádejme uzly diskretizace tak, že $V_0^h := \langle e_1^h, \ldots, e_p^h \rangle \subset \langle e_1^h, \ldots, e_p^h, \ldots, e_n^h \rangle =: V^h$, a nechť $u_\mathrm{P} \in V^h$.

$$\text{Hledáme } \mathbf{u}_\mathrm{H} \in \mathbb{R}^p : \quad \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{u}_\mathrm{H} = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_\mathrm{P}, \quad \mathbf{u} := (\mathbf{u}_\mathrm{H}, \mathbf{0}) + \mathbf{u}_\mathrm{P} \in \mathbb{R}^n,$$

kde $\mathbf{A}_0 \in \mathbb{R}^{p\times p}$ a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ jsou diskretizace bilineární formy $a(.,.)$ na prostorech $V_0^h \times V_0^h$, resp. $V_0^h \times V^h$ vzhledem k zmíněným uzlovým bázím.
Konstrukce $\mathbf{u}_\mathrm{P}$ závisí na geometrii Ω. Ve skutečnosti nás zajímá $\mathbf{u}$, které závisí pouze na hraniční části $\mathbf{u}_{\mathrm{P},\Gamma} := ((\mathbf{u}_\mathrm{P})_{p+1}, \ldots, (\mathbf{u}_\mathrm{P})_n) \in \mathbb{R}^{n-p}$, kde $(\mathbf{u}_{\mathrm{P},\Gamma})_i \in \{0, -U, U\}$.

$$\text{Hledáme } \widetilde{\mathbf{u}}_\mathrm{H} \in \mathbb{R}^p : \quad \mathbf{A}_0 \cdot \widetilde{\mathbf{u}}_\mathrm{H} = -\mathbf{A}_{0,\Gamma} \cdot \mathbf{u}_{\mathrm{P},\Gamma}, \quad \mathbf{u} := (\widetilde{\mathbf{u}}_\mathrm{H}, \mathbf{u}_{\mathrm{P},\Gamma}) \in \mathbb{R}^n,$$

kde $\mathbf{A}_{0,\Gamma} \in \mathbb{R}^{p\times(n-p)}$ je diskretizace $a(.,.)$ na $\langle e_1^h, \ldots, e_p^h \rangle \times \langle e_{p+1}^h, \ldots, e_n^h \rangle$.

Metoda konečných prvků

MKP aproximace smíšené formulace

Nechť diskretizace pokrývá hranice úsečkami S^k takto: $\bigcup_{k=1}^{m_+} \overline{S_+^k} = \partial\Omega_+$, $\bigcup_{k=1}^{m_-} \overline{S_-^k} = \partial\Omega_-$ a $\bigcup_{k=1}^{m} \overline{S^k} = \Gamma$, a nechť $Q_+^h := \langle f_+^1, \ldots, f_+^{m_+} \rangle \subset L^2(\partial\Omega_+)$, $Q_-^h := \langle f_-^1, \ldots, f_-^{m_-} \rangle \subset L^2(\partial\Omega_-)$ a $Q^h := \langle f^1, \ldots, f^m \rangle \subset L^2(\Gamma)$, kde

$$f_+^i(\mathbf{x})|_{S_+^j} = \delta_{ij} \text{ pro } i,j = 1,\ldots,m_+, \quad f_-^i(\mathbf{x})|_{S_-^j} = \delta_{ij} \text{ pro } i,j = 1,\ldots,m_- \text{ a}$$
$$f^i(\mathbf{x})|_{S^j} = \delta_{ij} \text{ pro } i,j = 1,\ldots,m.$$

MKP aproximace smíšené formulace vede na sedlo–bodovou soustavu lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_+^T & \mathbf{B}_-^T & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}_+ & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_- & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda}_+ \\ \boldsymbol{\lambda}_- \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_+ \\ \mathbf{c}_- \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{u} := (u_1, \ldots, u_n)$, $u^h(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^n u_j\, e_j^h(\mathbf{x})$, $(\mathbf{A})_{ij} := \int_\Omega \varepsilon\, \nabla e_j^h\, \nabla e_i^h$, $(\mathbf{B}_+)_{ij} := \int_{S_+^i} e_j^h$, $(\mathbf{B}_-)_{ij} := \int_{S_-^i} e_j^h$, $(\mathbf{B})_{ij} := \int_{S^i} e_j^h$, $(\mathbf{c}_+)_i := U|S_+^i|$ a $(\mathbf{c}_-)_i := -U|S_-^i|$.

Metoda konečných prvků

Sestavení MKP matic a vektorů

Iterujeme přes trojúhelníky a sčítáme lokální matice a vektory pravých stran, tj. např.

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{G}^k(\mathbf{A}^k), \quad \mathbf{B}_+ = \sum_{k=1}^{m_+} \mathcal{G}_+^k(\mathbf{B}_+^k), \quad \mathbf{c}_+ = \sum_{k=1}^{m_+} \mathcal{H}_+^k(c_+^k),$$

kde $\mathbf{A}^k \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\mathbf{B}_+^k \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, $c_+^k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{G}^k : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathcal{G}_+^k : \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}^{m_+\times n}$, zobrazují lokální matice na globální, $\mathcal{H}_+^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m_+}$ zobrazuje lokální vektory na globální. Na každém trojúhelníku (prvku) T^k zavedeme afinní substituci

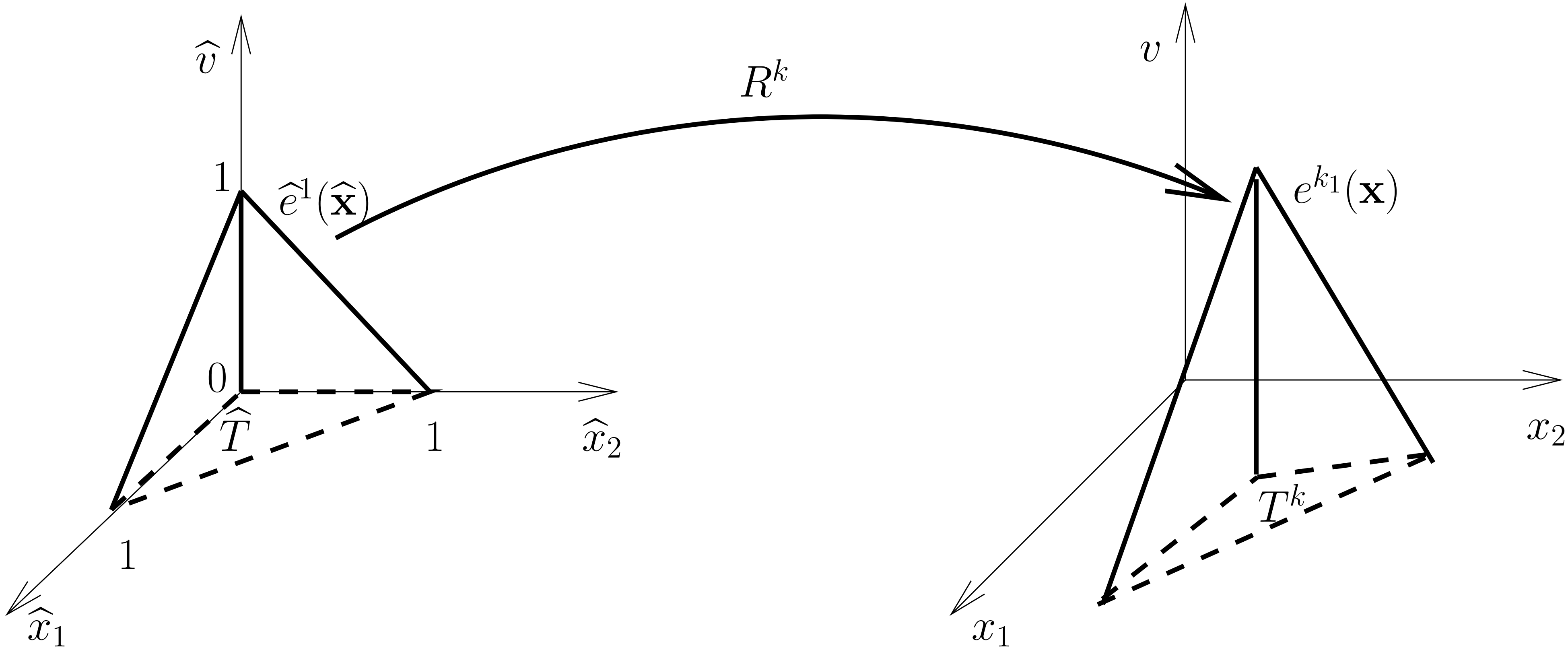
$$\mathbf{x} := R^k(\widehat{\mathbf{x}}) := \mathbf{R}^k \cdot \widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^{k_1}, \quad \text{kde } \mathbf{R}^k := \left(\mathbf{x}^{k_2} - \mathbf{x}^{k_1}, \mathbf{x}^{k_3} - \mathbf{x}^{k_1}\right),$$

zobrazující referenční trojúhelník $\widehat{T}$ s vrcholy $(0,0)$, $(1,0)$ a $(0,1)$ na T^k s $\mathbf{x}^{k_1}$, $\mathbf{x}^{k_2}$ a $\mathbf{x}^{k_3}$. Zaveďme ref. bázi $\widehat{e}^1(\widehat{\mathbf{x}}) := 1 - \widehat{x}_1 - \widehat{x}_2$, $\widehat{e}^2(\widehat{\mathbf{x}}) := \widehat{x}_1$, $\widehat{e}^3(\widehat{\mathbf{x}}) := \widehat{x}_2$, přičemž $\widehat{e}^i(\widehat{\mathbf{x}}) = e^{k_i}(R^k(\widehat{\mathbf{x}}))$ pro $i = 1,2,3$ a $\widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{T}$. Pak např.

$$\mathbf{A}^k := \varepsilon^k \left(\mathbf{B}_\nabla^k\right)^T \cdot \mathbf{B}_\nabla^k \frac{|\det(\mathbf{R}^k)|}{2}, \quad \varepsilon^k := \varepsilon(\mathbf{x})|_{T^k}, \quad \mathbf{B}_\nabla^k := \left(\mathbf{R}^k\right)^{-T} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Metoda konečných prvků

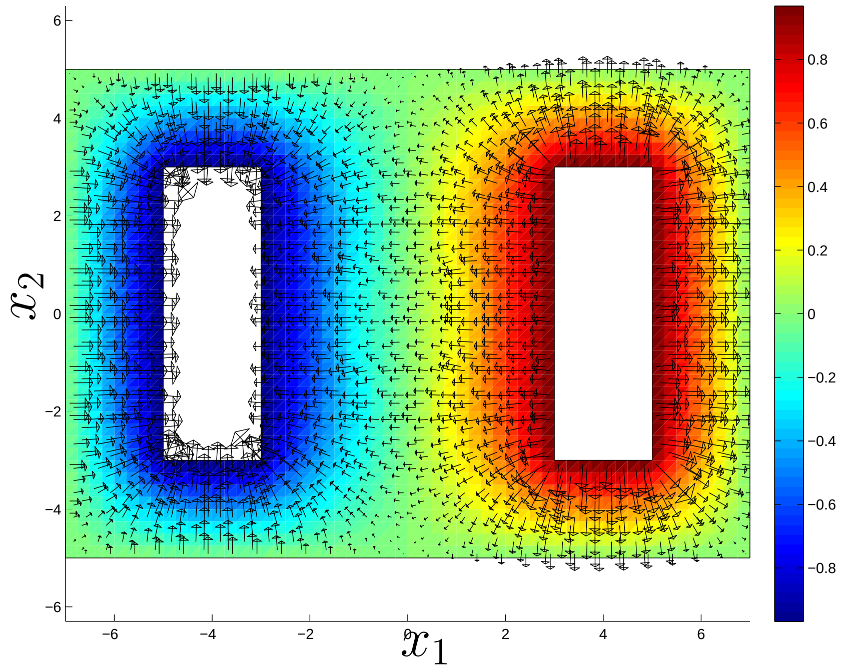
Transformace referenčních bázových funkcí



Metoda konečných prvků

Numerické řešení u a $\mathbf{E} := -\nabla u$ smíšené formulace

Volba $\varepsilon_{\mathrm{r}} := 2$, $U := 1$, $\Omega := (-7,7) \times (-5,5)$, $\Omega_{-} := (-5,-3) \times (-3,3)$, $\Omega_{+} := (3,5) \times (-3,3)$, $\Omega_{\mathrm{r}} := (-1,1)^2$, s diskretizačním parametrem $h := 0.25$ vede na $n := 2015$, $m_{+} := m_{-} := 64$, $m := 192$.



Matematické modelování elmg. polí — Elektrostatika

Osnova

- Elektrostatika
- Modelová úloha
- Variační formulace
- Metoda konečných prvků
- Hraniční integrální formulace
- Metoda hraničních prvků

Hraniční integrální formulace

Metoda potenciálů

Uvažujme $d := 2$ a přeškálujme geometrii tak, že $\operatorname{diam}(\Omega_\mathrm{r} \cup \Omega_- \cup \Omega_+) < 1$. Hledáme řešení pomocí poteciálů jednoduché vrstvy

$$u_\mathrm{r}(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_\mathrm{r}} w_\mathrm{r}(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}),\ \mathbf{x} \in \Omega_r,$$

$$u_0(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_\mathrm{r}} w_0(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma_+} w_+(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma_-} w_-(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}),\ \mathbf{x} \in \Omega_0,$$

kde $\Omega_0 := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_\mathrm{r} \cup \Omega_+ \cup \Omega_-}$, $\Gamma_\mathrm{r} := \partial\Omega_\mathrm{r}$, $\Gamma_+ := \partial\Omega_+$, $\Gamma_- := \partial\Omega_-$, $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) := -\frac{1}{2\pi}\ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ je fundamentální řešení Laplaceovy rovnice a kde $w_\mathrm{r}, w_0 : \Gamma_\mathrm{r} \to \mathbb{R}$, $w_+ : \Gamma_+ \to \mathbb{R}$ a $w_- : \Gamma_- \to \mathbb{R}$ jsou neznámé hustoty potenciálů. Řešení splňuje

$$-\triangle u_\mathrm{r}(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in \Omega_\mathrm{r}, \quad -\triangle u_0(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in \Omega_0 \quad \text{a} \quad u_0(\mathbf{x}) \to C,\ |\mathbf{x}| \to \infty,$$

kde $C = 0$ díky symetrii úlohy. Zbývá splnit podmínky přechodu a okrajové podmínky.

Hraniční integrální formulace

Vlastnosti potenciálu jednoduché vrstvy

Pro po částech spojité w_r je $\int_{\Gamma_\mathrm{r}} w_\mathrm{r}(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y})$ harmonická funkce v Ω_r a v $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_\mathrm{r}}$. Pro $\mathbf{x} \in \Gamma_\mathrm{r}$ bod spojitosti w_r, v jehož okolí je Γ hladká, platí, že pro $\Omega_\mathrm{r} \ni \widetilde{\mathbf{x}} \to \mathbf{x} \in \Gamma_\mathrm{r}$:

$$\int_{\Gamma_\mathrm{r}} w_\mathrm{r}(\mathbf{y})\, g(\widetilde{\mathbf{x}},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}) \to \int_{\Gamma_\mathrm{r}} w_\mathrm{r}(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}),$$

$$\mathbf{n}_\mathrm{r}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\widetilde{\mathbf{x}}} \int_{\Gamma_\mathrm{r}} w_\mathrm{r}(\mathbf{y})\, g(\widetilde{\mathbf{x}},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}) \to \frac{1}{2} w_\mathrm{r}(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_\mathrm{r}} w_\mathrm{r}(\mathbf{y})\, \frac{\partial g(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}\, dl(\mathbf{y}).$$

přičemž $\partial/\partial\mathbf{n}(\mathbf{x})$ je derivace podle vnější jednotkové normály k Ω_r. Podobně platí pro spojité w_0 a $\Omega_0 \ni \widetilde{\mathbf{x}} \to \mathbf{x} \in \Gamma_\mathrm{r}$:

$$\int_{\Gamma_\mathrm{r}} w_0(\mathbf{y})\, g(\widetilde{\mathbf{x}},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}) \to \int_{\Gamma_\mathrm{r}} w_0(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}),$$

$$\mathbf{n}_\mathrm{r}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\widetilde{\mathbf{x}}} \int_{\Gamma_\mathrm{r}} w_0(\mathbf{y})\, g(\widetilde{\mathbf{x}},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}) \to -\frac{1}{2} w_0(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_\mathrm{r}} w_0(\mathbf{y})\, \frac{\partial g(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}\, dl(\mathbf{y}).$$

Hraniční integrální formulace

Formulace úlohy

Pro $\mathbf{x} \in \Gamma_{\mathrm{r}} \cup \Gamma_{+} \cup \Gamma_{-}$ (až na příslušné rohy)zaveďme:

$$[V_{\mathrm{r}} w](\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_{\mathrm{r}}} w(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}),\ \ [K_{\mathrm{r}} w](\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_{\mathrm{r}}} w(\mathbf{y})\, \frac{\partial g(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}\, dl(\mathbf{y}),$$

$$[V_{+} w_{+}](\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_{+}} w_{+}(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}),\ \ [K_{+} w_{+}](\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_{+}} w_{+}(\mathbf{y})\, \frac{\partial g(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}\, dl(\mathbf{y}),$$

$$[V_{-} w_{-}](\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_{-}} w_{-}(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}),\ \ [K_{-} w_{-}](\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_{-}} w_{-}(\mathbf{y})\, \frac{\partial g(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}\, dl(\mathbf{y}).$$

Pak podmínky přechodu a okrajové podmínky dávají hraniční integrální formulaci

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcll}
-\varepsilon_{\mathrm{r}}(\frac{1}{2}I + K_{\mathrm{r}})\, w_{\mathrm{r}} & + & (-\frac{1}{2}I + K_{\mathrm{r}})\, w_0 & + & K_{+}\, w_{+} & + & K_{-}\, w_{-} & = & 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathrm{r}}, \\
-V_{\mathrm{r}} w_{\mathrm{r}} & + & V_{\mathrm{r}} w_0 & + & V_{+} w_{+} & + & V_{-} w_{-} & = & 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathrm{r}}, \\
 & & V_{\mathrm{r}} w_0 & + & V_{+} w_{+} & + & V_{-} w_{-} & = & U, & \mathbf{x} \in \Gamma_{+}, \\
 & & V_{\mathrm{r}} w_0 & + & V_{+} w_{+} & + & V_{-} w_{-} & = & -U, & \mathbf{x} \in \Gamma_{-},
\end{array} \right.$$

kde I značí identické zobrazení.

Matematické modelování elmg. polí — Elektrostatika

Osnova

- Elektrostatika
- Modelová úloha
- Variační formulace
- Metoda konečných prvků
- Hraniční integrální formulace
- Metoda hraničních prvků

Metoda hraničních prvků

Diskretizace hranic

Diskretizujme Γ_r, Γ_+ a Γ_- do disjunktních úseček

$$\cup_{k=1}^{m_\mathrm{r}} \overline{S_\mathrm{r}^k} = \Gamma_\mathrm{r}, \quad \cup_{k=1}^{m_+} \overline{S_+^k} = \Gamma_+, \quad \cup_{k=1}^{m_-} \overline{S_-^k} = \Gamma_-$$

a uvažujme po úsečkách konstantní bázové funkce f_r^i, f_+^i a f_-^i tak, že

$$f_\mathrm{r}^i(\mathbf{x})|_{S_\mathrm{r}^j} = \delta_{ij} \text{ pro } i,j = 1,\dots,m_\mathrm{r}, \;\; f_+^i(\mathbf{x})|_{S_+^j} = \delta_{ij} \text{ pro } i,j = 1,\dots,m_+$$
$$\text{a } f_-^i(\mathbf{x})|_{S_-^j} = \delta_{ij} \text{ pro } i,j = 1,\dots,m_-.$$

Hledáme souřadnice neznámých hustot $\mathbf{w}_\mathrm{r}, \mathbf{w}_0 \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{w}_+ \in \mathbb{R}^{m_+}$, $\mathbf{w}_- \in \mathbb{R}^{m_-}$

$$w_\mathrm{r}(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{m_\mathrm{r}} w_{\mathrm{r}k}\, f_\mathrm{r}^i(\mathbf{x}), \quad w_0(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{m_\mathrm{r}} w_{0k}\, f_\mathrm{r}^i(\mathbf{x}),$$
$$w_+(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{m_+} w_{+k}\, f_+^i(\mathbf{x}), \quad w_-(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{m_-} w_{-k}\, f_-^i(\mathbf{x}).$$

Metoda hraničních prvků

Kolokační metoda

Rovnice splníme pouze ve středech úseček $\mathbf{x}_{\mathrm{r}}^k \in S_{\mathrm{r}}^k$, $\mathbf{x}_+^k \in S_+^k$, $\mathbf{x}_-^k \in S_-^k$

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon_{\mathrm{r}}(\frac{1}{2}\mathbf{I}_{\mathrm{r}} + \mathbf{K}_{\mathrm{r,r}}) & -\frac{1}{2}\mathbf{I}_{\mathrm{r}} + \mathbf{K}_{\mathrm{r,r}} & \mathbf{K}_{\mathrm{r},+} & \mathbf{K}_{\mathrm{r},-} \\ -\mathbf{V}_{\mathrm{r,r}} & \mathbf{V}_{\mathrm{r,r}} & \mathbf{V}_{\mathrm{r},+} & \mathbf{V}_{\mathrm{r},-} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{+,\mathrm{r}} & \mathbf{V}_{+,+} & \mathbf{V}_{+,-} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{-,\mathrm{r}} & \mathbf{V}_{-,+} & \mathbf{V}_{-,-} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{\mathrm{r}} \\ \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{w}_+ \\ \mathbf{w}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{U}_+ \\ -\mathbf{U}_- \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{I}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}^{m_{\mathrm{r}} \times m_{\mathrm{r}}}$ je jednotková matice a kde pro $p, q \in \{\mathrm{r}, +, -\}$ definujeme vektory pravé strany $\mathbf{U}_p := (U, \ldots, U) \in \mathbb{R}^{m_p}$ a prvky matic $\mathbf{V}_{p,q}, \mathbf{K}_{p,q} \in \mathbb{R}^{m_p \times m_q}$ následovně:

$$(\mathbf{V}_{p,q})_{ij} := \int_{S_q^j} g(\mathbf{x}_p^i, \mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}), \quad (\mathbf{K}_{p,q})_{ij} := \int_{S_q^j} \nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}_p^i, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_p^i\, dl(\mathbf{y}),$$

kde $\mathbf{n}_{\mathrm{r}}^i$, $\mathbf{n}_+^i$ a $\mathbf{n}_-^i$ jsou jednotkové normály k S_{r}^i, S_+^i a S_-^i směřující ven z Ω_{r}, Ω_+, Ω_-.

Metoda hraničních prvků

Výpočet prvků matic $\mathbf{V}_{p,q}$

$$\int_{S_q^j} \ln \left|\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}\right| \, dl(\mathbf{y}) = \left|\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j\right| \left(\ln \left|\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j\right| - \ln 2 - 1\right) \text{ pro } S_p^i = S_q^j,$$

$$\int_{S_q^j} \ln \left|\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}\right| \, dl(\mathbf{y}) = \frac{1}{\left|\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j\right|} \left(\left[\mathbf{x}_p^i \times \left(\mathbf{a}_q^j - \mathbf{b}_q^j\right) + \mathbf{a}_q^j \times \mathbf{b}_q^j\right] A_{pq}^{ij} + \right.$$
$$\left. + \left(\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j\right) \cdot \left[\left(\mathbf{x}_p^i - \mathbf{a}_q^j\right) \ln \left|\mathbf{x}_p^i - \mathbf{a}_q^j\right| - \left(\mathbf{x}_p^i - \mathbf{b}_q^j\right) \ln \left|\mathbf{x}_p^i - \mathbf{b}_q^j\right|\right]\right)$$
$$\text{pro } S_p^i \neq S_q^j,$$

kde uvažujeme parametrizaci $S_q^j : \mathbf{y}(t) := \mathbf{a}_q^j + t\left(\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j\right)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, kde

$$A_{pq}^{ij} := \operatorname{arctg} \frac{(\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j) \cdot (\mathbf{x}_p^i - \mathbf{a}_q^j)}{\mathbf{a}_q^j \times (\mathbf{b}_q^j - \mathbf{x}_p^i) + \mathbf{b}_q^j \times \mathbf{x}_p^i} - \operatorname{arctg} \frac{(\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j) \cdot (\mathbf{x}_p^i - \mathbf{b}_q^j)}{\mathbf{a}_q^j \times (\mathbf{b}_q^j - \mathbf{x}_p^i) + \mathbf{b}_q^j \times \mathbf{x}_p^i}$$

a kde pro $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ definujeme součiny $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u_1 v_1 + u_2 v_2$ a $\mathbf{u} \times \mathbf{v} := u_1 v_2 - u_2 v_1$.

Metoda hraničních prvků

Výpočet prvků matic $\mathbf{K}_{p,q}$

$$\int_{S_q^j} \nabla_{\mathbf{x}} \ln \left|\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}\right| \cdot \mathbf{n}_p^i \, dl(\mathbf{y}) = 0 \text{ pro } S_p^i = S_q^j,$$

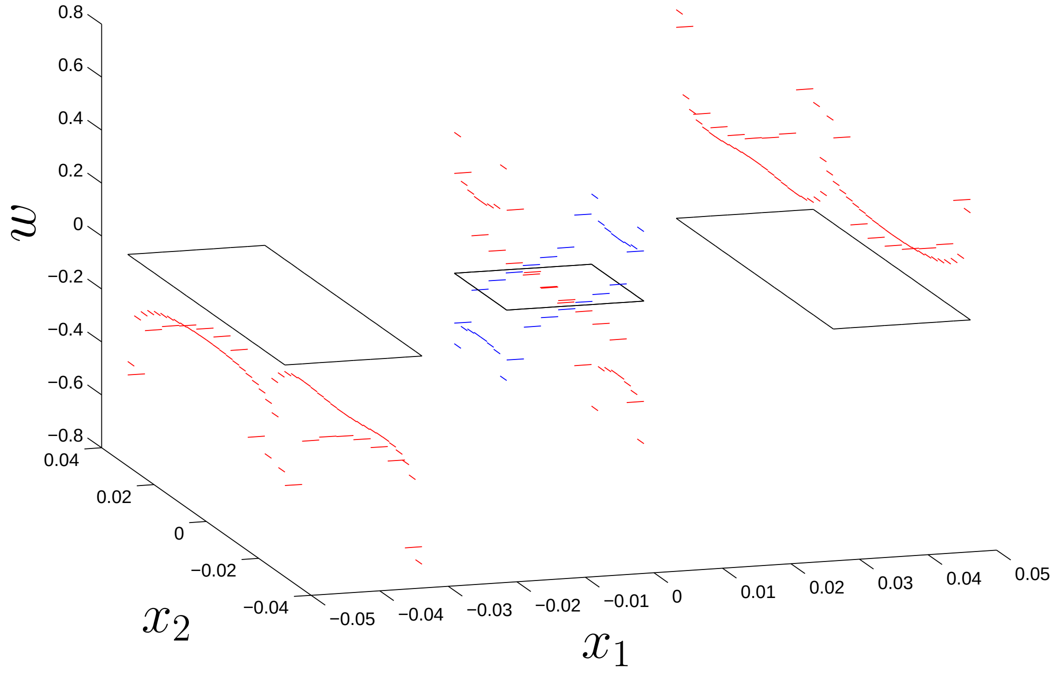
$$\int_{S_q^j} \nabla_{\mathbf{x}} \ln \left|\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}\right| \cdot \mathbf{n}_p^i \, dl(\mathbf{y}) = -\frac{1}{\left|\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j\right|} \left(\mathbf{n}_p^i \times \left(\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j\right) A_{pq}^{ij} + \right.$$

$$\left. + \mathbf{n}_p^i \cdot \left(\mathbf{a}_q^j - \mathbf{b}_q^j\right) \ln \frac{\left|\mathbf{x}_p^i - \mathbf{a}_q^j\right|}{\left|\mathbf{x}_p^i - \mathbf{b}_q^j\right|} \right) \text{ pro } S_p^i \neq S_q^j.$$

Metoda hraničních prvků

Numerické řešení w_r, w_0, w_+ a w_-

Volba $\varepsilon_\mathrm{r} := 2$, $U := 1$, $\Omega_- := (-0.05, -0.03) \times (-0.03, 0.03)$, $\Omega_+ := (0.03, 0.05) \times (-0.03, 0.03)$, $\Omega_\mathrm{r} := (-0.01, 0.01)^2$, s diskretizačním parametrem $h := 0.0025$ vede na $m_\mathrm{r} := 32$, $m_+ := m_- := 64$.



Metoda hraničních prvků

Numerické řešení u a $\mathbf{E} := -\nabla u$

Volba $\varepsilon_{\mathrm{r}} := 2$, $U := 1$, $\Omega_- := (-0.05, -0.03) \times (-0.03, 0.03)$, $\Omega_+ := (0.03, 0.05) \times (-0.03, 0.03)$, $\Omega_{\mathrm{r}} := (-0.01, 0.01)^2$, s diskretizačním parametrem $h := 0.0025$ vede na $m_{\mathrm{r}} := 32$, $m_+ := m_- := 64$.