



MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ ELEKTROMAGNETICKÝCH POLÍ

Dalibor Lukáš

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg.č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Dalibor Lukáš
MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ ELEKTROMAGNETICKÝCH POLÍ

Mé rodině.

Předmluva

O modulu „Matematické modelování elektromagnetických polí“

Cílem tohoto textu je uvést čtenáře do problematiky modelování elektromagnetických polí a jejich následného řešení moderními numerickými metodami. Čtenář by měl získat představu o základních fyzikálních zákonech v elektromagnetismu, o jejich kompaktní podobě ve formě Maxwellových rovnic, o matematické klasifikaci případů těchto rovnic, o nutnosti správné volby Sobolevových prostorů, o výhodách a nevýhodách metody konečných a hraničních prvků a o jejich efektivní implementaci na počítači. Je zřejmé, že není možné proniknout do hloubky všech vyjmenovaných oblastí. Věřím však, že je dobré zabývat se jimi současně, byť jen zprvu velmi povrchně, neboť moderní metody řešení, které maximálně využívají dostupné výpočetní techniky, jsou založeny právě na souladu fyziky, variačních metod, numerických metod, lineární algebry i programovacích technik.

Na tomto místě chci velmi poděkovat Ing. Marii Sadowské, Ph.D. za pečlivou korekci kapitoly Elektrostatika a doc. RNDr. Jaroslavu Vlčkovi, CSc. za recenzi celého textu.

V Ostravě a na Vrablovci, září 2011

Dalibor Lukáš¹

¹email: dalibor.lukas@vsb.cz

O projektu

Vážený čtenáři,

text, který právě čtete vznikl v rámci řešení projektu „Matematika pro inženýry 21. století – inovace výuky matematiky na technických školách v nových podmínkách rychle se rozvíjející informační a technické společnosti“. Projekt je řešen na Vysoké škole báňské – Technické univerzitě v Ostravě a Západočeské univerzitě v Plzni v období 2009 – 2012.

Hlavní motivací projektu je potřeba reagovat na změny významu jednotlivých partií matematiky při řešení praktických problémů, způsobenou zejména velkým pokrokem v matematickém modelování, dramatickým zlepšováním software a rychlým zvyšováním výpočetních kapacit moderních počítačů. Inženýři nyní běžně využívají stále se vyvíjející komplikované softwarové produkty založené na matematických pojmech, se kterými se v kurzech matematiky buďto nesetkají vůbec nebo v nevhodné formě. Na druhé straně prezentace některých pojmů v základních kurzech neodráží z nejrůznějších důvodů potřeby jednotlivých kateder. Bohužel tento stav sťažuje studentům aktivní používání získaných vědomostí v odborných předmětech i orientaci v rychle se vyvíjejících metodách inženýrské praxe.

Cílem projektu je inovace matematických a některých odborných kurzů na technických vysokých školách s cílem získat zájem studentů, zvýšit efektivnost výuky, zpřístupnit prakticky aplikovatelné výsledky moderní matematiky a vytvořit předpoklady pro efektivní výuku inženýrských předmětů. Zkvalitnění výuky matematiky budoucích inženýrů chceme dosáhnout po stránce formální využitím nových informačních technologií přípravy elektronických studijních materiálů a po stránce věcné pečlivým výběrem vyučované látky s důsledným využíváním zavedených pojmů v celém kurzu matematiky s promyšlenou integrací moderního matematického aparátu do vybraných inženýrských předmětů. Metodiku výuky a její atraktivnost pro studenty chceme zlepšit důrazem na motivaci a důsledným používáním postupu „od problému k řešení“.

V rámci projektu vytváříme 40 nových výukových materiálů z oblastí matematické analýzy, lineární algebry, numerických metod, metod optimalizace, diskrétní matematiky, teorie grafů, statistiky a několika odborných kurzů. Všechny hotové výukové materiály budou volně k dispozici na webových stránkách projektu <http://mi21.vsb.cz>. Autoři předem děkují za všechny případné nápady a návrhy k vylepšení textu i za upozornění na chyby.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Obsah

Předmluva	iv
1 Úvod	1
2 Elektrostatika	2
2.1 Fyzikální podstata	2
2.2 Modelová úloha, 2d redukce	6
2.3 2d elektrostatika	7
2.3.1 Variační formulace	7
2.3.2 Uzlová metoda konečných prvků	11
2.3.3 Hraniční integrální formulace	14
2.3.4 Metoda hraničních prvků	16
3 Magnetostatika	20
3.1 Fyzikální podstata	20
3.2 Modelová úloha, 2d redukce	24
3.3 2d magnetostatika	25
3.3.1 Variační formulace	25
3.3.2 Uzlová metoda konečných prvků	27
3.3.3 Hraniční integrální formulace	29
3.3.4 Metoda hraničních prvků	31
3.3.5 Párování metody konečných a hraničních prvků	32
3.4 3d magnetostatika	36
3.4.1 Variační formulace	36
3.4.2 Hranově–uzlová metoda konečných prvků	39
4 Elektromagnetické záření	45
4.1 Fyzikální podstata	45
4.2 Modelová úloha	50
4.3 3d elektromagnetické záření	52
4.3.1 Hraniční integrální formulace	52
4.3.2 Metoda hraničních prvků	53
Literatura	56

Kapitola 1

Úvod

Budiž elektromagnetismus. A bylo světlo. (Richard P. Feynman)

Tento text sestává ze tří kapitol: Elektrostatika, Magnetostatika a Elektromagnetické záření. V každé kapitole si nejdříve připomeneme základy fyziky, pak zformulujeme modelovou úlohu, kterou ve zbytku kapitoly budeme řešit metodou konečných prvků, metodou hraničních prvků, případně jejich párováním. V každé kapitole částečně zopakujeme techniky modelování a numerických metod z předchozích kapitol a pak tyto znalosti rozšíříme.

V kapitole Elektrostatika se výhradně zaměříme na 2-dimenzionální (2d) případ, na němž si názorně představíme principy metod konečných a hraničních prvků. V kapitole Magnetostatika si nejprve ve 2d oživíme metody konečných i hraničních prvků. Poté si ukážeme techniku párování obou metod. Nakonec uvedeme metodu konečných prvků ve 3 dimenzích (3d) konstruovanou specificky pro magnetostatiku. V poslední kapitole Elektromagnetické záření se zaměříme výhradně na 3d metodu hraničních prvků a nově se naučíme počítat singulární integrály numericky.

Kapitola 2

Elektrostatika

2.1 Fyzikální podstata

Elektrostatika popisuje časově neměnná silová pole nabitých těles. Základní veličinou je zde (elektrický) náboj, jehož fyzikální jednotkou je Coulomb [C]. Silová interakce mezi dvěma náboji ve vakuu je popsána Coulombovým zákonem, viz Obr. 2.1,

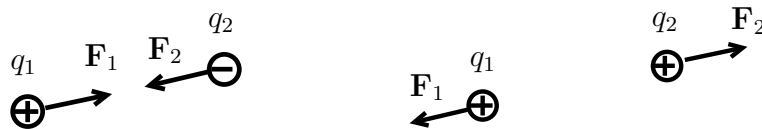
$$\mathbf{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2} \cdot \mathbf{e}_{12} = -\mathbf{F}_2,$$

kde $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ jsou náboje, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, jsou jejich polohy, $\epsilon_0 \approx 8,854 \times 10^{-12}$ [F m⁻¹] je permitivita vakua a kde $\mathbf{e}_{12} := (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)/|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ je jednotkový směrový vektor.

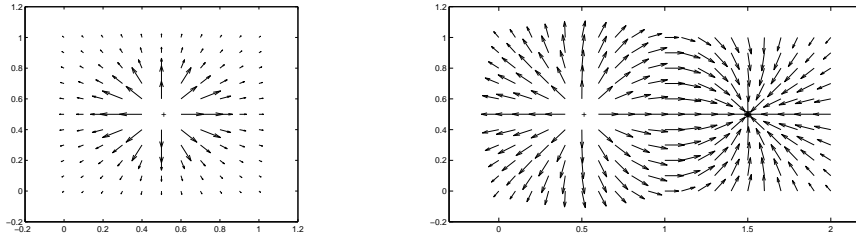
Uvažujme n nábojů rozmístěných v \mathbb{R}^3 a vložme na pozici $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ jednotkový náboj. Intenzita elektrického pole se značí \mathbf{E} a má fyzikální jednotku Volt [V] na metr, tj. [V m⁻¹]. Je to síla, kterou působí n nábojů na jednotkový náboj, přičemž platí princip superpozice sil. Uvažujme dále, že rozložení nábojů lze popsat funkcí hustoty rozložení náboje $\rho(\mathbf{y})$, která je nulová mimo omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Pak intenzita elektrického pole je, viz též Obr. 2.2,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\mathbf{y}. \quad (2.1)$$

Poznamenejme, že integrál (2.1) je singulární pro $\mathbf{x} \in \Omega$, je však většinou konečný. Např. pro $|\rho(\mathbf{y})| \leq C < \infty$ substituujeme $\mathbf{y} := \mathbf{x} + r(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ a



Obrázek 2.1: Vzájemná interakce dvou opačných (vlevo) a stejných (vpravo) nábojů.



Obrázek 2.2: Pole jednoho náboje (vlevo) a dvou nesouhlasných nábojů (vpravo).

zvolme $\tau > 0$ tak, že $B_\tau(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \tau\} \subset \Omega$, pak

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(\mathbf{x})| &\leq \frac{C}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{\Omega \setminus B_\tau(\mathbf{x})} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} d\mathbf{y} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\tau \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r \frac{|(-\sin\theta \cos\varphi, -\sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)|}{r^3} r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr \right) \\ &\leq \frac{C}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{|\Omega|}{\tau^2} + 4\pi\tau \right) < \infty, \end{aligned}$$

přičemž nejlepší odhad dává $\tau := \sqrt[3]{|\Omega|/(2\pi)}$.

Pro (2.1) platí Gaussův zákon

$$\oint_{\partial\omega} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_\omega \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.2)$$

který říká, že tok elektrického pole přes povrch libovolné oblasti $\omega \subset \mathbb{R}^3$ je určen náboji v této oblasti. Použijeme-li z matematiky Gaussovu větu

$$\oint_{\partial\omega} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \int_\omega \operatorname{div}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) d\mathbf{x},$$

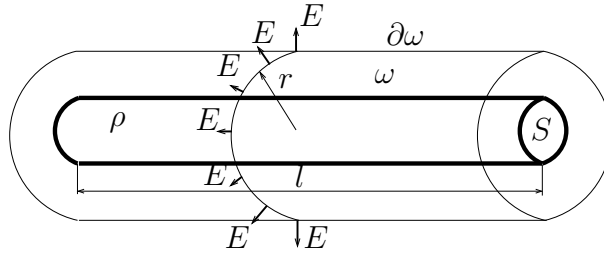
pak např. pro $\omega := B_\tau(\mathbf{x})$ a spojitě diferencovatelnou funkci $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ dostáváme pro $\tau \rightarrow 0$ diferenciální tvar Gaussova zákona v elektrostatiice pro vakuum:

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}. \quad (2.3)$$

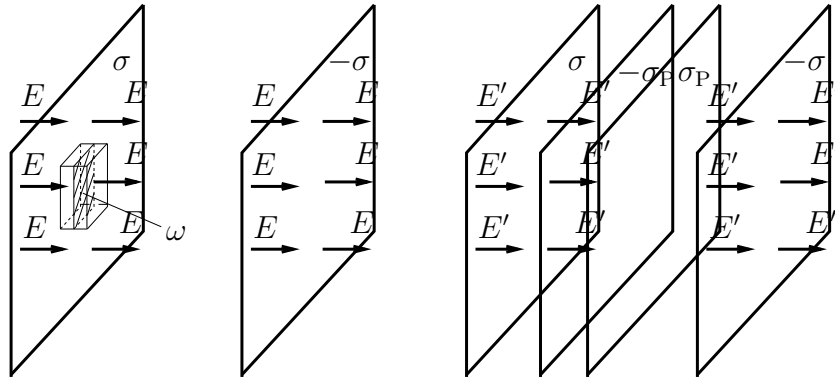
Příklad 2.1. Uvažujme nekonečně dlouhou tyč nabitou konstantní hustotou náboje $\rho > 0$ o průřezu S , viz Obr. 2.3, a předpokládejme, že intenzita el. pole pak má pouze radiální složku, která je konstantní na povrchu souosých válců ω , tj. $E = E(r)$. Pak rovnice (2.2) má tvar

$$E(r)2\pi r l = \rho S l / \epsilon_0$$

a dostáváme elektrické pole ve tvaru $E(r) = \rho S / (2\pi r \epsilon_0)$.



Obrázek 2.3: Pole nabitě nekonečně dlouhé tyče.



Obrázek 2.4: Pole deskového kondenzátoru (vlevo), pole dvou vnořených deskových kondenzátorů (vpravo).

Příklad 2.2. Uvažujme rovinnou elektrodu nabitou konstantní povrchovou hustotou náboje $\sigma > 0$, viz Obr. 2.4 (vlevo, pouze levá deska), a předpokládejme, že intenzita el. pole pak má pouze horizontální složku, která je konstantní; označme ji E_+ . Pak rovnice (2.2) má tvar

$$2E_+S = \sigma S/\varepsilon_0$$

a dostáváme elektrické pole ve tvaru $E_+ = \sigma/(2\varepsilon_0)$.

Umístěme poblíž rovinnou elektrodu nabitou povrchovou hustotou náboje $-\sigma$, viz Obr. 2.4 (vlevo, obě desky). Pak z principu superpozice dostáváme pro celkové pole vzorec $E = 2E_+ = \sigma/\varepsilon_0$.

Nakonec vložíme do tohoto deskového kondenzátoru jiný opačně orientovaný deskový kondenzátor s povrchovou hustotou náboje $\sigma_P > 0$, viz Obr. 2.4 (vpravo), pak z principu superpozice má výsledné pole velikost

$$E' = E - E_P = (\sigma - \sigma_P)/\varepsilon_0.$$

Výše zmíněný příklad dobře modeluje dielektrické materiály, v nichž se po vložení do elektrostatického pole natočí molekuly v souladu s vnějším polem podle Coulombova zákona. Označme $\rho_P(\mathbf{x}) := \operatorname{div}(-\mathbf{P}(\mathbf{x}))$ hustotu polarizovaného náboje v dielek-

triku, kde \mathbf{P} je elektrostatičká polarizace. Pak z (2.3)

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) = \frac{\rho(\mathbf{x}) + \rho_{\mathbf{P}}(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon_r(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x})) := \operatorname{div}\left(\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}\right) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0},$$

kde $\varepsilon_r(\mathbf{x}) := 1 + |\mathbf{P}(\mathbf{x})|/(\varepsilon_0|\mathbf{E}(\mathbf{x})|) \geq 1$ je relativní permitivita, předpokládáme-li lineární závislost $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ a $\mathbf{E}(\mathbf{x})$. Zavedeme-li $\mathbf{D}(\mathbf{x}) := \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x})$ jako elektrickou indukci, pak diferenciální, resp. integrální tvar Gaussova zákona v dielektriku je

$$\operatorname{div}(\mathbf{D}(\mathbf{x})) = \rho(\mathbf{x}), \quad \text{resp.} \quad \oint_{\partial\omega} \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}) dx. \quad (2.4)$$

Elektrostatičké pole je potenciální, tj.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla u(\mathbf{x}),$$

kde např.

$$u(\mathbf{x}) := \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y}$$

v případě (2.1). Všimněme si, že

$$u(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \quad \text{pro} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

V potenciálním poli práce, kterou pole vykoná při přemístění jednotkového náboje z polohy $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ do polohy $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, nezávisí na dráze

$$W_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}} = - \int_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d\mathbf{l}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{b}) - u(\mathbf{a}),$$

a tedy pro libovolnou uzavřenou křivku k

$$\oint_k \mathbf{E}(\mathbf{x}) d\mathbf{l}(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.6)$$

Použijeme-li z matematiky Stokesovu větu

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} \operatorname{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}),$$

pak pro $|\Sigma| \rightarrow 0$ dostáváme

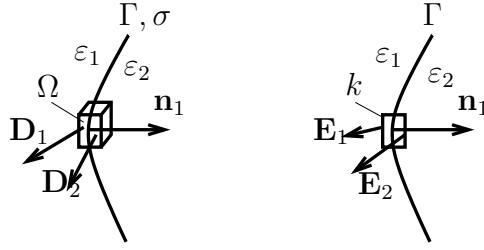
$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

Rovnice (2.4)–(2.7) vyžadují diferencovatelné, resp. spojitě funkce $\varepsilon_r(\mathbf{x})$ a $\mathbf{E}(\mathbf{x})$. V případě rozhraní dvou různých materiálů, viz Obr. 2.5, dostáváme z integrálních tvarů rovnic (2.4) a (2.6) pro $|\omega| \rightarrow 0$, resp. $|\Sigma| \rightarrow 0$, kde $k := \partial\Sigma$, podmínky na rozhraní

$$(\mathbf{D}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{D}_2(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}), \quad (2.8)$$

$$(\mathbf{E}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{E}_2(\mathbf{x})) \times \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (2.9)$$

kde σ je případný povrchový náboj na rozhraní a $\mathbf{x} \in \Gamma$.



Obrázek 2.5: Podmínky přechodu na rozhraní dvou dielektrik.

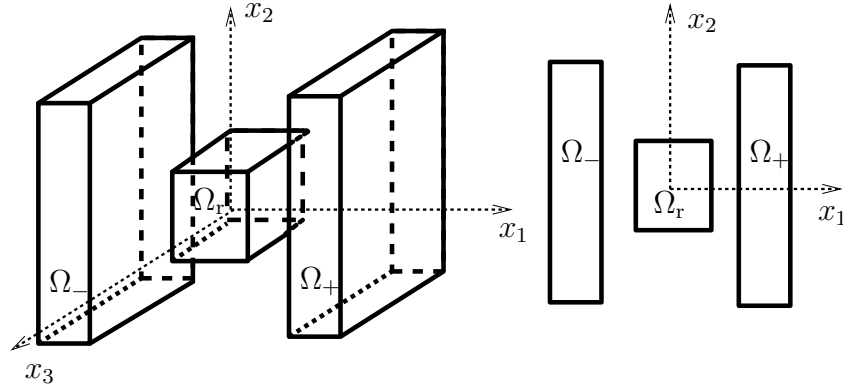
2.2 Modelová úloha, 2d redukce

Modelová úloha pro elektrostatiku je načrtnuta na Obr. 2.6 (vlevo). Budeme uvažovat dva materiály: vzduch (vakuum), v němž je vloženo v oblasti Ω_r dielektrikum o relativní permitivitě $\varepsilon_r > 1$. Oblastí zde rozumíme omezenou a otevřenou podmnožinu \mathbb{R}^d , kde $d := 3$. Dále mějme ve vzduchu v oblastech Ω_+ a Ω_- vloženy dvě nabitě desky, o nichž víme, že je na jejich povrchu konstantní potenciál $U > 0$, resp. $-U$. Pole elektrostatického potenciálu pak popisuje následující systém

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_r(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ -\Delta u_0(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} \in \Omega_0 := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_r \cup \Omega_+ \cup \Omega_-}, \\ \partial u_0(\mathbf{x})/\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \varepsilon_r \partial u_r(\mathbf{x})/\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} \in \partial \Omega_r, \\ u_0(\mathbf{x}) - u_r(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} \in \partial \Omega_r, \\ u_0(\mathbf{x}) = U & \mathbf{x} \in \partial \Omega_+, \\ u_0(\mathbf{x}) = -U & \mathbf{x} \in \partial \Omega_-, \\ u_0(\mathbf{x}) \rightarrow 0 & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \end{array} \right. \quad (2.10)$$

kde první dvě rovnice jsou přepisem (2.4), třetí je (2.8), ze čtvrté plyne platnost (2.9), další dvě předepisují napětí na elektrodách a poslední rovnice je vlastnost (2.5). Hledané potenciály u_0 a u_r jsou dvakrát spojitě diferencovatelné funkce na Ω_0 , resp. na Ω_r , které navíc mají spojitě derivace až do hranice, což značíme $u_0 \in C^2(\Omega_0) \cap C^1(\overline{\Omega_0})$, $u_r \in C^2(\Omega_r) \cap C^1(\overline{\Omega_r})$.

V případě, že rozměry elektrod a dielektrika ve směru x_3 jsou dostatečné, lze úlohu (2.10) redukovat do \mathbb{R}^2 , a to tak, že budeme uvažovat typický řez $x_3 := 0$ a předpokládat, že závislost veličin na souřadnici x_3 lze zanedbat. Formulace úlohy pak zůstává formálně shodná s (2.10) s rozdílem, že dimenze je $d := 2$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ a oblasti Ω_r , Ω_+ a Ω_- jsou znázorněny na Obr. 2.6 (vpravo).



Obrázek 2.6: Modelová úloha elektrostatiky: deskový kondenzátor (vlevo), redukce do \mathbb{R}^2 (vpravo).

2.3 2d elektrostatika

2.3.1 Variační formulace

Uvažujme úlohu (2.10) v libovolné dimenzi $d \in \{2, 3\}$. Data úlohy, tj. geometrii a konstanty ε_r zahrňme do následující materiálové funkce

$$\varepsilon(\mathbf{x}) := \begin{cases} \varepsilon_0 \varepsilon_r, & \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ \varepsilon_0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_r}, \end{cases}$$

Dále uvažujme dostatečně velkou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tak, že $\Omega \supset \overline{\Omega_r}$, $\Omega \cap \Omega_+ = \Omega \cap \Omega_- = \emptyset$ a předpokládejme, že u_0 je vně oblasti $\Omega \cup \Omega_+ \cup \Omega_-$ zanedbatelně malá. Předpokládáme proto, že

$$u(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega \setminus (\partial\Omega_+ \cup \partial\Omega_-),$$

čímž vnášíme do řešení chybu. Ta bude sice klesat se zvětšujícím se poloměrem (vepsané koule v) oblasti Ω , bohužel ji však neumíme předem dobře odhadnout. Přibližné řešení úlohy (2.10) hledáme jako funkci $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, která nahrazuje neznámé v (2.10) takto

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} u_r(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_0 := \Omega \setminus \overline{\Omega_r \cup \Omega_+ \cup \Omega_-}, \end{cases} \quad (2.11)$$

kde jsme změnilí význam Ω_0 .

Vezměme diferencovatelnou funkci $v : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že $v(\mathbf{x}) = 0$ pro $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Přenásobme první rovnici v (2.10) funkcí v a konstantou $\varepsilon_0 \varepsilon_r$ a zintegrujme přes Ω_r . Dostáváme

$$\int_{\Omega_r} -\varepsilon_0 \varepsilon_r \Delta u_r(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Nyní použijeme z matematiky Greenovu větu

$$\int_{\omega} \frac{\partial q(\mathbf{x})}{\partial x_i} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\omega} q(\mathbf{x}) \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x_i} d\mathbf{x} + \int_{\partial\omega} q(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad (2.12)$$

kde $n_i(\mathbf{x})$ značí i -tou složku vnějšího normálového vektoru k ω v bodě $\mathbf{x} \in \partial\omega$, a dostáváme

$$\int_{\Omega_r} \varepsilon_0 \varepsilon_r \nabla u_r(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_r} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial u_r(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} v(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = 0.$$

Podobně přenásobíme druhou rovnici v (2.10) funkcí v a konstantou ε_0 , zintegrujeme přes Ω , aplikujeme Greenovu formuli (2.12) a dostáváme

$$\int_{\Omega} \varepsilon_0 \nabla u_0(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_0 \frac{\partial u_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} v(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = 0.$$

Uvědomme si, že vnější normály k Ω_r a Ω jsou na $\partial\Omega_r$ navzájem opačné. Sečtením posledních dvou rovnic s využitím třetí rovnice v (2.10), definic ε a v dává

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_0 \frac{\partial u_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} v(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + \\ & + \int_{\partial\Omega_r} \varepsilon_0 \left(\frac{\partial u_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} - \varepsilon_r \frac{\partial u_r(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \right) v(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \end{aligned}$$

kde poslední rovnost je variační rovnice pro úlohu (2.10).

Nyní si řekneme, v jaké množině funkcí budeme hledat řešení u a co mají splňovat testovací funkce v . Aby měla variační rovnice smysl, musí pro řešení u i testovací funkce v platit, že integrály $\int_{\Omega} |\nabla w(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$ mají smysl a jsou konečné, že v jistém smyslu $v(\mathbf{x}) = 0$ pro $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ a že hraniční hodnoty u jsou jako v (2.11). Z teorie variačních metod prvnímu požadavku vyhovuje Sobolevův prostor

$$V := H^1(\Omega) := \{v(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega) : \nabla v(\mathbf{x}) \in [L^2(\Omega)]^d\},$$

kde $L^2(\Omega)$ je prostor všech reálných funkcí, které jsou Lebesgueovsky integrovatelné s kvadrátem na Ω a ∇ je zobecněný gradient. Pro námi uvažovanou Ω (s lipschitzovskou hranicí) lze tento vektorový prostor také definovat následujícím zúplněním prostoru nekonečně diferencovatelných funkcí v $\overline{\Omega}$

$$H^1(\Omega) := \overline{C^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_1}, \quad \|v\|_1 := \int_{\Omega} v(\mathbf{x})^2 + |\nabla v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x},$$

čímž rozumějme, že v $H^1(\Omega)$ jsou nejen všechny funkce z $C^\infty(\overline{\Omega})$, ale i všechny jejich posloupnosti, které jsou cauchyovské¹ v normě $\|\cdot\|_1$. Analogii této definice již dobře

¹Posloupnost (a_n) je cauchyovská v normě $\|\cdot\|$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : \|a_m - a_n\| \leq \varepsilon.$$

známe v případě reálných čísel, které obsahují nejen všechny racionální čísla, tj. celočíselné zlomky, ale i jejich cauchyovské posloupnosti, jejichž neracionální limity, např. $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \rightarrow e$, nazýváme iracionální čísla. Testovací funkce v budeme vybírat ze Sobolevova prostoru

$$V_0 := H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_1},$$

kde $v \in C_0^\infty(\Omega)$, právě když $v \in C^\infty(\Omega)$ a $\text{supp } v := \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega : v(\mathbf{x}) \neq 0\}} \subset \Omega$. Konečně řešení u hledáme v prostoru $V_U := \overline{C_U^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_1}$, kde

$$C_U^\infty(\Omega) := \{v \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } v \subset \Omega \cup \overline{\Omega_+} \cup \overline{\Omega_-}, \\ v(\mathbf{x}) = U \text{ na } \partial\Omega_+ \text{ a } v(\mathbf{x}) = -U \text{ na } \partial\Omega_-\}.$$

Variační formulace úlohy (2.10) je tedy následující: najdi $u \in V_U$ tak, že

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall v \in V_0. \quad (2.13)$$

Pro tuto úlohu lze dokázat existenci jednoznačného řešení a jeho spojitou závislost na změnách geometrie Ω i materiálové funkce ε .

K variační formulaci (2.10) lze dojít i fyzikálně srozumitelnějším způsobem, a to z principu minima funkcionálu elektrostatické potenciální energie úlohy (2.10)

$$\varphi(v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) |\nabla v(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Totíž minimum φ může nastat pouze v bodě $u \in V_U$, který je stacionární, tj. splňuje právě variační rovnici

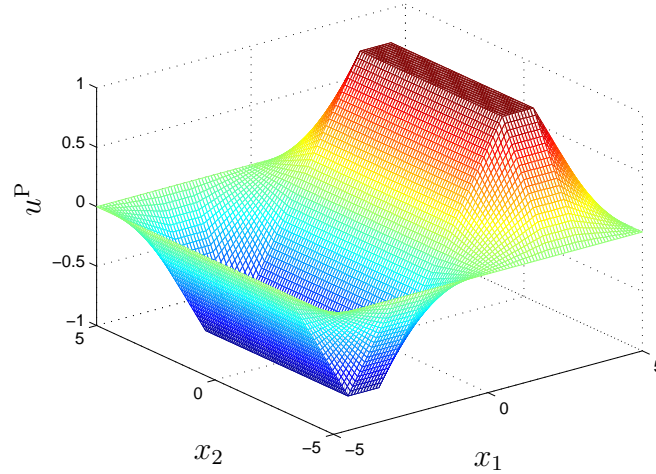
$$\varphi'(u, v) = 0 \quad \forall v \in V_0,$$

kde $\varphi'(u, v)$ je Fréchetova derivace φ v bodě u a ve směru v

$$\varphi'(u, v) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Ve variační formulaci (2.13) je nepraktické to, že řešení je z jiného prostoru než testovací funkce. Ukážeme si tři způsoby, jak to napravit. Za prvé můžeme řešení rozložit na homogenní a partikulární $u := u^H + u^P$, kde $u^H \in V_0$ a $u^P \in V_U$, viz Obr. 2.7. Pak řešíme úlohu: najdi $u^H \in V_0$ tak, že

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) \nabla u^H(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) \nabla u^P(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in V_0. \quad (2.14)$$



Obrázek 2.7: Příklad partikulárního řešení $u^P(\mathbf{x})$ okrajových hodnot variační formulace (2.13) pro $d := 2$.

Partikulární řešení u^P však úzce souvisí s geometrií Ω a už pro náš příklad jeho nalezení není triviální. Druhým a nejpoužívanějším způsobem je penalizovaná variační formulace: hledáme $u_\rho \in V$ tak, že $\forall v \in V$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) \nabla u_\rho(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \rho \int_{\partial\Omega_+} u_\rho(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) + \rho \int_{\partial\Omega_-} u_\rho(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) + \\ + \rho \int_{\Gamma} u_\rho(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) = \rho \int_{\partial\Omega_+} U v(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) - \rho \int_{\partial\Omega_-} U v(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.15)$$

kde $\Gamma := \partial\Omega \setminus \overline{\partial\Omega_+} \cup \overline{\partial\Omega_-}$, $\rho \gg 0$ je penalizační parametr, přičemž $\|u_\rho - u\|_1 \rightarrow 0$ pro $\rho \rightarrow \infty$.

Třetí způsob je založen na minimalizaci energetického funkcionálu φ na prostoru V s lineárními rovnostními omezeními $u(\mathbf{x}) = U$ na $\partial\Omega_+$, $u(\mathbf{x}) = -U$ na $\partial\Omega_-$ a $u(\mathbf{x}) = 0$ na Γ . Hledáme tedy vázaný extrém. Ten nastane ve stacionárním bodě lagrangeovského funkcionálu

$$\begin{aligned} L(u; \lambda_+, \lambda_-) := \varphi(u) + \int_{\partial\Omega_+} \lambda_+(\mathbf{x})(u(\mathbf{x}) - U) dl(\mathbf{x}) + \\ + \int_{\partial\Omega_-} \lambda_-(\mathbf{x})(u(\mathbf{x}) + U) dl(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \lambda(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

a je řešením úlohy: hledáme $(u; \lambda_+, \lambda_-, \lambda) \in V \times L^2(\partial\Omega_+) \times L^2(\partial\Omega_-) \times L^2(\Gamma)$ tak,

že

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \varepsilon \nabla u \nabla v \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_+} \lambda_+ v \, dl(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega_-} \lambda_- v \, dl(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \lambda v \, dl(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall v \in V, \\ \int_{\partial\Omega_+} u q_+ \, dl(\mathbf{x}) = U \int_{\partial\Omega_+} q_+ \, dl(\mathbf{x}) \quad \forall q_+ \in L^2(\partial\Omega_+), \\ \int_{\partial\Omega_-} u q_- \, dl(\mathbf{x}) = -U \int_{\partial\Omega_-} q_- \, dl(\mathbf{x}) \quad \forall q_- \in L^2(\partial\Omega_-), \\ \int_{\Gamma} u q \, dl(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall q \in L^2(\Gamma). \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Pozamenejme, že formulace (2.16) dává jednoznačné řešení u , které spojitě závisí na datech, tj. $\partial\Omega$, $\partial\Omega_+$, $\partial\Omega_-$, ε a U , ale lagrangeovské multiplikátory λ_+ , λ_- a λ jsou nejednoznačné.

2.3.2 Uzlová metoda konečných prvků

Je zřejmé, že žádnou z variačních formulací (2.13)–(2.16) neumíme řešit analyticky, ale můžeme je diskretizovat a nahradit soustavami lineárních rovnic. To uděláme tak, že prostory V , V_0 , nebo V_U nahradíme vhodnými konečně–dimenzionálními podprostory, což vede na Galerkinovu formulaci. Metoda konečných prvků je speciálním případem, kdy bázi konečně–dimenzionálních podprostorů volíme tak, že výsledná soustava má řídkou matici, tj. většina prvků je v matici nulová.

Uvažujme nyní redukovanou dimenzi $d := 2$. Prvním krokem v metodě konečných prvků je diskretizace Ω , v našem případě do m trojúhelníků, jejichž vnitřky (otevřené oblasti) značíme T^k , viz Obr. 2.8,

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{k=1}^m \overline{T^k}, \quad T^i \cap T^j = \emptyset \text{ pro } i \neq j,$$

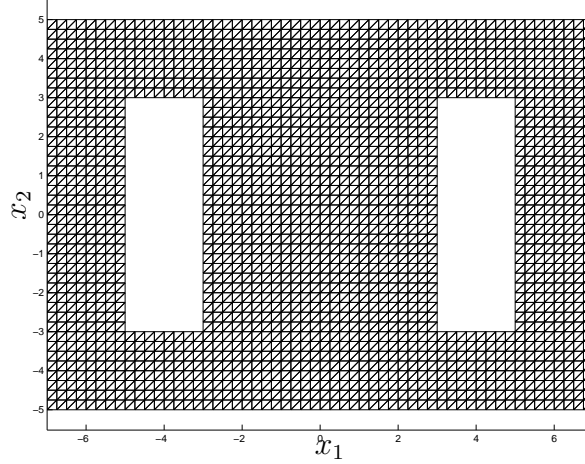
tak, že dva sousední trojúhelníky mají společnou pouze hranu nebo bod. Zároveň chceme, aby hranice trojúhelníků zahrnuly všechny hranice a rozhraní v geometrii, tj.

$$\bigcup_{k=1}^m \partial T^k \supset (\partial\Omega \cup \partial\Omega_r).$$

Konečně chceme, aby nejostřejší úhel, který trojúhelníky svírají, byl zdola omezený konstantou. Definujeme diskretizační parametr $h > 0$ jako délku nejkratší hrany v diskretizaci.

Nad každým uzlem diskretizace \mathbf{x}^i , $i = 1, 2, \dots, n$ definujeme konečně–prvkovou bázeovou funkcí $e^i(\mathbf{x}) : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že

$$\forall i \forall k : e^i(\mathbf{x})|_{T^k} = a_k^i + b_k^i x_1 + c_k^i x_2 \quad \text{a} \quad e^i(\mathbf{x}^j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

Obrázek 2.8: Triangulace oblasti Ω .

kde $a_k^i, b_k^i, c_k^i \in \mathbb{R}$. Takto získáváme aproximaci $V^h := \langle e^1(\mathbf{x}), \dots, e^n(\mathbf{x}) \rangle$ prostoru V . Galerkinova aproximace variační formulace (2.15) je následující:

$$\text{hledáme } u_\rho^h(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n u_i e^i(\mathbf{x}) \in V^h : a_\rho(u_\rho^h, e^i) = b_\rho(e^i) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

kde $a_\rho(u_\rho, v)$ je bilineární forma na levé straně variační rovnice (2.15) a $b_\rho(v)$ je lineární forma na pravé straně. Galerkinova aproximace je ekvivalentní se soustavou n lineárních rovnic o n neznámých

$$\mathbf{A}_\rho \cdot \mathbf{u}_\rho = \mathbf{b}_\rho, \quad (2.17)$$

kde $\mathbf{u}_\rho := (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $(\mathbf{A}_\rho)_{ij} := a_\rho(e^j, e^i)$, $(\mathbf{b}_\rho)_j = b_\rho(e^j)$.

Pro Galerkinovu aproximaci variační formulace (2.16) je třeba ještě aproximovat Sobolevovy prostory $L^2(\partial\Omega_+)$, $L^2(\partial\Omega_-)$ a $L^2(\Gamma)$. Necht' naše diskretizace pokrývá hranici $\partial\Omega_+$ úsečkami (segmenty) S_+^k , tj. $\bigcup_{k=1}^{m_+} \overline{S_+^k} = \partial\Omega_+$, podobně pro hranici $\partial\Omega_-$: $\bigcup_{k=1}^{m_-} \overline{S_-^k} = \partial\Omega_-$ a pro hranici Γ : $\bigcup_{k=1}^m \overline{S^k} = \Gamma$. Definujme nad nimi po částech konstantní bázové funkce f_+^i , f_-^i , resp. f^i tak, že

$$f_+^i(\mathbf{x})|_{S_+^j} = \delta_{ij} \text{ pro } i, j = 1, \dots, m_+, \quad f_-^i(\mathbf{x})|_{S_-^j} = \delta_{ij} \text{ pro } i, j = 1, \dots, m_- \text{ a}$$

$$f^i(\mathbf{x})|_{S^j} = \delta_{ij} \text{ pro } i, j = 1, \dots, m.$$

Takto získáváme aproximaci $Q_+^h := \langle f_+^1, \dots, f_+^{m_+} \rangle$ prostoru $L^2(\partial\Omega_+)$, aproximaci $Q_-^h := \langle f_-^1, \dots, f_-^{m_-} \rangle$ prostoru $L^2(\partial\Omega_-)$ a aproximaci $Q^h := \langle f^1, \dots, f^m \rangle$ prostoru $L^2(\Gamma)$. Galerkinova aproximace (2.16) je pak ekvivalentní se soustavou lineárních

rovníc o $n + m_+ + m_- + m$ neznámých

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_+^T & \mathbf{B}_-^T & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}_+ & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_- & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda}_+ \\ \boldsymbol{\lambda}_- \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_+ \\ \mathbf{c}_- \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

kde $\mathbf{u} := (u_1, \dots, u_n)$, $u^h(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n u_i e^i(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\lambda}_+ := (\lambda_{+1}, \dots, \lambda_{+m_+})$, $\lambda_+^h(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^{m_+} \lambda_{+i} f_+^i(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\lambda}_- := (\lambda_{-1}, \dots, \lambda_{-m_-})$, $\lambda_-^h(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^{m_-} \lambda_{-i} f_-^i(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $\lambda^h(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^m \lambda_i f^i(\mathbf{x})$, $(\mathbf{A})_{ij} := \int_{\Omega} \varepsilon \nabla e^j \nabla e^i d\mathbf{x}$, $(\mathbf{B}_+)_{ij} := \int_{S_+^i} e^j dl(\mathbf{x})$, $(\mathbf{B}_-)_{ij} := \int_{S_-^i} e^j dl(\mathbf{x})$, $(\mathbf{B})_{ij} := \int_{S^i} e^j dl(\mathbf{x})$, $(\mathbf{c}_+)_{i} := U|S_+^i|$ a $(\mathbf{c}_-)_{i} := -U|S_-^i|$, kde $|\cdot|$ značí délku úsečky.

Pro efektivní sestavení matic \mathbf{A}_ρ , \mathbf{A} a pravých stran \mathbf{b}_ρ není výhodné postupovat přes jednotlivé prvky matic a vektorů, neboť bychom pro každou básovou funkci e^i museli iterovat přes všechny trojúhelníky obsažené v jejím nosiči. Raději využijeme toho, že integraci přes Ω lze rozdělit na součet integrací přes jednotlivé trojúhelníky, přičemž každý trojúhelník T^k je vázán k právě třem básovým funkcím s indexy k_1, k_2, k_3 , kde $\mathbf{x}^{k_1}, \mathbf{x}^{k_2}$ a \mathbf{x}^{k_3} jsou rohy trojúhelníka T^k seřazeny proti směru hodinových ručiček. Budeme tedy iterovat přes trojúhelníky a sčítat lokální matice a vektory pravých stran, tj. např.

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^m \mathcal{G}^k(\mathbf{A}^k), \quad \mathbf{B}_+ = \sum_{k=1}^{m_+} \mathcal{G}_+^k(\mathbf{B}_+^k), \quad \mathbf{c}_+ = \sum_{k=1}^{m_+} \mathcal{H}_+^k(c_+^k),$$

kde $\mathbf{A}^k \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $\mathbf{B}_+^k \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $c_+^k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{G}^k : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{G}_+^k : \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{m_+ \times n}$, zobrazují lokální matice na globální, $\mathcal{H}_+^k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m_+}$ zobrazuje lokální vektory na globální.

Zbývá si odvodit lokální matice a vektory. Zvolme afinní substituci

$$\mathbf{x} := R^k(\widehat{\mathbf{x}}) := \mathbf{R}^k \cdot \widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^{k_1}, \quad \text{kde } \mathbf{R}^k := (\mathbf{x}^{k_2} - \mathbf{x}^{k_1}, \mathbf{x}^{k_3} - \mathbf{x}^{k_1}),$$

kteřá zobrazuje referenční trojúhelník \widehat{T} s vrcholy $(0,0)$, $(1,0)$ a $(1,1)$ na T^k . Zavedme referenční básovou funkce, viz Obr. 2.9,

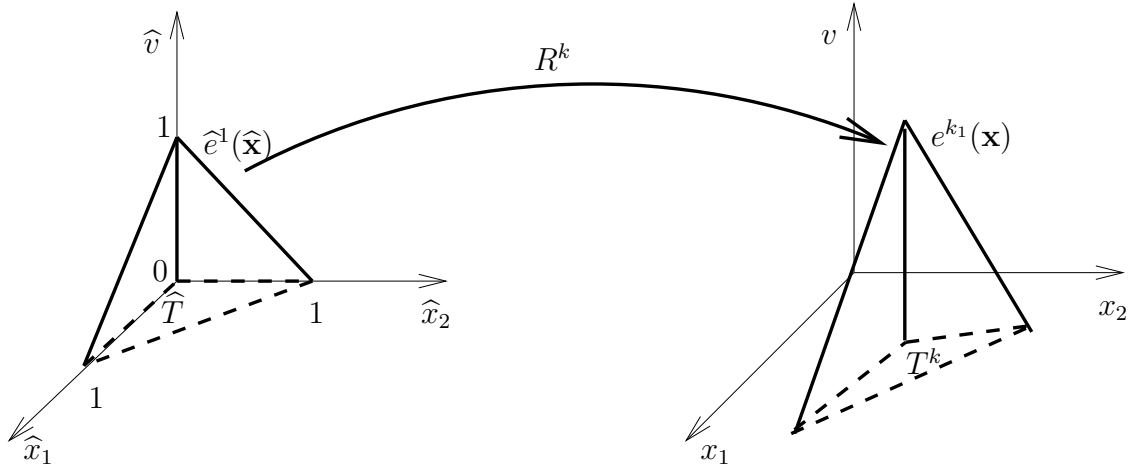
$$\widehat{e}^1(\widehat{\mathbf{x}}) := 1 - \widehat{x}_1 - \widehat{x}_2, \quad \widehat{e}^2(\widehat{\mathbf{x}}) := \widehat{x}_1, \quad \widehat{e}^3(\widehat{\mathbf{x}}) := \widehat{x}_2,$$

přičemž $\widehat{e}^i(\widehat{\mathbf{x}}) = e^{k_i}(R^k(\widehat{\mathbf{x}}))$ pro $i = 1, 2, 3$ a $\widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{T}$. Pak lze ukázat, že např.

$$\mathbf{A}^k := \varepsilon^k (\mathbf{B}_\nabla^k)^T \cdot \mathbf{B}_\nabla^k \frac{|\det(\mathbf{R}^k)|}{2},$$

kde $\varepsilon^k := \varepsilon(\mathbf{x})|_{T^k}$ a kde

$$\mathbf{B}_\nabla^k := (\nabla e^{k_1}(\mathbf{x}), \nabla e^{k_2}(\mathbf{x}), \nabla e^{k_3}(\mathbf{x})) = (\mathbf{R}^k)^{-T} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$



Obrázek 2.9: Transformace referenčních tvarových funkcí.

obsahuje gradienty bázových funkcí, přičemž první matice jsou derivace vnitřní funkce v $\hat{e}(R^k(\hat{\mathbf{x}}))$, tedy substituce R^k , a druhá číselná matice je derivace vnější funkce, tedy gradienty referenčních bázových funkcí. Zbývající lokální matice a vektory pro úlohu (2.18) jsou např.

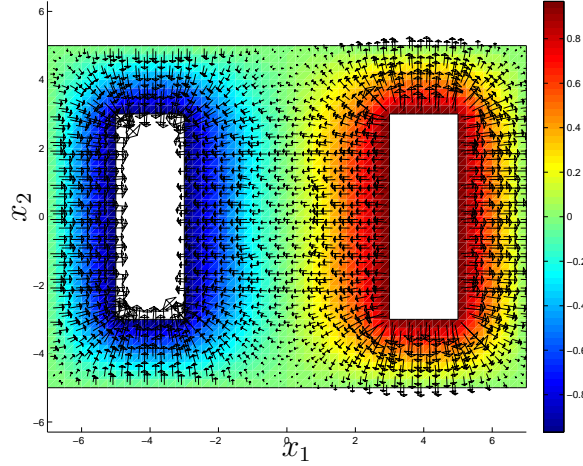
$$\mathbf{B}_+^k := (1/2, 1/2) |S_+^k|, \quad c_+^k := U |S_+^k|.$$

Na Obr. 2.10 je vykresleno řešení úlohy (2.18) pro volbu $\varepsilon_r := 2$, $U := 1$, $\Omega := (-7, 7) \times (-5, 5)$, $\Omega_- := (-5, -3) \times (-3, 3)$, $\Omega_+ := (3, 5) \times (-3, 3)$, $\Omega_r := (-1, 1)^2$, s diskretizačním parametrem $h := 0.25$ vedoucím na $n := 2015$, $m_+ := m_- := 64$, $m := 192$. Úloha byla naprogramována a řešena v prostředí MATLAB [5].

2.3.3 Hraníční integrální formulace

Uvažujme opět modelovou úlohu elektrostatiky (2.10) redukovanou do $d := 2$ dimenzí. Ve 2d případě musíme navíc předpokládat, že diametr oblasti $\overline{\Omega_r \cup \Omega_- \cup \Omega_+}$ je menší než jedna, neboli že lze tuto oblast vnořit dovnitř kruhu o poloměru $1/2$. To nás však neomezuje, neboť stačí zvolit pouze vhodné délkové jednotky. Toto přeskálování geometrie je nutné pro regularitu hraničně-prvkových matic, které popíšeme v následující kapitole. Řešení budeme nyní hledat pomocí potenciálů jednoduché vrstvy

$$\begin{aligned} u_r(\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma_r} w_r(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ u_0(\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma_r} w_0(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma_+} w_+(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) + \\ &\quad \int_{\Gamma_-} w_-(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

Obrázek 2.10: Řešení u , $\mathbf{E} := -\nabla u$ úlohy (2.18).

kde $\Gamma_r := \partial\Omega_r$, $\Gamma_+ := \partial\Omega_+$, $\Gamma_- := \partial\Omega_-$, $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ je Greenova funkce nebo též fundamentální řešení Laplaceovy rovnice a kde funkce $w_r, w_0 : \Gamma_r \rightarrow \mathbb{R}$, $w_+ : \Gamma_+ \rightarrow \mathbb{R}$ a $w_- : \Gamma_- \rightarrow \mathbb{R}$ jsou hustoty potenciálů. Takto zvolené řešení již splňuje první, druhý a poslední řádek z formulace (2.10). Naším cílem bude najít w_r, w_0, w_+ a w_- tak, aby byly splněny i ostatní rovnice v (2.10). Poznamenejme, že hledané funkce mají fyzikální smysl — jsou to povrchové hustoty náboje, které by vytvořily stejné pole jako v (2.10).

Jsou-li hustoty potenciálů spojité funkce, pak např. pro každý bod $\mathbf{x} \in \Gamma_r$, v jehož okolí je Γ hladká, tj. kromě rohů, platí, že pro $\Omega_r \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma_r$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_r} w_r(\mathbf{y}) g(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) &\rightarrow \int_{\Gamma_r} w_r(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), \\ \mathbf{n}_r(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \int_{\Gamma_r} w_r(\mathbf{y}) g(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) &\rightarrow \frac{1}{2} w_r(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_r} w_r(\mathbf{y}) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} dl(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

přičemž $\partial/\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})$ je derivace podle vnější jednotkové normály k Ω_r . Podobně platí pro $\Omega_0 \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma_r$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_r} w_0(\mathbf{y}) g(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) &\rightarrow \int_{\Gamma_r} w_0(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), \\ \mathbf{n}_r(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \int_{\Gamma_r} w_0(\mathbf{y}) g(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) &\rightarrow -\frac{1}{2} w_0(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_r} w_0(\mathbf{y}) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} dl(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Stejné vlastnosti, tj. spojitost a skok normálové derivace platí i pro zbývající dva potenciály jednoduché vrstvy, tj. členy s w_+ a w_- , přičemž $\partial/\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})$ má pak význam derivace podle vnější jednotkové normály k Ω_+ , resp. Ω_- a skok $\frac{1}{2} w(\mathbf{x})$ v normálové

derivaci je s kladným znaménkem, jdeme-li k \mathbf{x} z vnitřku, a se záporným znaménkem, jdeme-li k \mathbf{x} z vnějšku. Je zřejmé, že pokud bod \mathbf{x} leží na jiné křivce než na té, přes níž se integruje, pak jsou v \mathbf{x} příslušný potenciál i jeho normálová derivace spojité.

Zavedme následující operátory tak, že pro $\mathbf{x} \in \Gamma_r \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ (až na příslušné rohy):

$$\begin{aligned} [V_r w](\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma_r} w(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), & [L_r w](\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma_r} w(\mathbf{y}) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} dl(\mathbf{y}), \\ [V_+ w_+](\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma_+} w_+(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), & [L_+ w_+](\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma_+} w_+(\mathbf{y}) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} dl(\mathbf{y}), \\ [V_- w_-](\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma_-} w_-(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), & [L_- w_-](\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma_-} w_-(\mathbf{y}) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} dl(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Pak třetí až šestá rovnice v (2.10) dávají následující hraničně-integrální formulaci

$$\left\{ \begin{array}{l} -\varepsilon_r \left(\frac{1}{2}I + L_r\right) w_r + \left(-\frac{1}{2}I + L_r\right) w_0 + L_+ w_+ + L_- w_- = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_r, \\ -V_r w_r + V_r w_0 + V_+ w_+ + V_- w_- = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_r, \\ V_r w_0 + V_+ w_+ + V_- w_- = U, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_+, \\ V_r w_0 + V_+ w_+ + V_- w_- = -U, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_-, \end{array} \right. \quad (2.22)$$

kde I značí identické zobrazení. Otázkou zůstává, jaké prostory funkcí volit, aby formulace (2.22) dala jednoznačné řešení, které spojitě závisí na vstupních datech. Volba vhodných (Sobolevových zlomkových) prostorů a matematicky korektní Galerkinova formulace úlohy (2.22) však vyžaduje použití složitějšího matematického aparátu a je nad rámec záměru těchto skript. Přesto intuitivní pochopení formulace (2.22) a následná diskretizace metodou hraničních prvků má dobré využití.

2.3.4 Metoda hraničních prvků

Podobně jako v (2.18) uvažujme diskretizaci hranic oblastí Γ_r , Γ_+ a Γ_- do disjunktních otevřených úseček, tj.

$$\bigcup_{k=1}^{m_r} \overline{S_r^k} = \Gamma_r, \quad \bigcup_{k=1}^{m_+} \overline{S_+^k} = \Gamma_+, \quad \bigcup_{k=1}^{m_-} \overline{S_-^k} = \Gamma_-$$

a uvažujme po úsečkách konstantní bázové funkce f_r^i , f_+^i a f_-^i tak, že

$$\begin{aligned} f_r^i(\mathbf{x})|_{S_r^j} &= \delta_{ij} \text{ pro } i, j = 1, \dots, m_r, & f_+^i(\mathbf{x})|_{S_+^j} &= \delta_{ij} \text{ pro } i, j = 1, \dots, m_+ \\ & & \text{a } f_-^i(\mathbf{x})|_{S_-^j} &= \delta_{ij} \text{ pro } i, j = 1, \dots, m_-. \end{aligned}$$

V lineárních obalech těchto bází hledíme neznámé hustoty potenciálů

$$\begin{aligned} w_r(\mathbf{x}) &:= \sum_{k=1}^{m_r} w_{rk} f_r^i(\mathbf{x}), & w_0(\mathbf{x}) &:= \sum_{k=1}^{m_r} w_{0k} f_r^i(\mathbf{x}), \\ w_+(\mathbf{x}) &:= \sum_{k=1}^{m_+} w_{+k} f_+^i(\mathbf{x}), & w_-(\mathbf{x}) &:= \sum_{k=1}^{m_-} w_{-k} f_-^i(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

přičemž hledané vektory označíme $\mathbf{w}_r := (w_{r1}, \dots, w_{rm})$, $\mathbf{w}_0 := (w_{01}, \dots, w_{0m})$, $\mathbf{w}_+ := (w_{+1}, \dots, w_{+m_+})$ a $\mathbf{w}_- := (w_{-1}, \dots, w_{-m_-})$. Poznamenejme, že jsme porušili předpoklad na spojitost. Vyhnete-li se však s body \mathbf{x} krajním bodům úseček, pak vlastnosti (2.21) stále platí.

Metoda hraničních prvků, resp. její kolokační verze, nyní spočívá v aproximaci formulace (2.22), a to tak, že vyžadujeme splnění rovnic (2.22) pouze ve středech úseček, které označíme $\mathbf{x}_r^k \in S_r^k$, $\mathbf{x}_+^k \in S_+^k$, resp. $\mathbf{x}_-^k \in S_-^k$. To vede na soustavu $2m + m_+ + m_-$ lineárních rovnic o stejném počtu neznámých

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon_r \left(\frac{1}{2} \mathbf{I}_r + \mathbf{L}_{r,r} \right) & -\frac{1}{2} \mathbf{I}_r + \mathbf{L}_{r,r} & \mathbf{L}_{r,+} & \mathbf{L}_{r,-} \\ -\mathbf{V}_{r,r} & \mathbf{V}_{r,r} & \mathbf{V}_{r,+} & \mathbf{V}_{r,-} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{+,r} & \mathbf{V}_{+,+} & \mathbf{V}_{+,-} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{-,r} & \mathbf{V}_{-,+} & \mathbf{V}_{-,-} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{w}_r \\ \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{w}_+ \\ \mathbf{w}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{U}_+ \\ -\mathbf{U}_- \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

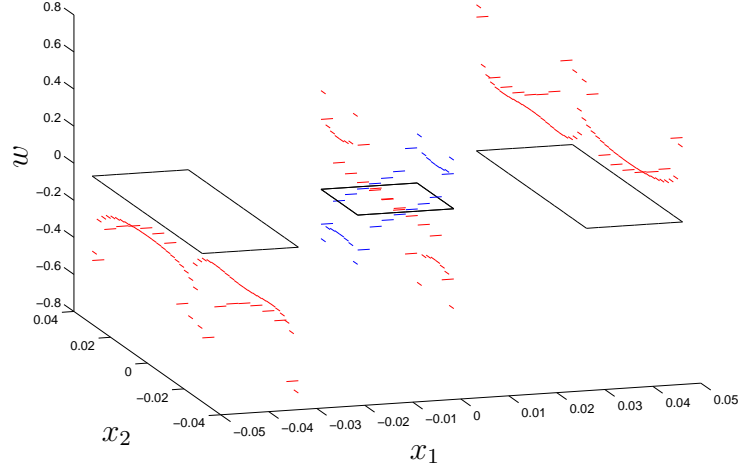
kde $\mathbf{I}_r \in \mathbb{R}^{m_r \times m_r}$ je jednotková matice a kde pro $p, q \in \{r, +, -\}$ definujeme vektory pravé strany $\mathbf{U}_p := (U, \dots, U) \in \mathbb{R}^{m_p}$ a prvky matic $\mathbf{V}_{p,q}, \mathbf{L}_{p,q} \in \mathbb{R}^{m_p \times m_q}$ následovně: $(\mathbf{V}_{p,q})_{ij} := \int_{S_q^j} g(\mathbf{x}_p^i, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y})$, $(\mathbf{L}_{p,q})_{ij} := \int_{S_q^j} \nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}_p^i, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_p^i dl(\mathbf{y})$, přičemž \mathbf{n}_r^i , \mathbf{n}_+^i a \mathbf{n}_-^i značí jednotkové normály k S_r^i , S_+^i a S_-^i směřující ven z Ω_r , Ω_+ , resp. Ω_- .

Zatímco velkou výhodou metody hraničních prvků proti metodě konečných prvků je to, že diskretizujeme pouze hranici a že se nedopouštíme chyby ořezáním výpočetní oblasti, jednou z jejích nevýhod je pracnost odvození integrálů. Sestavování matic $\mathbf{V}_{p,q}$ zahrnuje následující integrály:

$$\begin{aligned} \int_{S_q^j} \ln |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}| dl(\mathbf{y}) &= |\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j| (\ln |\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j| - \ln 2 - 1) \quad \text{pro } S_p^i = S_q^j, \\ \int_{S_q^j} \ln |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}| dl(\mathbf{y}) &= \frac{1}{|\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j|} \left([\mathbf{x}_p^i \times (\mathbf{a}_q^j - \mathbf{b}_q^j) + \mathbf{a}_q^j \times \mathbf{b}_q^j] A_{pq}^{ij} + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j) \cdot [(\mathbf{x}_p^i - \mathbf{a}_q^j) \ln |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{a}_q^j| - (\mathbf{x}_p^i - \mathbf{b}_q^j) \ln |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{b}_q^j|] \right) \\ &\quad \text{pro } S_p^i \neq S_q^j, \end{aligned}$$

kde uvažujeme parametrizaci $S_q^j : \mathbf{y}(t) := \mathbf{a}_q^j + t(\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, kde

$$A_{pq}^{ij} := \arctg \frac{(\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j) \cdot (\mathbf{x}_p^i - \mathbf{a}_q^j)}{\mathbf{a}_q^j \times (\mathbf{b}_q^j - \mathbf{x}_p^i) + \mathbf{b}_q^j \times \mathbf{x}_p^i} - \arctg \frac{(\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j) \cdot (\mathbf{x}_p^i - \mathbf{b}_q^j)}{\mathbf{a}_q^j \times (\mathbf{b}_q^j - \mathbf{x}_p^i) + \mathbf{b}_q^j \times \mathbf{x}_p^i}$$



Obrázek 2.11: Geometrie (černě) a řešení w_r (modře), w_0 , w_+ , w_- (červeně) úlohy (2.23).

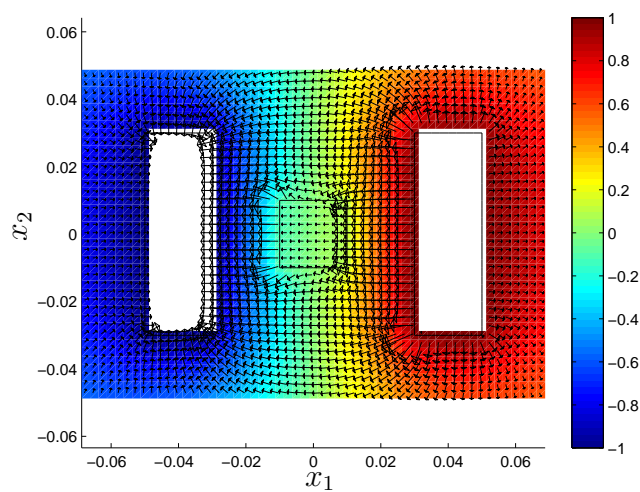
a kde pro $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ definujeme součiny $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u_1 v_1 + u_2 v_2$ a $\mathbf{u} \times \mathbf{v} := u_1 v_2 - u_2 v_1$. Sestavování matic $\mathbf{L}_{p,q}$ zahrnuje tyto integrály:

$$\int_{S_q^j} \nabla_{\mathbf{x}} \ln |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}| \cdot \mathbf{n}_p^i dl(\mathbf{y}) = 0 \text{ pro } S_p^i = S_q^j,$$

$$\int_{S_q^j} \nabla_{\mathbf{x}} \ln |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}| \cdot \mathbf{n}_p^i dl(\mathbf{y}) = -\frac{1}{|\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j|} \left(\mathbf{n}_p^i \times (\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j) A_{pq}^{ij} + \right.$$

$$\left. + \mathbf{n}_p^i \cdot (\mathbf{a}_q^j - \mathbf{b}_q^j) \ln \frac{|\mathbf{x}_p^i - \mathbf{a}_q^j|}{|\mathbf{x}_p^i - \mathbf{b}_q^j|} \right) \text{ pro } S_p^i \neq S_q^j.$$

Na Obr. 2.11 a 2.12 je vykresleno řešení úlohy (2.23) pro volbu $\varepsilon_r := 2$, $U := 1$, $\Omega_- := (-0.05, -0.03) \times (-0.03, 0.03)$, $\Omega_+ := (0.03, 0.05) \times (-0.03, 0.03)$, $\Omega_r := (-0.01, 0.01)^2$, s diskretizačním parametrem $h := 0.0025$ vedoucím na $m_r := 32$, $m_+ := m_- := 64$. Úloha byla naprogramována a řešena v prostředí MATLAB [5]. Porovnáním Obr. 2.10 a 2.12, můžeme vidět, že chyba která vznikla ořezáním výpočetní oblasti v metodě konečných prvků není malá.



Obrázek 2.12: Řešení u , $\mathbf{E} := -\nabla u$ úlohy (2.23) pomocí (2.20).

Kapitola 3

Magnetostatika

3.1 Fyzikální podstata

Magnetostatika popisuje silová pole vznikající mezi elektrickými náboji pohybující se v čase neměnnou rychlostí. Pak jsou magnetické síly také časově neměnné. Základní budící veličinou je tok nábojů zvaný elektrický proud, jehož jednotkou je Ampér [A]. Magnetostatika tedy popisuje silové účinky ustálených proudů.

Prostorovou hustotu elektrického proudu definujeme jako $\mathbf{j}(\mathbf{x}) := \rho(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x})$, kde \mathbf{v} značí rychlostní pole nábojů o hustotě ρ . Platí zákon zachování elektrického náboje, tj. pro každou omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je tok nábojů z povrchu roven jeho úbytku uvnitř:

$$\int_{\partial\Omega} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \frac{\partial\rho(\mathbf{x})}{\partial t} d\mathbf{x}.$$

Pomocí Gaussovy věty získáme diferenciální tvar tohoto zákona:

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}(\mathbf{x})) = - \frac{\partial\rho(\mathbf{x})}{\partial t}. \quad (3.1)$$

Elektrický proud I v bodě $\mathbf{x} \in \Sigma$ je definován jako tok elektrického náboje trubící o průřezu Σ takto: $I(\mathbf{x}) := \int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y})$.

Magnetická pole se popisují magnetickou indukcí \mathbf{B} , jejíž jednotka je Tesla [T]. Magnetické pole \mathbf{B} působí na náboj q pohybující se rychlostí \mathbf{v} Lorentzovou silou, viz Obr. 3.1 (vlevo),

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

což je další složka k případné Coulombovské síle $\mathbf{F} = q \mathbf{E}$. Podobně působí magnetické pole na vodič protékaný proudem I o proudové hustotě \mathbf{j} silou

$$\mathbf{F} = \int_l \int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{x}) dl(\mathbf{y}) = \int_l I(\mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) \times \mathbf{B}(\mathbf{y}) dl(\mathbf{y}). \quad (3.2)$$

Pohybující se náboje vytváří také magnetické silové pole, které zpětně ovlivňuje vnější pole \mathbf{B} , což však často zanedbáváme.



Obrázek 3.1: Lorentzova síla působící na pohybující se náboj (vlevo) a na proudovodič (vpravo).

Zbývá popsat zákony rozložení magnetického pole \mathbf{B} budících proudů \mathbf{j} . První zákon říká, že neexistují zdroje ani nory magnetického pole, tj. neexistuje magnetický analog k elektrickému náboji. To lze pro omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ vyjádřit jako

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.3)$$

což s použitím Gaussovy věty dává diferenciální rovnici

$$\operatorname{div}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) = 0. \quad (3.4)$$

Druhý, Ampérův zákon, říká, že magnetické pole vzniká jako vír kolem proudovodičů a jeho velikost je úměrná elektrickému proudu procházejícímu tímto vírem

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{B}(\mathbf{x}) d\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad (3.5)$$

kde $\mu_0 := 4\pi \cdot 10^{-7} [\text{H m}^{-1}]$ je permeabilita vakua a, jak uvidíme v kapitole 4, platí, že $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, kde c je rychlost světla ve vakuu. Aplikace Stokesovy věty na poslední rovnici dává diferenciální tvar Ampérova zákona

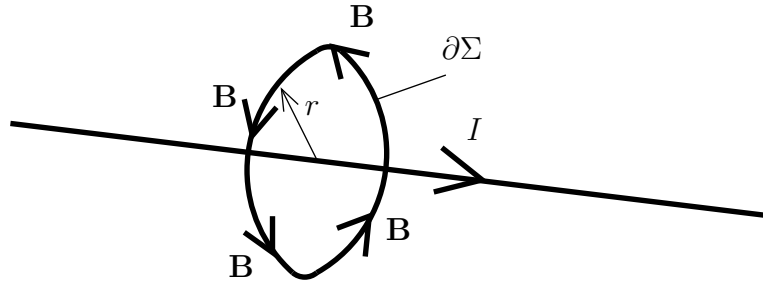
$$\operatorname{rot}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}). \quad (3.6)$$

Příklad 3.1. Uvažujme tenký nekonečně dlouhý vodič protékaný proudem I , viz Obr. 3.2, a předpokládejme, že intenzita mag. pole má pouze angulární složku, která je funkcí poloměru, tj. $B(r)$. Pak rovnice (3.5) má tvar

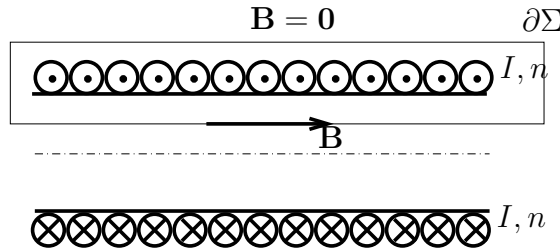
$$B(r)2\pi r = \mu_0 I$$

a dostáváme magnetické pole ve tvaru $B(r) = \mu_0 I / (2\pi r)$.

Příklad 3.2. Uvažujme dále, že rovnoběžně s vodičem z předchozího příkladu položíme do vzdálenosti r vodič tentokrát konečné délky l protékaný opět proudem I . Pak z předchozího příkladu a ze vztahu (3.2) plyne, že vodiče na sebe navzájem působí magnetickou silou $F = \mu_0 I^2 l / (2\pi r)$. Tato síla je přitažlivá v případě stejného směru obou proudů a odpuzivá při opačných směrech. To také vysvětluje, proč se závitky v cívice k sobě přitahují.



Obrázek 3.2: Pole tenkého nekonečně dlouhého vodiče.



Obrázek 3.3: Pole nekonečně dlouhé cívky.

Příklad 3.3. Uvažujme nekonečně dlouhou válcovou cívku, na níž je s hustotou závitů n navinut vodič protékáný proudem I , viz Obr. 3.3. Předpokládejme, že intenzita mag. pole je nenulová pouze uvnitř cívky a má pouze konstantní axiální složku B . Pak rovnice (3.5) má tvar

$$Bl = \mu_0 n l I$$

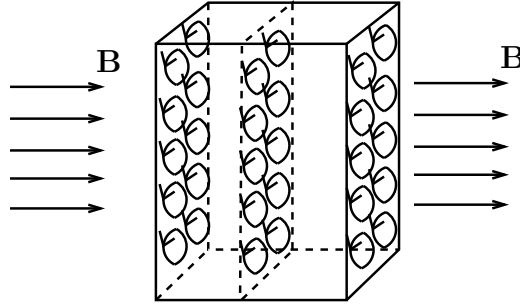
a dostáváme velikost magnetického pole $B = \mu_0 n I$.

Zatím jsme uvažovali pouze proudovodiče ve vakuu. Ve feromagnetických materiálech se nacházejí domény náhodně orientovaných proudových smyček, dipólů. Po vložení do vnějšího magnetického pole je Lorentzova síla natáčí tak, aby magnetické pole zesílily, viz Obr. 3.4. Označme hustotu zmagnetizovaných dipólů $\mathbf{j}_{\text{mag}} := \text{rot}(\mathbf{M})$, kde \mathbf{M} je magnetizace. Pak z (3.6)

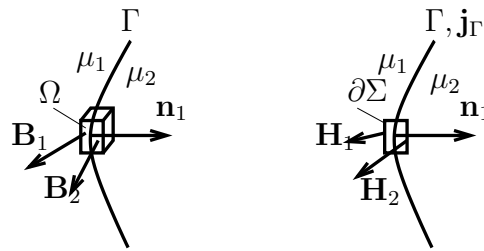
$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) &= \mu_0 (\mathbf{j}(\mathbf{x}) + \mathbf{j}_{\text{mag}}(\mathbf{x})) \\ \text{rot} \left(\frac{1}{\mu_r(\mathbf{x})} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \right) &:= \text{rot} \left(\mathbf{B}(\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x})}{\mu_0} \right) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

kde $\mu_r(\mathbf{x}) := \{1 - |\mathbf{M}(\mathbf{x})|/(\mu_0 |\mathbf{B}(\mathbf{x})|)\}^{-1} \geq 1$ je relativní permeabilita, předpokládáme-li lineární závislost \mathbf{M} a \mathbf{B} . Zavedme $\mathbf{H}(\mathbf{x}) := \frac{1}{\mu_0 \mu_r(\mathbf{x})} \mathbf{B}(\mathbf{x})$ magnetickou intenzitu, pak diferenciální, resp. integrální tvar Ampérova zákona ve feromagnetiku je

$$\text{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x})) = \mathbf{j}(\mathbf{x}), \quad \text{resp.} \quad \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{H}(\mathbf{x}) d\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \quad (3.7)$$



Obrázek 3.4: Vnitřní struktura feromagnetika.



Obrázek 3.5: Podmínky přechodu na rozhraní dvou feromagnetik.

Poznamenejme, že z hlediska teorie relativity je Lorentzova síla a magnetické pole pouze důsledkem Coulombovy síly a elektrického pole pohybujících se nábojů.

Jelikož je magnetické pole solenoidální, viz (3.4), můžeme jej vyjádřit pomocí magnetického vektorového potenciálu \mathbf{u}

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{rot}(\mathbf{u}(\mathbf{x})). \quad (3.8)$$

Vektorový potenciál popisující pole \mathbf{B} je bohužel nejednoznačný, neboť $\mathbf{rot}(\mathbf{u}) = \mathbf{rot}(\mathbf{u} + \nabla\varphi)$. Jednoznačnost můžeme vynutit Coulombovou kalibrační podmínkou

$$\mathbf{div}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = 0 \quad (3.9)$$

a podmínkou

$$|\mathbf{u}(\mathbf{x})| \rightarrow 0 \quad \text{pro} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

Rovnice (3.3), (3.4), (3.7) vyžadují diferencovatelné, resp. spojité funkce μ_r a \mathbf{B} . V případě rozhraní dvou různých materiálů, viz Obr. 3.5, dostáváme z integrálních tvarů rovnic (3.3) a (3.7) pro $|\Sigma| \rightarrow 0$ podmínky na rozhraní

$$(\mathbf{B}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_2(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.11)$$

$$(\mathbf{H}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{H}_2(\mathbf{x})) \times \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{j}_\Gamma(\mathbf{x}), \quad (3.12)$$

kde \mathbf{j}_Γ je případná povrchová hustota proudu na rozhraní.

3.2 Modelová úloha, 2d redukce

Modelová úloha pro magnetostatiku je načrtnuta na Obr. 3.6. Budeme uvažovat dva materiály: vzduch (vakuum), v němž je vloženo v oblasti Ω_r feromagnetické jádro cívky o relativní permeabilitě $\mu_r > 1$. Oblastí zde rozumíme omezenou a otevřenou podmnožinu \mathbb{R}^3 . Dále mějme ve vzduchu oblast Ω_j , která reprezentuje závit cívky tak, že v ní je po částech konstantní hustota elektrického proudu \mathbf{j} . Pole magnetického vektorového potenciálu pak popisuje následující systém:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_r(\mathbf{x}))) = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}))) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_0 := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_r}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}_k(\mathbf{x})) = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Omega_k, k \in \{0, r\}, \\ (\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_r(\mathbf{x})) \times \mathbf{n}_r(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_r, \\ \left(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x})) - \frac{1}{\mu_r} \mathbf{rot}(\mathbf{u}_r(\mathbf{x})) \right) \times \mathbf{n}_r(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_r, \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0}, & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \end{array} \right. \quad (3.13)$$

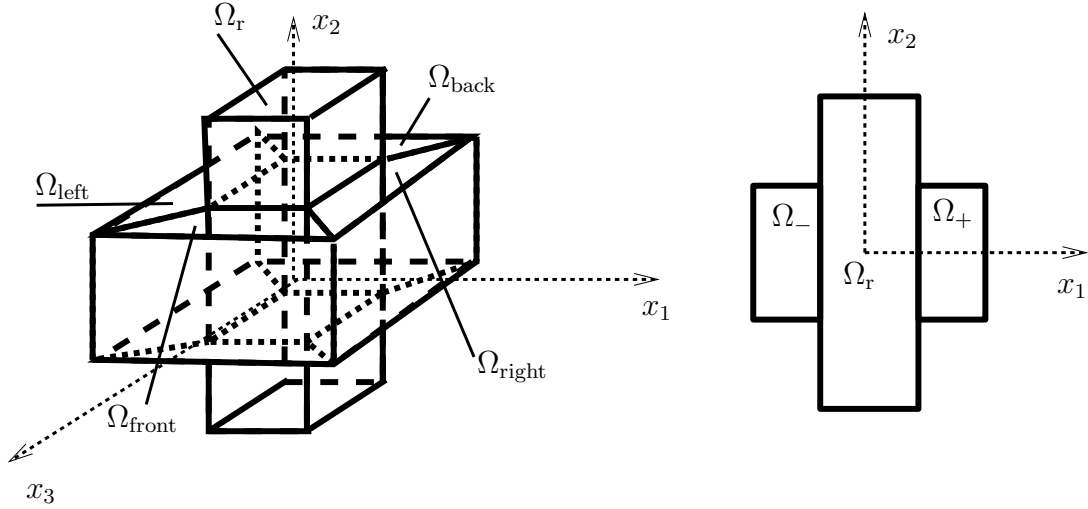
kde první dva řádky jsou přepisem (3.7) a (3.8), třetí je (3.9), čtvrtý zajišťuje platnost (3.11), pátý je (3.12) a poslední je vlastnost (3.10), přičemž \mathbf{n}_r značí jednotkovou vnější normálu k Ω_r a \mathbf{j} je definována, viz Obr. 3.6 (vlevo), následovně:

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) := \begin{cases} (0, 0, -j), & \mathbf{x} \in \Omega_j^{\text{left}}, \\ (-j, 0, 0), & \mathbf{x} \in \Omega_j^{\text{front}}, \\ (0, 0, j), & \mathbf{x} \in \Omega_j^{\text{right}}, \\ (j, 0, 0), & \mathbf{x} \in \Omega_j^{\text{back}}, \\ \mathbf{0}, & \text{jinde.} \end{cases}$$

Hledané potenciály \mathbf{u}_0 a \mathbf{u}_r jsou dvakrát spojitě diferencovatelné vektorové funkce na Ω_0 , resp. Ω_r , které navíc mají spojitě derivace až do hranice, což značíme $\mathbf{u}_k \in (C^2(\Omega_k))^3 \cap (C^1(\overline{\Omega_k}))^3$ pro $k \in \{0, r\}$. Poznamenejme, že pro dvakrát spojitě diferencovatelnou funkci \mathbf{u} takovou, že $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$, platí, že $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{u})) = -\Delta \mathbf{u}$, což je Laplaceův operátor aplikovaný po složkách.

V případě, že rozměry elektrod a dielektrika ve směru x_3 jsou dostatečné, lze úlohu (3.13) redukovat do \mathbb{R}^2 , a to tak, že budeme uvažovat typický řez $x_3 := 0$ a předpokládat, že závislost veličin na souřadnici x_3 lze zanedbat. Vektorový potenciál \mathbf{u} má pak pouze nenulovou třetí složku $u(x_1, x_2)$, redukuje se tedy na potenciál skalární. Magnetická indukce je pak tato:

$$\mathbf{B}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}, -\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}, 0 \right)$$



Obrázek 3.6: Modelová úloha magnetostatiky (vlevo), 2d redukce (vpravo).

Formulace úlohy 2d magnetostatiky je následující:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_r(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ -\Delta u_0(\mathbf{x}) = \mu_0 j(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_0 := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_r}, \\ u_0(\mathbf{x}) - u_r(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_r, \\ \partial u_0(\mathbf{x})/\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \frac{1}{\mu_r} \partial u_r(\mathbf{x})/\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_r, \\ u_0(\mathbf{x}) \rightarrow 0, & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \end{array} \right. \quad (3.14)$$

kde dimenze je $d := 2$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ a oblasti $\Omega_r, \Omega_j := \Omega_+ \cup \Omega_-$ jsou znázorněny na Obr. 3.6 (vpravo). Proudová hustota se redukuje takto:

$$j(\mathbf{x}) := \begin{cases} -j, & \mathbf{x} \in \Omega_-, \\ j, & \mathbf{x} \in \Omega_+, \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$$

Je vidět, že úloha 2d magnetostatiky je formálně shodná (až na nosič budící veličiny) s úlohou 2d elektrostatiky.

3.3 2d magnetostatika

3.3.1 Variační formulace

Uvažujme úlohu 2d magnetostatiky (3.14). Geometrii feromagnetika a jeho permeabilitu μ_r zahrňme do následující materiálové funkce

$$\mu(\mathbf{x}) := \begin{cases} \mu_0 \mu_r, & \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ \mu_0, & \mathbf{x} \in \Omega_0, \end{cases}$$

Dále uvažujme dostatečně velkou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tak, že $\Omega \supset \overline{\Omega_r \cup \Omega_j}$, a předpokládejme, že u_0 je vně oblasti Ω zanedbatelně malá. Předpokládáme proto, že

$$u_0(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

Přibližné řešení úlohy (3.14) hledáme jako funkci $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, která nahrazuje neznámé v v (3.14) takto

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} u_r(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_0 := \Omega \setminus \overline{\Omega_r}, \end{cases}$$

kde jsme změnilí význam Ω_0 .

Vezměme diferencovatelnou funkci $v : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že $v(\mathbf{x}) = 0$ pro $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Přenásobme první rovnici v (3.14) funkcí v a konstantou $1/(\mu_0\mu_r)$ a zintegrujme přes Ω_r . Dostáváme

$$- \int_{\Omega_r} \frac{1}{\mu_0\mu_r} \Delta u_r(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Přenásobme druhou rovnici v (3.14) funkcí v a konstantou $1/\mu_0$ a zintegrujme přes Ω_0 . Dostáváme

$$- \int_{\Omega_0} \frac{1}{\mu_0} \Delta u_0(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_j} j(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Nyní na levých stranách předchozích dvou rovnic použijeme Greenovu větu a rovnice sečteme. Užitím definic funkcí μ , j a u dostáváme

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{\mu(\mathbf{x})} \nabla u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} v(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) + \\ & + \frac{1}{\mu_0} \int_{\partial\Omega_r} \left(\frac{\partial u_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} - \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial u_r(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \right) v(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} j(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Na levé straně je díky $v(\mathbf{x}) = 0$ na $\partial\Omega$ druhý člen nulový a díky čtvrté rovnici v (3.14) je nulový i třetí člen. Dostáváme tedy následující variační formulaci:

$$\text{najdi } u \in V_0 : \int_{\Omega} \frac{1}{\mu(\mathbf{x})} \nabla u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} j(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall v \in V_0, \quad (3.15)$$

kde $V_0 := H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_1}$, $\|v\|_1 := \int_{\Omega} v(\mathbf{x})^2 + |\nabla v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$, což je, podobně jako v kapitole 2.3.1, zúplnění (obohacení o limity cauchyovských posloupností) prostoru nekonečněkrát spojitě diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem v Ω . Pro námi uvažovanou Ω (s lipschitzovsky spojitou hranicí) je tato definice ekvivalentní s

$$H_0^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in (L^2(\Omega))^2 \text{ a } v(\mathbf{x}) = 0 \text{ (ve smyslu stop) na } \partial\Omega\}.$$

Fyzikálně srozumitelnější náhled na úlohu (3.15) nám dává potenciální energie našeho systému, což je funkcionál

$$\varphi(v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu(\mathbf{x})} |\nabla v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega} j(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

jehož stacionární bod $u \in V_0$, který je v našem případě zároveň globálním minimem na prostoru V_0 , je charakterizován rovnicí

$$\varphi'(u, v) = 0 \quad \forall v \in V_0,$$

v níž figuruje fréchetovská derivace. Tato rovnice však není nic jiného než variační formulace (3.15).

3.3.2 Uzlová metoda konečných prvků

Podobně jako v kapitole 2.3.2 nejdříve diskretizujeme Ω do m trojúhelníků, jejichž vnitřky (otevřené oblasti) značíme T^k , viz Obr. 3.7,

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{k=1}^m \overline{T^k}, \quad T^i \cap T^j = \emptyset \text{ pro } i \neq j,$$

tak, že dva sousední trojúhelníky mají společnou pouze hranu nebo bod. Zároveň chceme, aby hranice trojúhelníků zahrnuly všechny hranice a rozhraní v geometrii, tj.

$$\bigcup_{k=1}^m \partial T^k \supset (\partial\Omega \cup \partial\Omega_r \cup \partial\Omega_- \cup \partial\Omega_+).$$

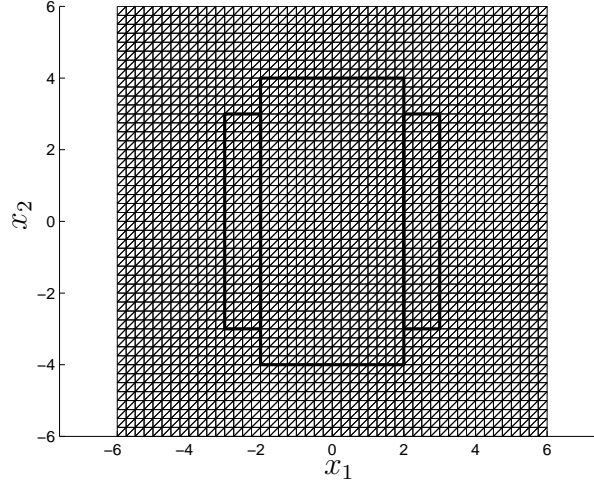
Konečně chceme, aby nejostřejší úhel, který trojúhelníky svírají, byl zdola omezený konstantou. Definujeme diskretizační parametr $h > 0$ jako délku nejkratší hrany v diskretizaci.

Zapomeňme nejprve na nulovou okrajovou podmínku $u(\mathbf{x}) = 0$ na $\partial\Omega$. Nad každým uzlem diskretizace \mathbf{x}^i , $i = 1, 2, \dots, n$, definujeme konečně-prvkovou bázeovou funkcí $e^i(\mathbf{x}) : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že

$$\forall k : e^i(\mathbf{x})|_{T^k} = a_k^i + b_k^i x_1 + c_k^i x_2 \quad \text{a} \quad e^i(\mathbf{x}^j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

kde $a_k^i, b_k^i, c_k^i \in \mathbb{R}$. Takto získáváme aproximaci $V^h := \langle e^1(\mathbf{x}), \dots, e^n(\mathbf{x}) \rangle$ prostoru $V := H^1(\Omega)$. Galerkinova aproximace variační formulace (3.15) na prostoru V byla následující:

$$\text{hledáme } \tilde{u}^h(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n \tilde{u}_i e^i(\mathbf{x}) \in V^h : a(\tilde{u}^h, e^i) = b(e^i) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

Obrázek 3.7: Triangulace oblasti Ω .

kde $a(u, v)$ je bilineární forma na levé straně variační rovnice (3.15) a $b(v)$ je lineární forma na pravé straně. Tato Galerkinova aproximace je ekvivalentní se soustavou n lineárních rovnic o n neznámých

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{b}}, \quad (3.16)$$

kde $\tilde{\mathbf{u}} := (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n)$, $(\tilde{\mathbf{A}})_{ij} := a(e^j, e^i)$, $(\tilde{\mathbf{b}})_j = b(e^j)$. Matici $\tilde{\mathbf{A}}$ a vektor $\tilde{\mathbf{b}}$ efektivně sestavíme po prvcích (trojúhelnících) technikou referenčního trojúhelníku jako v kapitole 2.3.2. Tedy

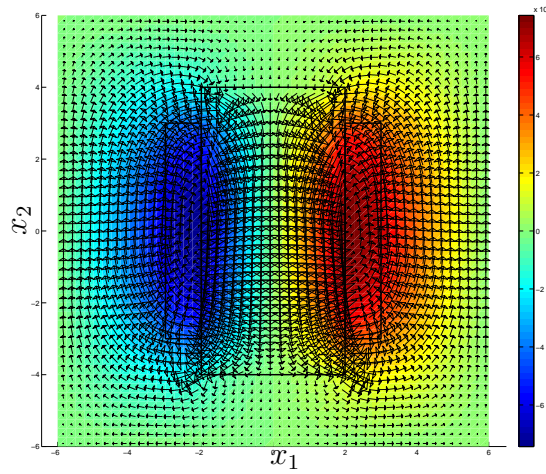
$$\tilde{\mathbf{A}} = \sum_{k=1}^m \mathcal{G}^k(\mathbf{A}^k), \quad \tilde{\mathbf{b}} = \sum_{k=1}^m \mathcal{H}^k(\mathbf{b}^k),$$

kde $\tilde{\mathbf{A}}^k \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $\tilde{\mathbf{b}}^k \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{G}^k : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ zobrazuje lokální matice na globální a $\mathcal{H}^k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$ zobrazuje lokální vektory na globální. Lokální příspěvky jsou s využitím (2.19) tyto:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k &:= \frac{1}{\mu^k} (\mathbf{B}_{\nabla}^k)^T \cdot \mathbf{B}_{\nabla}^k \frac{|\det(\mathbf{R}^k)|}{2}, \\ \mathbf{b}^k &:= j^k \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{|\det(\mathbf{R}^k)|}{2}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

kde $\mu^k := \mu(\mathbf{x})|_{T^k}$, $j^k := j(\mathbf{x})|_{T^k}$, $\mathbf{R}^k := (\mathbf{x}^{k_2} - \mathbf{x}^{k_1}, \mathbf{x}^{k_3} - \mathbf{x}^{k_1})$ a \mathbf{x}^{k_1} , \mathbf{x}^{k_2} , \mathbf{x}^{k_3} jsou uzly trojúhelníku T^k uspořádané v pravotočivém smyslu.

Řešení úlohy (3.16) je nejednoznačné až na konstantu. Tu právě dourčíme předepsáním nulovosti potenciálu na hranici výpočetní oblasti. Buď $I := \{i_1, i_2, \dots, i_{n_0}\}$

Obrázek 3.8: Řešení u , \mathbf{B} úlohy (3.39).

množina indexů uzlů neležících na hranici $\partial\Omega$. Pak Galerkinovská aproximace úlohy (3.15) na prostoru V_0 je:

$$\text{hledáme } u^h(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{n_0} u_k e^{i_k}(\mathbf{x}) \in V_0^h : a(u^h, e^{i_k}) = b(e^{i_k}) \quad \forall i_k \in I$$

a odpovídající soustava lineárních rovnic vznikne restrikcí soustavy (3.16) na indexovou množinu I

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad \text{kde } \mathbf{A} := \tilde{\mathbf{A}}_{I,I}, \quad \mathbf{b} := \tilde{\mathbf{b}}_I \text{ a } \mathbf{u} := (u_1, u_2, \dots, u_{n_0}). \quad (3.18)$$

Na Obr. 3.8 je vykresleno řešení úlohy (3.39) pro volbu $\mu_r := 5000$, $J := 0.25$, $\Omega := (-6, 6) \times (-6, 6)$, $\Omega_- := (-3, -2) \times (-3, 3)$, $\Omega_+ := (2, 3) \times (-3, 3)$, $\Omega_r := (-2, 2) \times (-4, 4)$, s diskretizačním parametrem $h := 0.25$ vedoucím na $n := 2401$ uzlů a $m := 4608$ trojúhelníků. Úloha byla naprogramována a řešena v prostředí MATLAB [5].

3.3.3 Hraniční integrální formulace

Uvažujme modelovou úlohu magnetostatiky (3.13). Podobně jako v kapitole 2.3.3 předpokládáme, že diametr oblasti $\overline{\Omega_r \cup \Omega_- \cup \Omega_+}$ je menší než jedna, neboli že lze tuto oblast vnořit dovnitř kruhu o poloměru $1/2$. Řešení budeme hledat pomocí

potenciálů jednoduché vrstvy a Newtonova potenciálu

$$\begin{aligned} u_r(\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma_r} w_r(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ u_0(\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma_r} w_0(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) + \mu_0 j \left(\int_{\Omega_+} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\Omega_-} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right), \quad \mathbf{x} \in \Omega_0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

kde $\Gamma_r := \partial\Omega_r$, $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ je fundamentální řešení Laplaceovy rovnice a kde funkce $w_r, w_0 : \Gamma_r \rightarrow \mathbb{R}$ jsou hustoty potenciálů. Takto zvolené řešení již splňuje první, druhý a poslední řádek z formulace (3.13). Naším cílem bude najít w_r a w_0 tak, aby byly splněny i ostatní rovnice v (3.13).

Jsou-li hustoty potenciálů spojité funkce, pak např. pro každý bod $\mathbf{x} \in \Gamma_r$, v jehož okolí je Γ hladká, tj. kromě rohů, platí, že pro $\Omega_r \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma_r$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_r} w_r(\mathbf{y}) g(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) &\rightarrow \int_{\Gamma_r} w_r(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), \\ \mathbf{n}_r(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \int_{\Gamma_r} w_r(\mathbf{y}) g(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) &\rightarrow \frac{1}{2} w_r(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_r} w_r(\mathbf{y}) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} dl(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

přičemž $\partial/\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})$ je derivace podle vnější jednotkové normály k Ω_r . Podobně platí pro $\Omega_0 \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma_r$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_r} w_0(\mathbf{y}) g(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) &\rightarrow \int_{\Gamma_r} w_0(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), \\ \mathbf{n}_r(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \int_{\Gamma_r} w_0(\mathbf{y}) g(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) &\rightarrow -\frac{1}{2} w_0(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_r} w_0(\mathbf{y}) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} dl(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Newtonův objemový potenciál je dokonce spojitý i se svou normálovou derivací nezávisle, zda se k hranici blížíme zevnitř, či zvenku, tedy pro $\Gamma_r \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma_r$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\pm}} g(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{x}) &\rightarrow \int_{\Omega_{\pm}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{x}), \\ \mathbf{n}_r(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \int_{\Omega_{\pm}} g(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{x}) &\rightarrow \int_{\Omega_{\pm}} \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} dl(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Je zřejmé, že pokud bod \mathbf{x} leží mimo křivku, přes níž se integruje, pak jsou v \mathbf{x} příslušný potenciál i jeho normálová derivace spojité.

Pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, resp. $\mathbf{x} \in \Gamma_r$ (až na rohy), zavedme operátory

$$[V_r w](\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_r} w(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), \quad [L_r w](\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_r} w(\mathbf{y}) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} dl(\mathbf{y}) \quad (3.22)$$

a funkce

$$\begin{aligned} N(\mathbf{x}) &:= \mu_0 j \left(\int_{\Omega_+} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\Omega_-} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right), \\ M(\mathbf{x}) &:= \mu_0 j \left(\int_{\Omega_+} \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} d\mathbf{y} - \int_{\Omega_-} \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} d\mathbf{y} \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Pak třetí a čtvrtá rovnice v (3.13) dávají následující hraničně-integrační formulaci

$$\begin{cases} V_r w_r & - & V_r w_0 & = & N, & \mathbf{x} \in \Gamma_r, \\ -\frac{1}{\mu_r}(\frac{1}{2}I + L_r) w_r & - & (-\frac{1}{2}I + L_r) w_0 & = & M, & \mathbf{x} \in \Gamma_r, \end{cases} \quad (3.24)$$

kde I značí identické zobrazení.

3.3.4 Metoda hraničních prvků

Uvažujme diskretizaci Γ_r do disjunktních otevřených úseček, tj.

$$\bigcup_{k=1}^{m_r} \overline{S_r^k} = \Gamma_r$$

a uvažujme po úsečkách konstantní bázové funkce f_r^i tak, že

$$f_r^i(\mathbf{x})|_{S_r^j} = \delta_{ij} \quad \text{pro } i, j = 1, \dots, m_r.$$

Neznámé hustoty potenciálů hledáme v lineárním obalu této báze

$$w_r(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{m_r} w_{rk} f_r^k(\mathbf{x}), \quad w_0(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{m_r} w_{0k} f_r^k(\mathbf{x}),$$

přičemž hledané souřadnicové vektory označíme $\mathbf{w}_r := (w_{r1}, \dots, w_{rm})$ a $\mathbf{w}_0 := (w_{01}, \dots, w_{0m})$.

V kolokační metodě hraničních prvků vyžadujeme splnění rovnic (3.24) pouze ve střezech úseček, které označíme $\mathbf{x}_r^k \in S_r^k$. To vede na soustavu $2m_r$ lineárních rovnic o stejném počtu neznámých

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{r,r} & -\mathbf{V}_{r,r} \\ -\frac{1}{\mu_r}(\frac{1}{2}\mathbf{I}_r + \mathbf{L}_{r,r}) & \frac{1}{2}\mathbf{I}_r - \mathbf{L}_{r,r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{w}_r \\ \mathbf{w}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

kde $\mathbf{I}_r \in \mathbb{R}^{m_r \times m_r}$ je jednotková matice a kde $(\mathbf{V}_{r,r})_{ij} := \int_{S_r^j} g(\mathbf{x}_r^i, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y})$, $(\mathbf{L}_{r,r})_{ij} := \int_{S_r^j} \nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}_r^i, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_r^j dl(\mathbf{y})$, $(\mathbf{N})_i := N(\mathbf{x}_r^i)$, $(\mathbf{M})_i := M(\mathbf{x}_r^i)$, přičemž \mathbf{n}_r^j značí jednotkovou normálu k S_r^j směřující ven z Ω_r .

Při sestavování matic $\mathbf{V}_{r,r}$ a $\mathbf{L}_{r,r}$ použijeme integrály z kapitoly 2.3.4. Navíc je nutno vyčíslit prvky vektorů \mathbf{N} a \mathbf{M} . Uvažujme obdélníkové oblasti Ω_+ a Ω_- , např. $\Omega_+ := (a, b) \times (c, d)$, pak při výpočtu pravé strany \mathbf{N} použijeme následující integrál:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 dy_2 dy_1 &= F_1(a) - F_1(b) - F_2(a, c) + F_2(a, d) + F_2(b, c) - F_2(b, d) + \\ &+ F_3(a, c) - F_3(a, d) - F_3(b, c) + F_3(b, d) - 3(b-a)(d-c), \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} F_1(y_1) &:= \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(y_1 - x_1) y_1 (y_1 - 2x_1) (\operatorname{sgn}(c - x_2) - \operatorname{sgn}(d - x_2)), \\ F_2(y_1, y_2) &:= ((y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2) \operatorname{arctg} \frac{y_1 - x_1}{y_2 - x_2}, \\ F_3(y_1, y_2) &:= (y_1 - x_1)(y_2 - x_2) \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 \end{aligned}$$

a při výpočtu \mathbf{M} použijeme tento integrál:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d \nabla_{\mathbf{x}} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \cdot \mathbf{n} \, dy_2 \, dy_1 &= \int_a^b \int_c^d \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \, dy_2 \, dy_1 = G_1(a) - G_1(b) + \\ &+ G_2(a, c) - G_2(a, d) - G_2(b, c) + G_2(b, d) - G_3(a, c) + G_3(a, d) + G_3(b, c) - G_3(b, d), \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} G_1(y_1) &:= \frac{\pi}{2} |y_1 - x_1| n_1 (\operatorname{sgn}(d - x_2) - \operatorname{sgn}(c - x_2)), \\ G_2(y_1, y_2) &:= ((y_1 - x_1)n_1 - (y_2 - x_2)n_2) \operatorname{arctg} \frac{y_1 - x_1}{y_2 - x_2}, \\ G_3(y_1, y_2) &:= \frac{1}{2} ((y_1 - x_1)n_2 + (y_2 - x_2)n_1) \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2. \end{aligned}$$

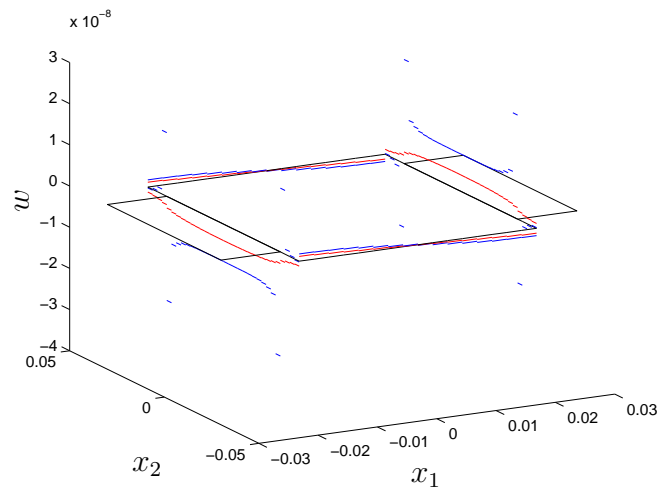
Na Obr. 3.9 a 3.10 je vykresleno řešení úlohy (3.25) pro volbu $\mu_r := 5000$, $J := 0.25$, $\Omega := (-0.06, 0.06) \times (-0.06, 0.06)$, $\Omega_- := (-0.03, -0.02) \times (-0.03, 0.03)$, $\Omega_+ := (0.02, 0.03) \times (-0.03, 0.03)$, $\Omega_r := (-0.02, 0.02) \times (-0.04, 0.04)$, s diskretizačním parametrem $h := 0.0025$ vedoucím na $m_r := 96$ úseček. Úloha byla naprogramována a řešena v prostředí MATLAB [5]. Porovnáním Obr. 3.16 a 3.10, můžeme vidět, že chyba, která vznikla ořezáním výpočetní oblasti v metodě konečných prvků, není malá.

3.3.5 Párování metody konečných a hraničních prvků

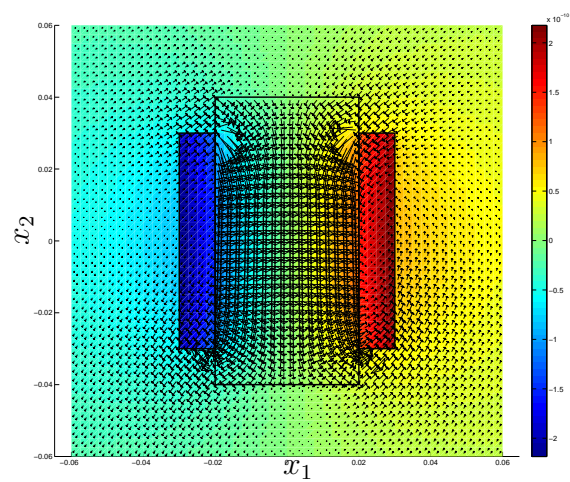
Užití metody konečných prvků je vhodné např. v oblastech s nelineární odezvou materiálu, kde permeabilita je navíc funkcí řešení (materiál se saturuje a začíná se chovat jako vzduch). Naopak metoda hraničních prvků najde uplatnění při popisu pole ve vzduchu nebo cívkách vně feromagnetika, neboť nezavádí chybu ořezáním výpočetní oblasti. Velmi populárním přístupem je párování obou metod tak, že feromagnetikum diskretizujeme metodou konečných prvků a magnetické pole v cívce a okolním vzduchu reprezentujeme pomocí hraničních potenciálů. Metoda pochází od profesora Costabela [2].

Základem párování je následující variační rovnice na oblasti Ω_r :

$$\frac{1}{\mu_r} \int_{\Omega_r} -\Delta u_r(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_r} \frac{1}{\mu_r} \nabla u_r(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_r} \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial u_r(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} v(\mathbf{x}) \, dl(\mathbf{x}) = 0,$$



Obrázek 3.9: Geometrie (černě) a řešení w_r (modře), w_0 (červeně) úlohy (3.25).



Obrázek 3.10: Řešení u , \mathbf{B} úlohy (3.25) pomocí (3.19).

v níž nahradíme tok u_r přes Γ_r tokem u_0 podle čtvrté rovnice v (3.13)

$$\int_{\Omega_r} \frac{1}{\mu_r} \nabla u_r(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_r} \frac{\partial u_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} v(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) = 0.$$

Řešení u_0 hledáme opět ve tvaru součtu potenciálu jednoduché vrstvy a Newtonova potenciálu, který představuje budící cívku,

$$u_0(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_r} w_0(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) + \mu_0 j \left(\int_{\Omega_+} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\Omega_-} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right),$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_r$. Poslední rovnicí z (3.13), kterou zbývá splnit, je spojitost řešení

$$u_r(\mathbf{x}) - u_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_r.$$

S využitím symbolů operátoru jednoduché vrstvy V_r , dvojvrstvy L_r , viz (3.22), jeho skoku (3.21) a definic Newtonových operátorů N a M , viz (3.23), je formulace úlohy následující: hledáme $u_r \in \mathcal{V}_r := H^1(\Omega_r)$ a $w_0 : \Gamma_r \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že

$$\begin{cases} a_r(u_r, v) - b_r\left(\left(-\frac{1}{2}I + L_r\right)w_0, v\right) = b_r(M, v) & \forall v \in \mathcal{V}_r, \\ u_r - V_r w_0 = N & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_r, \end{cases} \quad (3.26)$$

kde I je identita a kde

$$a_r(u_r, v) := \int_{\Omega_r} \frac{1}{\mu_r} \nabla u_r \nabla v d\mathbf{x}, \quad b_r(u, v) := \int_{\Gamma_r} u v dl(\mathbf{x}).$$

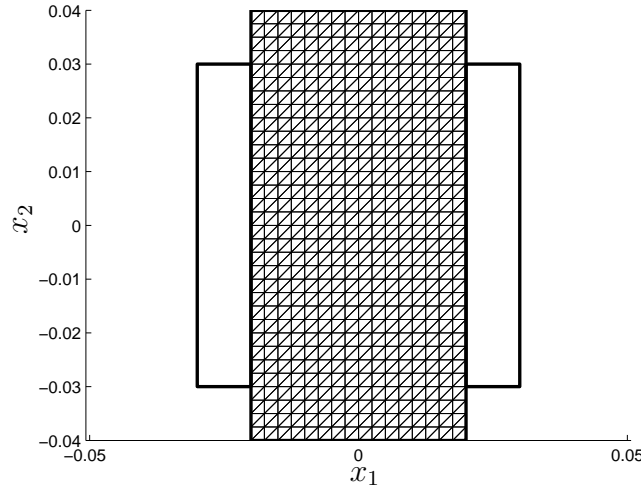
Poznamenejme, že zatímco první rovnice v (3.26) odpovídá tzv. Galerkinově přístupu, který dobře funguje i pro nehladké geometrie (rohy) a nespojité hustoty hledaných potenciálů, druhá rovnice představuje kolokační přístup s horšími aproximačními vlastnostmi. Zavedeme-li (bez bližší specifikace¹) prostor \mathcal{W}_r , v němž hledáme hraniční potenciál w_0 , pak Galerkinova formulace párování MKP a MHP pro 2d magnetostatiku je následující: hledáme $u_r \in \mathcal{V}_r$ a $w_0 \in \mathcal{W}_r$ tak, že

$$\begin{cases} a_r(u_r, v) - b_r\left(\left(-\frac{1}{2}I + L_r\right)w_0, v\right) = b_r(M, v) & \forall v \in \mathcal{V}_r, \\ b_r(u_r, q) - b_r(V_r w_0, q) = b_r(N, q) & \forall q \in \mathcal{W}_r. \end{cases} \quad (3.27)$$

Diskretizace prostoru \mathcal{V}_r metodou konečných prvků nyní vede na triangulaci Ω_r , viz Obr. 3.11, do m_r trojúhelníků T^k , v jejichž uzlech \mathbf{x}_i , $i \in \{1, 2, \dots, n_r\}$, definujeme konečně-prvkové bázové funkce e^i . Takto získáváme aproximaci $\mathcal{V}_r^h \subset \mathcal{V}_r$. Diskretizace MKP bilineární formy $a_r(\cdot, \cdot)$ vede na matici $\mathbf{A}_r \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$, jejíž lokální příspěvky \mathbf{A}_r^k spočteme technikou referenčního elementu podle vzorce (3.17).

Diskretizace prostoru \mathcal{W}_r metodou hraničních prvků je indukována předchozí triangulací Ω_r , viz Obr. 3.11. To vede na s_r hraničních úseček S_r^i a p_r hraničních uzlů $\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_{p_r}}$, kde $i_k \in \{1, 2, \dots, n_r\}$. Nad úsečkami S_r^i definujeme hraničně-prvkové

¹ $\mathcal{W}_r := H^{1/2}(\Gamma_r)$ je Sobolevův prostor stop na Γ_r .

Obrázek 3.11: Triangulace oblasti Ω_r .

nespojité po částech konstantní bázové funkce f_r^i , jejichž lineární obal nám dá prostor $\mathcal{W}_r^h \subset \mathcal{W}_r$. Při diskretizaci MHP bilineární formy $b_r(.,.)$ použijeme nejhrubší kvadraturní formuli, a to obdélníkové pravidlo

$$\int_{S_r^k} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx f(\mathbf{x}_r^k) |S_r^k|,$$

kde \mathbf{x}_r^k je střed úsečky S_r^k a $|S_r^k|$ je její délka. To nám umožní využít již napočítané prvky matic $\mathbf{V}_{r,r}$, $\mathbf{L}_{r,r}$ a vektorů \mathbf{N} , \mathbf{M} z kapitol 2.3.4 a 3.3.4.

Formulace (3.27) po diskretizaci párováním MKP a MHP vede na následující soustavu $n_r + s_r$ lineárních rovnic o stejném počtu neznámých:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{B}_r \\ \mathbf{C}_r & \mathbf{D}_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{w}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_r \\ \mathbf{c}_r \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

V této soustavě je matice $\mathbf{B}_r \in \mathbb{R}^{n_r \times s_r}$ sestavena tak, že řádek i této matice je

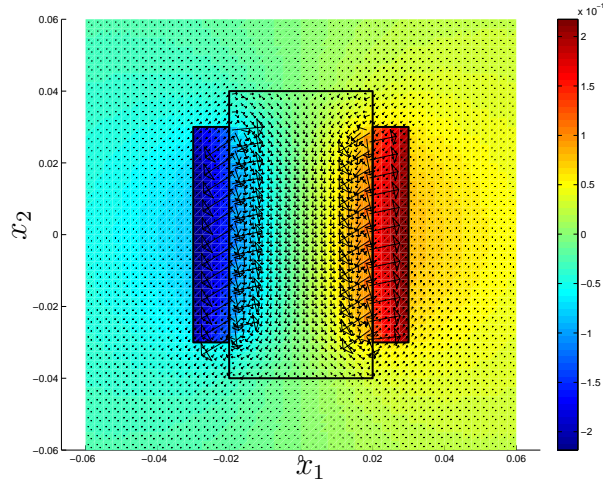
$$(\mathbf{B}_r)_{i,*} := \frac{1}{2} |S_r^i| \sum_{k=1}^2 \left(\frac{1}{2} \mathbf{I}_r - \mathbf{L}_{r,r} \right)_{i_k,*},$$

přičemž $i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, p_r\}$ jsou hraniční indexy uzlů úsečky S_r^i . Podobně $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_r}$ má prvky

$$(\mathbf{b}_r)_i := \frac{1}{2} |S_r^i| \sum_{k=1}^2 (\mathbf{M})_{i_k}.$$

Ve druhém řádku (3.28) vystupuje matice $\mathbf{C}_r \in \mathbb{R}^{s_r \times n_r}$ sestavená z prvků

$$(\mathbf{C}_r)_{i,j} := \begin{cases} \frac{1}{2} |S_r^i|, & \text{pokud } \mathbf{x}_j, j \in \{1, 2, \dots, n_r\}, \text{ je jeden ze dvou uzlů } S_r^i, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek 3.12: Řešení u , \mathbf{B} úlohy (3.25) pomocí párování FEM a BEM, viz (3.28).

Konečně matice $\mathbf{D}_r \in \mathbb{R}^{s_r \times s_r}$ a vektor $\mathbf{d}_r \in \mathbb{R}^{s_r}$ jsou definovány po řádcích takto:

$$(\mathbf{D}_r)_{i,*} := -|S_r^i| (\mathbf{V}_{r,r})_{i,*}, \quad (\mathbf{c}_r)_i := |S_r^i| (\mathbf{N})_i.$$

Na Obr. 3.12 je vykresleno řešení úlohy (3.27) pro volbu $\mu_r := 5000$, $J := 0.25$, $\Omega_r := (-0.02, 0.02) \times (-0.04, 0.04)$, $\Omega_- := (-0.03, -0.02) \times (-0.03, 0.03)$, $\Omega_+ := (0.02, 0.03) \times (-0.03, 0.03)$, s diskretizačním parametrem $h := 0.0025$ vedoucím na $n_r := 544$ MKP uzlů a $s_r := 96$ MHP úseček. Úloha byla naprogramována a řešena v prostředí MATLAB [5]. Nepřesnosti v řešení na rozhraní feromagnetika a cívky lze odstranit při použití vyššího řádu numerické kvadratury a spojitými po částech afinními bázeovými funkcemi MHP prostoru \mathcal{W}_r^h . Obě tato vylepšení však vyžadují více práce s analytickou integrací a pro účel tohoto textu nejsou podstatné.

3.4 3d magnetostatika

3.4.1 Variační formulace

Uvažujme nyní úlohu 3d magnetostatiky (3.13). Geometrii feromagnetika a jeho permeabilitu μ_r zahrňme do následující materiálové funkce

$$\mu(\mathbf{x}) := \begin{cases} \mu_0 \mu_r, & \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ \mu_0, & \mathbf{x} \in \Omega_0 := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_r}. \end{cases}$$

Uvažujme dostatečně velkou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tak, že $\Omega \supset \overline{\Omega_r} \cup \overline{\Omega_j}$, a předpokládejme, že tok $\mathbf{B} := \mathbf{rot}(\mathbf{u}_0)$ z oblasti Ω je zanedbatelný. To ve 3d magnetostatice nahrazu-

jeme podmínkou na nulovost tečných složek vektorového potenciálu

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (3.29)$$

Přibližné řešení úlohy (3.13) hledáme jako funkci $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$, která nahrazuje neznámé v (3.13) takto

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u}_r(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_0 := \Omega \setminus \bar{\Omega}_r, \end{cases}$$

kde jsme změnilí význam Ω_0 .

Vezměme diferencovatelnou funkci $\mathbf{v} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tak, že $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ na $\partial\Omega$. Přenásobme první rovnici v (3.13) funkcí \mathbf{v} a konstantou $1/(\mu_0\mu_r)$ a zintegrujme přes Ω_r . Dostáváme

$$\int_{\Omega_r} \frac{1}{\mu_0\mu_r} \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_r(\mathbf{x}))) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0. \quad (3.30)$$

Přenásobme druhou rovnici v (3.13) funkcí \mathbf{v} a konstantou $1/\mu_0$ a zintegrujme přes Ω_0 . Dostáváme

$$\int_{\Omega_0} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}))) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_0} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (3.31)$$

Připomeňme si Greenovu formuli

$$\int_{\Omega} \frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial x_i} \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) \, dS(\mathbf{x}),$$

kde $\mathbf{n} := (n_1, n_2, n_3)$ je jednotková vnější normála k Ω . Jejím opakovaným použitím si odvodíme analogii Greenovy formule pro operátor \mathbf{rot}

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{rot}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} = \\ & = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3} \right) v_1 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1} \right) v_2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right) v_3 \right] = \\ & = - \int_{\Omega} \left[\left(w_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - w_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) + \left(w_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - w_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \left(w_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - w_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \right] + \\ & \quad + \int_{\partial\Omega} [(w_3 n_2 - w_2 n_3) v_1 + (w_1 n_3 - w_3 n_1) v_2 + (w_2 n_1 - w_1 n_2) v_3] = \\ & = - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (-\mathbf{rot}(\mathbf{v})) - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{w} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} = \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{v}) + \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n}). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Nyní na levých stranách rovnic (3.30) a (3.31) použijeme (3.32) a rovnice sečteme. Užitím definic funkcí μ , \mathbf{j} a \mathbf{u} dostáváme

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{v}) + \frac{1}{\mu_0} \int_{\partial\Omega} \mathbf{rot}(\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) - \\ & - \frac{1}{\mu_0} \int_{\partial\Omega_r} \left(\left(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_0) - \frac{1}{\mu_r} \mathbf{rot}(\mathbf{u}_r) \right) \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Na levé straně je díky $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ na $\partial\Omega$ druhý člen nulový a díky páté rovnici v (3.13) je nulový i třetí člen. Dostáváme tedy následující variační formulaci:

$$\text{najdi } \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}_0 : \int_{\Omega} \frac{1}{\mu(\mathbf{x})} \mathbf{rot}(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0, \quad (3.33)$$

kde $\mathbf{V}_0 := \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) := \overline{(C_0^\infty(\Omega))^3}^{\|\cdot\|_{\mathbf{rot}}}$, $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{rot}} := \int_{\Omega} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 + |\mathbf{rot}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))|^2 \, d\mathbf{x}$. Pro námi uvažovanou Ω je tato definice ekvivalentní s

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) := \left\{ \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3 : \mathbf{rot}(\mathbf{v}) \in (L^2(\Omega))^3 \text{ a } \mathbf{v}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ na } \partial\Omega \right\}.$$

Bohužel, jak jsme zmínili už v kapitole 3.1, je vektorový potenciál nejednoznačný až na libovolné gradientní pole $\nabla\varphi$.

Podívejme se nejdříve na úlohu (3.33) jako na úlohu minimalizaci magnetostatické potenciální energie, což je funkcionál

$$E(\mathbf{v}) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu(\mathbf{x})} |\mathbf{rot}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))|^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

jehož nekonečně mnoho stacionárních bodů $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \nabla\varphi \in \mathbf{V}_0$ jsou řešením rovnice

$$E'(\mathbf{u} + \nabla\varphi, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0,$$

což není nic jiného než variační formulace (3.33). Jednoznačné řešení \mathbf{u} získáme dodáním Coulombovy kalibrační podmínky $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$ v Ω , což nás vede na hledání vázaného extrému: hledáme $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_0$ tak, že

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0 : E(\mathbf{u}) \leq E(\mathbf{v}) \text{ vzhledem k } \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad (3.34)$$

přičemž kalibrační podmínku chápeme v následujícím slabém smyslu:

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Pomocí formalismu lagrangeových multiplikátorů pro podmínky minima lze minimalizační úlohu (3.34) ekvivalentně přepsat na následující variační formulaci úlohy 3d magnetostatiky (3.13): hledáme $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_0$ a $\lambda \in V_0 := H_0^1(\Omega)$ tak, že

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} \nabla\lambda \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{v} & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0, \\ \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla\varphi = 0 & \forall \varphi \in V_0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Jelikož navíc proudové hustoty jsou ve slabém smyslu bezdivergentní, výsledné lagrangeovské multiplikátory λ jsou nulové a úlohu (3.35) lze ještě zjednodušit.

Poznamenejme, že mezi inženýry je oblíbenější následující formulace: hledáme $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{V}_0$ tak, že

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot}(\mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{v}) + \varepsilon \int_{\Omega} \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0,$$

kde $\varepsilon > 0$ je regularizační parametr, přičemž platí, že pro $\varepsilon \rightarrow 0$ konverguje přibližné řešení \mathbf{u}_ε ke správnému řešení \mathbf{u} úlohy (3.35) v normě $\|\cdot\|_{\mathbf{rot}}$. Vztah posledně zmíněné formulace a smíšené formulace (3.35) je podobný jako byl v kapitole 2.3.1 vztah formulací (2.15) a (2.16).

3.4.2 Hranově–uzlová metoda konečných prvků

Diskretizujeme Ω do m čtyřstěnů, jejichž vnitřky (otevřené oblasti) značíme T^k

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^m \bar{T}^k, \quad T^i \cap T^j = \emptyset \text{ pro } i \neq j,$$

tak, že dva sousední čtyřstěny mají společnou buď právě jednu stěnu, nebo hranu, nebo bod. Zároveň chceme, aby povrchy čtyřstěnů zahrnuly všechny hranice a rozhraní v geometrii, tj.

$$\bigcup_{k=1}^m \partial T^k \supset (\partial\Omega \cup \partial\Omega_r \cup \partial\Omega_{\text{left}} \cup \partial\Omega_{\text{right}} \cup \partial\Omega_{\text{front}} \cup \partial\Omega_{\text{back}}).$$

Konečně chceme, aby nejostřejší úhel, který stěny svírají, byl zdola omezený konstantou. Definujeme diskretizační parametr $h > 0$ jako délku nejkratší hrany v diskretizaci.

Budeme se zabývat MKP diskretizací dvou prostorů, a to $\mathbf{V}_0 := \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$ a $V_0 := H_0^1(\Omega)$. Začneme tím jednodušším, druhým. Zapomeňme zatím na nulovou okrajovou podmínku $\varphi = 0$ na $\partial\Omega$. Nad každým uzlem diskretizace \mathbf{x}^i , $i = 1, 2, \dots, n$, definujeme uzlovou konečně–prvkovou bázeovou funkcí $e^i(\mathbf{x}) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že

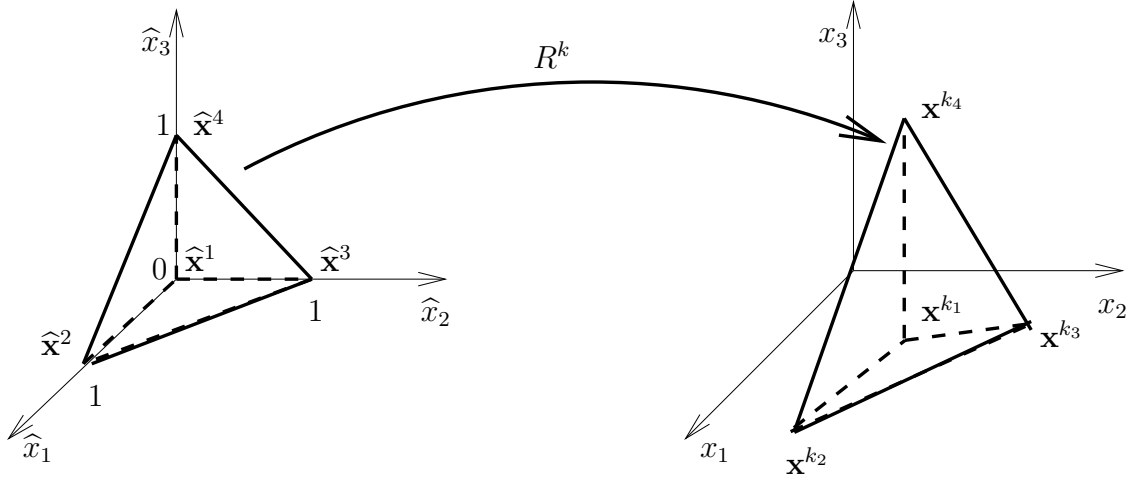
$$e^i(\mathbf{x})|_{T^k} = a_k^i + b_k^i x_1 + c_k^i x_2 + d_k^i x_3 \quad \text{a} \quad e^i(\mathbf{x}^j) = \delta_{ij},$$

kde $a_k^i, b_k^i, c_k^i, d_k^i \in \mathbb{R}$. Takto získáváme aproximaci $V^h := \langle e^1(\mathbf{x}), \dots, e^n(\mathbf{x}) \rangle$ prostoru $V := H^1(\Omega)$.

Bázeové funkce budeme konstruovat technikou referenčního čtyřstěnu (elementu) lokálními příspěvky z jednotlivých čtyřstěnů. Zvolme afinní substituci

$$\mathbf{x} := R^k(\hat{\mathbf{x}}) := \mathbf{R}^k \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^{k_1}, \quad \text{kde } \mathbf{R}^k := (\mathbf{x}^{k_2} - \mathbf{x}^{k_1}, \mathbf{x}^{k_3} - \mathbf{x}^{k_1}, \mathbf{x}^{k_4} - \mathbf{x}^{k_1}),$$

kteřá zobrazuje referenční čtyřstěn \hat{T} s vrcholy (uzly) $\hat{\mathbf{x}}^1 := (0, 0, 0)$, $\hat{\mathbf{x}}^2 := (1, 0, 0)$, $\hat{\mathbf{x}}^3 := (0, 1, 0)$ a $\hat{\mathbf{x}}^4 := (0, 0, 1)$ na T^k s vrcholy \mathbf{x}^{k_1} , \mathbf{x}^{k_2} , \mathbf{x}^{k_3} a \mathbf{x}^{k_4} orientované



Obrázek 3.13: Transformace referenčního čtyřstěnu \widehat{T} na T^k .

ve stejném smyslu jako referenční uzly, viz Obr. 3.13. Referenční uzlové bázové funkce pro konstrukci prostoru V^h jsou pak tyto:

$$\widehat{e}^1(\widehat{\mathbf{x}}) := 1 - \widehat{x}_1 - \widehat{x}_2 - \widehat{x}_3, \quad \widehat{e}^2(\widehat{\mathbf{x}}) := \widehat{x}_1, \quad \widehat{e}^3(\widehat{\mathbf{x}}) := \widehat{x}_2, \quad \widehat{e}^4(\widehat{\mathbf{x}}) := \widehat{x}_3$$

a splňují $\widehat{e}^i(\widehat{\mathbf{x}}^j) = \delta_{ij}$. Bázové funkce prostoru V^h jsou $e^{k_i}(\mathbf{x}) := \widehat{e}^i(\widehat{\mathbf{x}})$ pro $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ a $\widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{T}$ při substituci $\mathbf{x} := R^k(\widehat{\mathbf{x}})$. Pro smíšenou bilineární formu $\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi$ ve formulaci (3.35) potřebujeme spočítat gradienty bázových funkcí, pro něž lze ukázat platnost analogického vzorce jako ve 2 dimenzích, viz (2.19),

$$\mathbf{B}_{\nabla}^k := (\nabla e^{k_1}(\mathbf{x}), \nabla e^{k_2}(\mathbf{x}), \nabla e^{k_3}(\mathbf{x}), \nabla e^{k_4}(\mathbf{x})) = (\mathbf{R}^k)^{-T} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

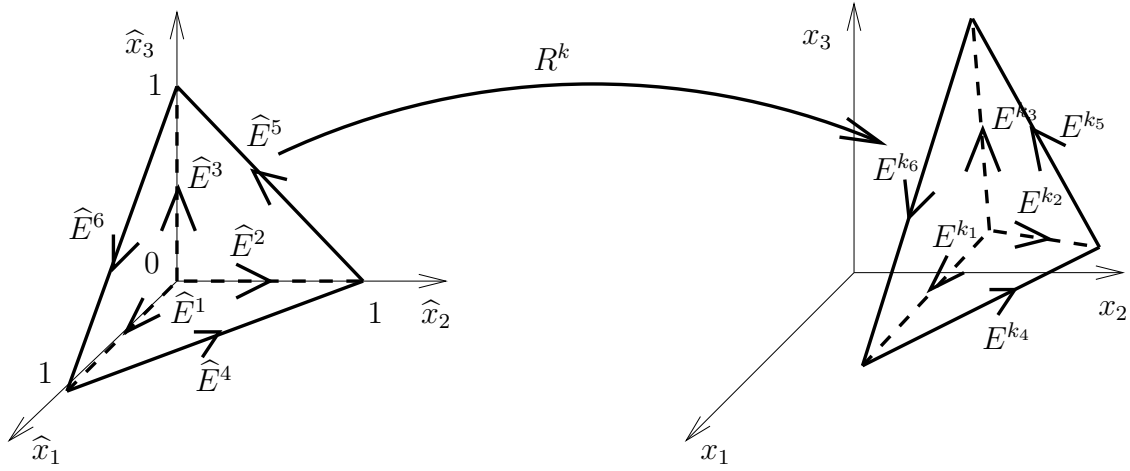
kde matice $(\mathbf{R}^k)^{-T}$ obsahuje derivace vnitřní funkce, tedy afinního zobrazení R^k , a sloupce druhé matice jsou gradienty referenčních bázových funkcí.

Nyní se podívejme na MKP diskretizaci prostoru $\mathbf{V}_0 := \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$. Okrajovou podmínku $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ nechme opět zatím stranou. Zatímco v elektrostatice, resp. při aproximaci prostoru $H^1(\Omega)$, vyžadujeme jistou existenci všech parciálních derivací², což zajistíme požadavkem na spojitost konečně-prvkových funkcí, v magnetostatice, tedy při aproximaci prostoru $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$, vyžadujeme pouze jistou existenci

²Chceme, aby slabé derivace funkce $\varphi \in L^2(\Omega)$ byly lebesgueovsky integrovatelné s kvadrátem

$$(\forall i \in \{1, 2, 3\}) (\exists \Psi_i \in L^2(\Omega)) (\forall \eta \in C_0^\infty(\Omega)) : \int_{\Omega} \Psi_i \eta = - \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial \eta}{\partial x_i},$$

a označíme $\partial \varphi / \partial x_i := \Psi_i$.



Obrázek 3.14: Transformace z referenčního Nédélecova hranového prvku \hat{T} na T^k .

aplikací operátoru rotace³, což zajistíme požadavkem na spojitost tečných složek konečně-prvkových funkcí. Jedním z možných tvarů těchto funkcí jsou následující Nédélecovy [7] hranové funkce, které jsou definovány nad každou orientovanou hranou $E^i : \mathbf{x}^{i_1} \rightarrow \mathbf{x}^{i_2}$, $i \in \{1, 2, \dots, n_e\}$ diskretizace:

$$\boldsymbol{\xi}^i(\mathbf{x})|_{T^k} = \mathbf{a}_k^i + \mathbf{b}_k^i \times \mathbf{x} \quad \text{a} \quad \int_{E^j} \boldsymbol{\xi}^i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}^j dl(\mathbf{x}) = \delta_{ij},$$

kde $\mathbf{t}_j := (\mathbf{x}^{j_2} - \mathbf{x}^{j_1}) / |\mathbf{x}^{j_2} - \mathbf{x}^{j_1}|$ je tečný vektor k hraně E^j . Jednoznačné přiřazení orientace hran v diskretizaci dává jednoznačnou hranovou MKP bázi. Uvažujme opět referenční čtyřstěn s orientovanými hranami $\hat{E}^1 : \hat{\mathbf{x}}^1 \rightarrow \hat{\mathbf{x}}^2$, $\hat{E}^2 : \hat{\mathbf{x}}^1 \rightarrow \hat{\mathbf{x}}^3$, $\hat{E}^3 : \hat{\mathbf{x}}^1 \rightarrow \hat{\mathbf{x}}^4$, $\hat{E}^4 : \hat{\mathbf{x}}^2 \rightarrow \hat{\mathbf{x}}^3$, $\hat{E}^5 : \hat{\mathbf{x}}^3 \rightarrow \hat{\mathbf{x}}^4$, $\hat{E}^6 : \hat{\mathbf{x}}^4 \rightarrow \hat{\mathbf{x}}^2$, viz Obr. 3.14. Referenční bázevé funkce jsou pak tyto:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\xi}}^1(\hat{\mathbf{x}}) &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \hat{\mathbf{x}}, & \hat{\boldsymbol{\xi}}^2(\hat{\mathbf{x}}) &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \hat{\mathbf{x}}, \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}^3(\hat{\mathbf{x}}) &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \hat{\mathbf{x}}, & \hat{\boldsymbol{\xi}}^4(\hat{\mathbf{x}}) &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \hat{\mathbf{x}}, \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}^5(\hat{\mathbf{x}}) &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \hat{\mathbf{x}}, & \hat{\boldsymbol{\xi}}^6(\hat{\mathbf{x}}) &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \hat{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

³Chceme, aby slabá rotace funkce $\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3$ byla lebesgueovsky integrovatelná s kvadrátem

$$\left(\exists \mathbf{w} \in (L^2(\Omega))^3 \right) \left(\forall \mathbf{z} \in (C_0^\infty(\Omega))^3 \right) : \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{z}),$$

a označíme $\mathbf{rot}(\mathbf{v}) := \mathbf{w}$.

kteřé splňují $\int_{\widehat{E}^j} \widehat{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{t}^j dl(\widehat{\mathbf{x}}) = \delta_{ij}$. Jim odpovídající konečně-prvkové bázové funkce jsou tyto:

$$\boldsymbol{\xi}^{k_i}(\mathbf{x}) = \text{sign}_k(E^{k_i}) (\mathbf{R}^k)^{-T} \cdot \widehat{\boldsymbol{\xi}}(\widehat{\mathbf{x}}),$$

kde k_1, k_2, \dots, k_6 jsou indexy orientovaných hran čtyřstěnu T^k při transformaci $\mathbf{x} := R^k(\widehat{\mathbf{x}})$, přičemž

$$\text{sign}_k(E^{k_i}) := \begin{cases} 1, & \text{orientace } E^{k_i} \text{ je shodná s orientací } \widehat{E}^i \\ -1, & \text{orientace } E^{k_i} \text{ je opačná k orientaci } \widehat{E}^i. \end{cases}$$

Navíc potřebujeme rotace těchto funkcí. Díky $\text{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{x}) = 2\mathbf{b}$, dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\text{rot}}^k &:= (\text{rot}(\boldsymbol{\xi}^1), \text{rot}(\boldsymbol{\xi}^2), \text{rot}(\boldsymbol{\xi}^3), \text{rot}(\boldsymbol{\xi}^4), \text{rot}(\boldsymbol{\xi}^5), \text{rot}(\boldsymbol{\xi}^6)) \\ &= \frac{1}{\det(\mathbf{R}^k)} \mathbf{R}^k \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \text{diag}(\text{sign}_k(E^{k_i}))_{i=1}^6. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Konečně potřebujeme hodnoty bázových funkcí v těžišti $\mathbf{x}_c^k := (1/4) \sum_{i=1}^4 \mathbf{x}^{k_i}$ čtyřstěnu T^k , dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\text{Id}}^k &:= (\boldsymbol{\xi}^1(\mathbf{x}_c^k), \boldsymbol{\xi}^2(\mathbf{x}_c^k), \boldsymbol{\xi}^3(\mathbf{x}_c^k), \boldsymbol{\xi}^4(\mathbf{x}_c^k), \boldsymbol{\xi}^5(\mathbf{x}_c^k), \boldsymbol{\xi}^6(\mathbf{x}_c^k)) \\ &= (\mathbf{R}^k)^{-T} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \text{diag}(\text{sign}_k(E^{k_i}))_{i=1}^6. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Lokální příspěvek do matice bilineární formy $\int_{\Omega} (1/\mu) \text{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$ je

$$\mathbf{A}^k := \frac{1}{\mu^k} (\mathbf{B}_{\text{rot}}^k)^T \cdot \mathbf{B}_{\text{rot}}^k \frac{|\det(\mathbf{R}^k)|}{6},$$

kde $\mu^k := \mu(\mathbf{x})|_{T^k}$. Lokální příspěvek do matice bilineární formy $\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi$ je

$$\mathbf{B}^k := (\mathbf{B}_{\nabla}^k)^T \cdot \mathbf{B}_{\text{Id}}^k \frac{|\det(\mathbf{R}^k)|}{6}.$$

Lokální příspěvek vektoru lineární formy $\int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{v}$ je

$$\mathbf{b}^k := (\mathbf{B}_{\text{Id}}^k)^T \cdot \mathbf{j}^k \frac{|\det(\mathbf{R}^k)|}{6},$$

kde $\mathbf{j}^k := \mathbf{j}(\mathbf{x})|_{T^k}$. Dále sestavíme globální matice a vektory

$$\widetilde{\mathbf{A}} := \sum_{k=1}^m \mathcal{G}^k(\mathbf{A}^k), \quad \widetilde{\mathbf{B}} := \sum_{k=1}^m \mathcal{L}^k(\mathbf{B}^k), \quad \widetilde{\mathbf{b}} := \sum_{k=1}^m \mathcal{H}^k(\mathbf{b}^k),$$

kde $\mathcal{G}^k : \mathbb{R}^{6 \times 6} \rightarrow \mathbb{R}^{n_e \times n_e}$ zobrazuje lokální hranové matice na globální, $\mathcal{L}^k : \mathbb{R}^{4 \times 6} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n_e}$ zobrazuje lokální smíšené uzlově–hranové matice na globální a $\mathcal{H}^k : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^{n_e}$ zobrazuje lokální hranové vektory na globální. Ty nakonec restringujeme na vnitřní stupně volnosti

$$\mathbf{A} := \tilde{\mathbf{A}}_{I^e, I^e}, \quad \mathbf{B} := \tilde{\mathbf{B}}_{I, I^e}, \quad \mathbf{b} := \tilde{\mathbf{b}}_{I^e},$$

kde $I^e := \{i_1^e, i_2^e, \dots, i_{n_0^e}^e\}$ je množina globálních indexů hran neležících na $\partial\Omega$ a $I := \{i_1, i_2, \dots, i_{n_0}\}$ je množina globálních indexů uzlů taktéž neležících na $\partial\Omega$. MKP diskretizace úlohy (3.35) dává následující soustavu $n_0^e + n_0$ lineárních rovnic o stejném počtu neznámých:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Přibližné řešení úlohy (3.35) je

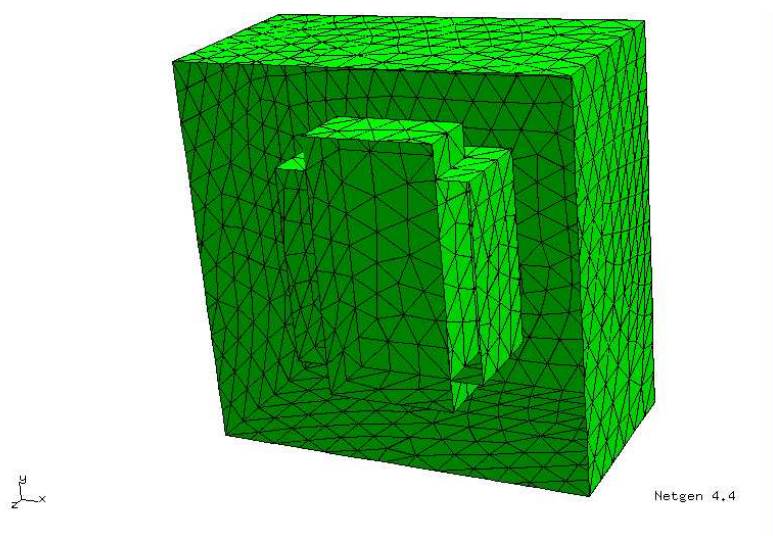
$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{n_0^e} u_k \boldsymbol{\xi}^{i_k}(\mathbf{x}).$$

Pole magnetické indukce je na každém čtyřstěnu konstantní

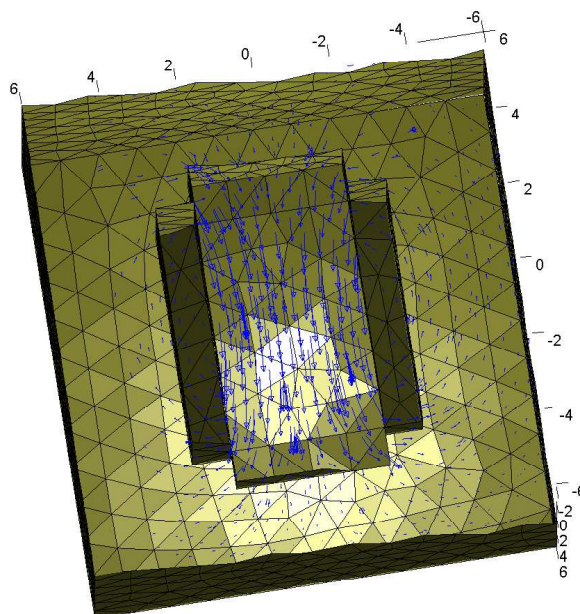
$$\mathbf{B}^h(\mathbf{x})|_{T^k} = \mathbf{B}_{\text{rot}}^k \cdot \mathbf{u}^k,$$

kde \mathbf{u}^k je lokální vektor řešení doplněný o nuly pro hrany čtyřstěnu T^k ležící na $\partial\Omega$.

Na Obr. 3.15 je vykreslena diskretizace geometrie $\Omega := (-6, 6)^3$, $\Omega_j := (-3, 3)^3 \setminus ((-2, 2) \times (-3, 3) \times (-2, 2))$, $\Omega_r := (-2, 2) \times (-4, 4) \times (-2, 2)$, s diskretizačním parametrem $h := 1$ vedoucím na $n := 2401$ uzlů a $m := 4608$ trojúhelníků. Diskretizace byla vytvořena programem NETGEN [?]. Řešení úlohy (3.39) pro volbu $\mu_r := 5000$, $J := 0.25$ je vykresleno na Obr. 3.16. Úloha byla naprogramována a řešena v prostředí MATLAB [5].



Obrázek 3.15: Diskretizace geometrie cívky programem NETGEN [?].



Obrázek 3.16: Řešení **B** úlohy (3.39) metodou smíšených konečných prvků.

Kapitola 4

Elektromagnetické záření

4.1 Fyzikální podstata

Zatím jsme se zabývali časově neměnnými poli, které můžeme sumarizovat do první verze Maxwellových rovnic:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{D}(\mathbf{x})) &= \rho(\mathbf{x}) \\ \operatorname{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \text{elektrostatika,}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x})) &= \mathbf{j}(\mathbf{x}) \\ \operatorname{div}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{magnetostatika,}$$

kteří jsou doplněny o materiálové vztahy

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mu_r(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x}),$$

o okrajové podmínky, podmínky na rozhraní a podmínky v nekonečnu. Zavedeme-li potenciály $\mathbf{E} = -\nabla u$ a $\mathbf{B} = \operatorname{rot}(\mathbf{u})$, Maxwellovy rovnice se redukuje do výpočetně příjemnějších rovnic

$$-\operatorname{div}(\varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) = \rho(\mathbf{x}),$$

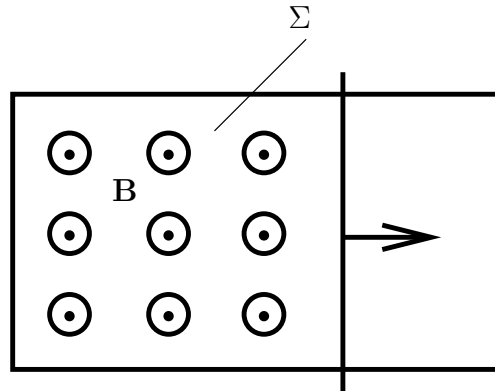
$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu_0 \mu_r(\mathbf{x})} \operatorname{rot}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\right) = \mathbf{j}(\mathbf{x}).$$

Elektrické a magnetické pole však obecně existují ve vzájemném souladu. První vztah mezi nimi nám dává Ohmův zákon. Ten modeluje vodivé materiály, v nichž velký počet volných elektronů po vložení do elektrického pole vytváří elektrický proud

$$\mathbf{j}_{\text{Ohm}}(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}),$$

kde nový materiálový parametr σ je elektrická vodivost. Máme tedy obecnější stacionární případ Maxwellových rovnic

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{D}(\mathbf{x})) &= \rho(\mathbf{x}), \\ \operatorname{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) &= \mathbf{0}, \\ \operatorname{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x})) &= \mathbf{j}(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}), \\ \operatorname{div}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) &= 0. \end{aligned} \right.$$



Obrázek 4.1: Elektromagnetická indukce.

Nyní se zabýváme časově proměnným elektromagnetickým polem. Prvním významným objevem je Faradayův zákon elektromagnetické indukce: Časové změny magnetického pole indukují elektrické pole, které působí proti těmto změnám. Ilustrujme si to na Obr. 4.1, kde měníme obsah Σ proudové smyčky, která je umístěna kolmo k poli magnetické indukce. Při této změně můžeme ve smyčce naměřit elektrický proud. Kvantitativní účinek elektromagnetické indukce je vyjádřen v integrální rovnici

$$\oint_{\partial\Sigma(t)} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{l}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma(t)} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS(\mathbf{x}).$$

Aplikací Stokesovy věty dostáváme pozměněnou Maxwellovu rovnici

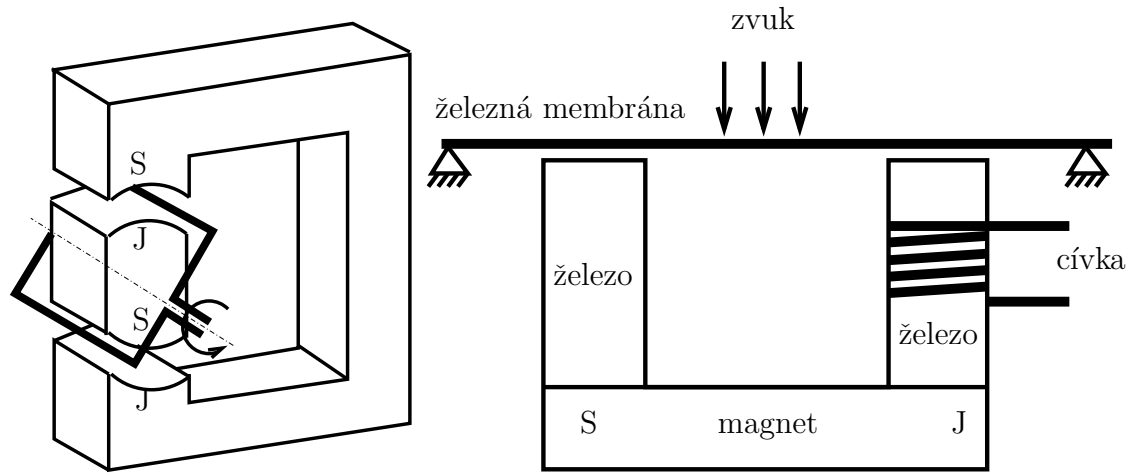
$$\mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}.$$

Objev elektromagnetické indukce dal vzniknout velké škále průmyslových vynálezů. Např. mechanickou energii lze převádět na elektromagnetickou a naopak, viz Obr. 4.2 (vlevo), taktéž energii akustickou, viz Obr. 4.2 (vpravo).

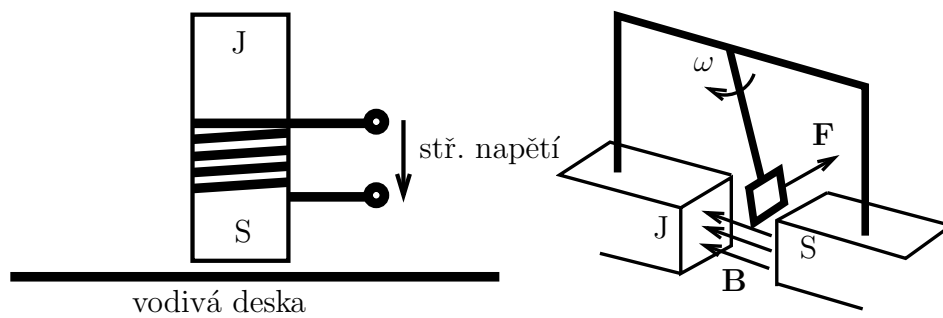
Zákon elektromagnetické indukce spolu s Ohmovým zákonem dává vznik tzv. vířivých proudů, které se indukují ve vodivém prostředí při změně magnetické indukce

$$\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\sigma(\mathbf{x})} \mathbf{j}_{\text{Ohm}}(\mathbf{x}, t) \right) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}.$$

Ty způsobují zahřívání jader transformátoru, což se eliminuje tím, že se jádra nevyrobějí jako souvislé bloky feromagnetika, které je vodivé, nýbrž z navzájem izolovaných plechů. Vířivých proudů samozřejmě dovedeme i využít např. v elektrické peci, viz Obr. 4.3 (vlevo), kdy využíváme Ohmových ztrát generovaných střídavým magnetickým polem k zahřívání. Jiné využití je u elektrické brzdy, viz Obr. 4.3 (vpravo), kdy sepnutím elektromagnetu se generují vířivé proudy, které brzdí silou \mathbf{F} mechanický rotační pohyb o úhlové rychlosti ω .



Obrázek 4.2: Princip motoru a generátoru (vlevo), princip telefonu a reproduktoru (vpravo).



Obrázek 4.3: Princip elektrické pece (vlevo), princip elektrické brzdy (vpravo).

Maxwellovy rovnice nyní máme v následujícím tvaru

$$\begin{cases} \mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) &= -\partial\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)/\partial t, \\ \mathbf{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) &= \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \sigma(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \\ \operatorname{div}(\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)) &= \rho(\mathbf{x}, t), \\ \operatorname{div}(\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) &= 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Poslední důležitý objev, který tím dal i název našim rovnicím, učinil skotský fyzik James Clerk Maxwell, když si v rovnicích (4.1) všimnul, že v nevodivých materiálech by neplatil zákon zachování náboje

$$0 = \operatorname{div}(\mathbf{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t))) = \operatorname{div}(\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)) = -\frac{\partial\rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \neq 0,$$

kde jsme postupně použili vektorovou identitu $\operatorname{div}(\mathbf{rot}(\cdot)) = 0$, druhou rovnici z (4.1) pro $\sigma := 0$ a zákon zachování náboje (3.1). Z třetí rovnice v (4.1)

$$0 \neq -\frac{\partial\rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div}\left(\frac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\right)$$

si Maxwell vypůjčil veličinu $\partial\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)/\partial t$, nazval ji posuvným proudem a korigoval o tento člen Maxwellovy rovnice do jejich (pro účely tohoto textu) konečné podoby:

$$\begin{cases} \mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) &= -\partial\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)/\partial t, \\ \mathbf{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) &= \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \partial\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)/\partial t + \sigma(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \\ \operatorname{div}(\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)) &= \rho(\mathbf{x}, t), \\ \operatorname{div}(\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) &= 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Typický příklad, kde pozorujeme existenci Maxwellova posuvného proudu, je při nabíjení kondenzátoru, viz Obr. 4.4, kde z Ampérova zákona pro uzavřenou křivku Γ plyne

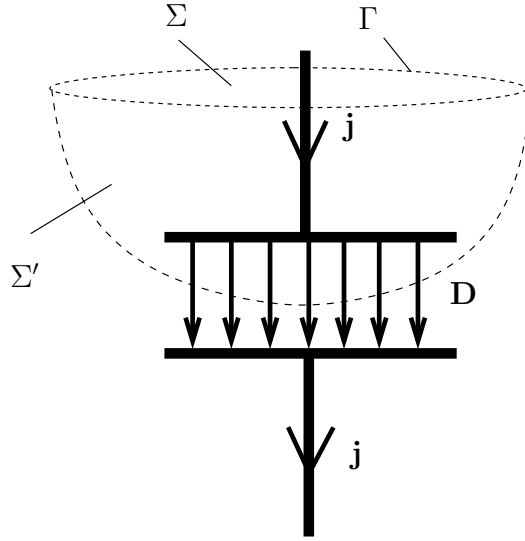
$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS(\mathbf{x}) \neq 0$$

a ze zákona zachování náboje přes uzavřenou plochu $\Sigma \cup \Sigma'$ plyne

$$\int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma'} \frac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS(\mathbf{x}).$$

Je známo, že elektromagnetické pole se šíří i ve vakuu a částečně jej vnímáme jako světlo. Odvodme si nyní jeho vlnové rovnice. Uvažujme homogenní prostředí s konstantní permitivitou ε , konstantní permeabilitou μ a konstantní vodivostí σ . Aplikací operátoru rotace na první rovnici v (4.2) a derivací druhé rovnice v (4.2) podle času dostáváme vlnovou rovnici pro intenzitu elektrického pole

$$\varepsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t))) = -\mu \frac{\partial\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \quad (4.3)$$



Obrázek 4.4: Maxwellův posuvný proud při nabíjení kondenzátoru.

Podobně aplikací operátoru rotace na druhou rovnici v (4.2) a derivací první rovnice v (4.2) podle času dostáváme vlnovou rovnici pro intenzitu magnetického pole

$$\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t))) = \mathbf{rot}(\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)). \quad (4.4)$$

Konstanta $\varepsilon \mu =: 1/c^2$ ve vlnové rovnici určuje rychlost c šíření pole v daném prostředí, tedy rychlost šíření světla ve vakuu je $1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \approx 3 \cdot 10^8$ [m s⁻¹].

Nechť dále prostředí neobsahuje volné náboje $\rho := 0$, pak díky třetí Maxwellově rovnici v (4.2) platí $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{D})) = -\Delta \mathbf{D}$ a díky čtvrté rovnici v (4.2) platí i $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{B})) = -\Delta \mathbf{B}$. Zanedbejme rovněž vodivost $\sigma := 0$, která má ve vlnové rovnici tlumící efekt, pak dostáváme následující tvar vlnových rovnic:

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) / \partial t^2 - \Delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) & = -\mu \partial \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) / \partial t, \\ \frac{1}{c^2} \partial^2 \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) / \partial t^2 - \Delta \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) & = \mathbf{rot}(\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)). \end{cases} \quad (4.5)$$

Na dokonalých vodičích dochází k odrazu vlnění, které se řídí okrajovou podmínkou

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Opět platí podmínky poklesu polí v nekonečnu

$$|\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)| \rightarrow 0 \text{ a } |\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)| \rightarrow 0 \text{ pro } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,$$

podmínky přechodu (2.5), (3.5), a navíc dodáme počáteční podmínky

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} = \dot{\mathbf{E}}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} = \dot{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x}).$$

Všimněme si, že pro výpočet elektromagnetického pole stačí řešit pouze jednu z rovnic (4.5), přičemž při znalosti \mathbf{E} , resp. \mathbf{H} , zbylou veličinu dopočteme z druhé, resp. první Maxwellovy rovnice (4.2).

Předpokládejme dále, že budící veličiny na pravých stranách v (4.5) mají v čase harmonický průběh s úhlovým kmitočtem ω , pak i elektromagnetické pole \mathbf{E} a \mathbf{H} jsou harmonické funkce v čase. Využijeme-li komplexních čísel, vlnové rovnice přecházejí v rovnice Helmholtzovy

$$\begin{cases} -\Delta \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) - \kappa^2 \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) &= \mu \nu \omega \widehat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}), \\ -\Delta \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) - \kappa^2 \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{rot}(\widehat{\mathbf{j}}(\mathbf{x})), \end{cases}$$

kde $\kappa := \omega/c$ je vlnové číslo a komplexní funkce $\widehat{\mathbf{j}}, \widehat{\mathbf{E}}, \widehat{\mathbf{H}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ určují $\mathbf{j}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$ takto:

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) =: \operatorname{Re} \left\{ \widehat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \right\}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) =: \operatorname{Re} \left\{ \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \right\}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) =: \operatorname{Re} \left\{ \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \right\},$$

kde užíváme exponenciální zápis komplexních čísel $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t)$.

Helmholtzovy rovnice doplníme o odraz na dokonalých vodičích

$$\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

a tzv. Silver-Müllerovu radiační podmínku

$$|\mathbf{x}| \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \times \mathbf{rot}(\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x})) + i\kappa \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) \right) \rightarrow 0 \quad \text{pro } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (4.6)$$

která kromě útlumu záření zaručí, že se vlny v nekonečnu neodrážejí.

Jedním z řešení (4.1) je rovinná vlna

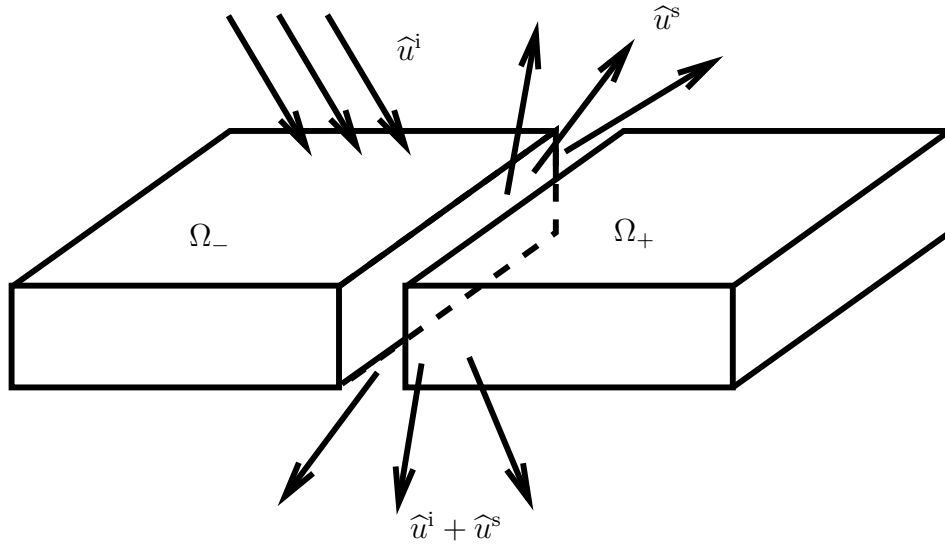
$$\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) := \widehat{\mathbf{E}}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}},$$

kde $\widehat{\mathbf{E}}_0 \in \mathbb{C}^3$ je tzv. fázor vlnění a vektor $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ určuje směr šíření vlny, přičemž $|\mathbf{k}| = \kappa$. Toto řešení však nesplňuje (4.6) a musíme proto být při jejím použití v matematickém modelování trochu obezřetní.

4.2 Modelová úloha

Uvažujme rovinou vlnu ve vakuu, která se rozptyluje od štěrbinu tvořené dvěma dokonale vodivými kvádry, viz Obr. 4.5. Abychom nemodelovali situaci, kterou lze jednodušeji popsat zákonem odrazu z geometrické optiky, předpokládejme, že vlnová délka

$$\lambda := \frac{2\pi}{\kappa} = 2\pi \frac{c}{\omega}$$



Obrázek 4.5: Rozptyl elektromagnetického vlnění na šterbině.

je srovnatelná se šířkou šterbiny. Z důvodu výrazně jednoduššího následného řešení metodou hraničních prvků¹, hledejme pouze jisté spojitě diferencovatelné rozšíření tečné složky intenzity elektrického pole. Označme toto pole $\hat{u} := \hat{\mathbf{E}}_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$. Splňuje okrajovou podmínku $\hat{u} = 0$ odrazu od dokonalého vodiče.

Předpokládáme rovinnou incidenční vlnu ve tvaru

$$\hat{u}^i(\mathbf{x}) := \hat{u}_0^i e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (4.7)$$

Poznamenejme, že její reálný průběh je

$$u^i(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \{ \hat{u}^i(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \} = |\hat{u}_0^i| \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \varphi_0),$$

kde $|\hat{u}_0^i|$ je intenzita záření, tedy velikost komplexního fázoru, a $\varphi_0 := \arg(\hat{u}_0^i)$ je jeho fázový posun v čase $t := 0$. Hledáme rozptýlenou² vlnu \hat{u}^s tak, že celkové záření

$$\hat{u}(\mathbf{x}) := \hat{u}^i(\mathbf{x}) + \hat{u}^s(\mathbf{x})$$

splňuje následující matematický model:

$$\begin{cases} -\Delta \hat{u}(\mathbf{x}) - \kappa^2 \hat{u}(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\ \hat{u}(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ |\mathbf{x}| \left(\nabla \hat{u}^s(\mathbf{x}) \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - i\kappa \hat{u}^s(\mathbf{x}) \right) \rightarrow 0, & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

¹V hraniční integrální formulaci úloh rozptylu elektromagnetického záření se používá tzv. Stratton-Chuova reprezentační formule a v metodě hraničních prvků hranové Nédélecovy hraniční prvky. Díky našemu zjednodušení si vystačíme s potenciálem jednoduché vrstvy a po trojúhelníkových konstantními prvky.

²Rozptýlená se anglicky řekne scattered, proto index 's'.

kde $\Omega := \Omega_- \cup \Omega_+ \subset \mathbb{R}^3$ je oblast vodivých kvádrů a kde jsme Silver–Müllerovu radiační podmínku (4.6) nahradili tzv. Sommerfeldovou radiační podmínkou. Jelikož incidenční rovinná vlna splňuje Helmholtzovu rovnici, hledáme vlastně rozptýlené pole \widehat{u}^s tak, že

$$\begin{cases} -\Delta \widehat{u}^s(\mathbf{x}) - \kappa^2 \widehat{u}^s(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\ \widehat{u}^s(\mathbf{x}) = -\widehat{u}^i(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ |\mathbf{x}| \left(\nabla \widehat{u}^s(\mathbf{x}) \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - \imath \kappa \widehat{u}^s(\mathbf{x}) \right) \rightarrow 0, & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (4.8)$$

Poznamenejme, že matematický model (4.8) popisuje i rozptyl akustického vlnění. Zvuk mnohem lépe obtéká překážky, neboť typické vlnové délky zvuku slyšitelného ve vzduchu jsou v metrech, zatímco vlnové délky světla viditelného ve vzduchu jsou v stovkách nanometrů.

4.3 3d elektromagnetické záření

4.3.1 Hraniční integrální formulace

Uvažujme modelovou úlohu (4.8) ve 3d. Nyní již nemusíme předpokládat nic o diametru oblasti Ω . Řešení \widehat{u}^s budeme hledat pomocí potenciálu jednoduché vrstvy.

$$\widehat{u}^s(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_-} w_-(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma_+} w_+(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \quad (4.9)$$

kde

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{e^{\imath \kappa |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

je fundamentální řešení Helmholtzovy rovnice, kde $\Gamma_- := \partial\Omega_-$ je povrch levého kvádrů, $\Gamma_+ := \partial\Omega_+$ je povrch pravého kvádrů, viz Obr. 4.5, a kde funkce $w_- : \Gamma_- \rightarrow \mathbb{C}$ a $w_+ : \Gamma_+ \rightarrow \mathbb{C}$ jsou hustoty potenciálů. Takto zvolené řešení již splňuje první a třetí řádek z formulace (4.8). Naším cílem bude najít w_- a w_+ tak, aby byla splněna i okrajová podmínka odrazu na Γ , tedy druhá rovnice z (4.8).

Jsou-li hustoty potenciálů spojité funkce, pak i ve 3d pro každý bod $\mathbf{x} \in \Gamma$, v jehož okolí je Γ hladká, tj. kromě rohů, platí, že pro $\Omega \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$:

$$\int_{\Gamma} w(\mathbf{y}) g(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \rightarrow \int_{\Gamma} w(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}).$$

Je zřejmé, že pokud bod \mathbf{x} leží mimo křivku, přes níž se integruje, pak je v \mathbf{x} příslušný potenciál také spojitý.

Pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, resp. $\mathbf{x} \in \Gamma$ (až na rohy), zavedme operátory

$$[V_- w](\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_-} w(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}), \quad [V_+ w](\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_+} w(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}).$$

Pak druhá rovnice v (4.8) dává následující hraničně–integrální formulaci

$$\begin{cases} [V_- w_-](\mathbf{x}) + [V_+ w_+](\mathbf{x}) = -\widehat{u}^i(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_-, \\ [V_- w_-](\mathbf{x}) + [V_+ w_+](\mathbf{x}) = -\widehat{u}^i(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_+. \end{cases} \quad (4.10)$$

4.3.2 Metoda hraničních prvků

Uvažujme diskretizaci Γ_- a Γ_+ do disjunktních otevřených trojúhelníků

$$\bigcup_{k=1}^{m_-} \overline{T_-^k} = \Gamma_- \quad \text{a} \quad \bigcup_{k=1}^{m_+} \overline{T_+^k} = \Gamma_+$$

tak, že uzávěry dvou různých trojúhelníků jsou buď disjunktní, nebo mají společný právě jeden vrchol, nebo mají společnou právě jednu hranu. Uvažujme po úsečkách konstantní bázové funkce f_-^i a f_+^i tak, že

$$f_-^i(\mathbf{x})|_{T_-^j} = \delta_{ij} \text{ pro } i = 1, \dots, m_-, \quad \text{resp.} \quad f_+^i(\mathbf{x})|_{T_+^j} = \delta_{ij} \text{ pro } i = 1, \dots, m_+.$$

Neznámé hustoty potenciálů hledáme v lineárním obalu této báze

$$w_-(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{m_-} w_{-k} f_-^k(\mathbf{x}), \quad w_+(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{m_+} w_{+k} f_+^k(\mathbf{x}),$$

přičemž hledané souřadnicové vektory označíme $\mathbf{w}_- := (w_{-1}, \dots, w_{-m_-})$ a $\mathbf{w}_+ := (w_{+1}, \dots, w_{+m_+})$.

V kolokační metodě hraničních prvků vyžadujeme splnění rovnic (4.10) pouze ve střezech trojúhelníků, které označíme $\mathbf{x}_-^k \in T_-^k$, $\mathbf{x}_+^k \in T_+^k$. To vede na soustavu $m_- + m_+$ lineárních rovnic o stejném počtu neznámých

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{-,-} & \mathbf{V}_{-,+} \\ \mathbf{V}_{+,-} & \mathbf{V}_{+,+} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{w}_- \\ \mathbf{w}_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{u}}_-^i \\ \widehat{\mathbf{u}}_+^i \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

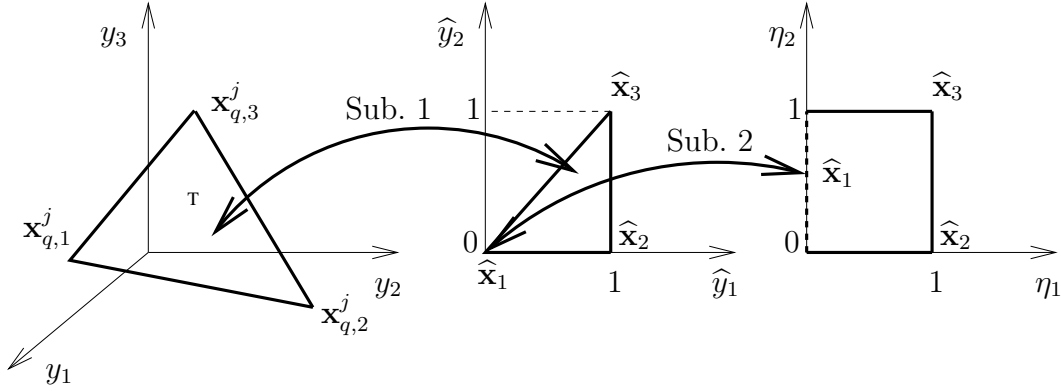
kde $(\mathbf{V}_{p,q})_{i,j} := \int_{T_q^j} g(\mathbf{x}_p^i, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y})$ a $(\widehat{\mathbf{u}}_p^i)_i := \widehat{u}^i(\mathbf{x}_p^i)$ pro $p, q \in \{-, +\}$.

Při sestavování matic $\mathbf{V}_{p,q}$ je třeba uvažovat dva případy integrálu, a to:

- regulární případ, kdy \mathbf{x}_p^i je těžištěm jiného trojúhelníku než T_q^j , tedy $p \neq q$ nebo $i \neq j$,
- nevlastní integrál, kdy \mathbf{x}_p^i je těžištěm trojúhelníku T_q^j , tedy $p = q$ a $i = j$.

Podívejme se nejprve na regulární případ. Následujícími dvěma substitucemi převedeme integrační oblast $T_q^j \subset \mathbb{R}^3$ na referenční čtverec $(0, 1)^2$, viz Obr. 4.6,

$$\text{Sub 1: } \widehat{\mathbf{y}} := \underbrace{(\mathbf{x}_{q,2}^j - \mathbf{x}_{q,1}^j, \mathbf{x}_{q,3}^j - \mathbf{x}_{q,2}^j)}_{=: \mathbb{R}_q^j} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}_{q,1}^j, \quad \text{Sub 2: } \eta_1 := \widehat{y}_1, \quad \eta_1 \eta_2 := \widehat{y}_2$$



Obrázek 4.6: Substituce na referenční trojúhelník a referenční čtverec.

a integrál se transformuje takto:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{V}_{p,q})_{i,j} &= \int_{T_q^j} \frac{e^{i\kappa |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}|}}{4\pi |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}|} dS(\mathbf{y}) \stackrel{\text{Sub.1}}{=} \\
 &\stackrel{\text{Sub.1}}{=} \int_0^1 \int_0^{\hat{y}_1} \frac{e^{i\kappa |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{R}_q^j \cdot \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_{q,1}^j|}}{4\pi |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{R}_q^j \cdot \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_{q,1}^j|} |\det \mathbf{R}_q^j| d\hat{y}_2 d\hat{y}_1 \stackrel{\text{Sub.2}}{=} \\
 &\stackrel{\text{Sub.2}}{=} \int_0^1 \int_0^1 \frac{e^{i\kappa |\mathbf{x}_p^i - \eta_1 \mathbf{R}_q^j \cdot (1, \eta_2) - \mathbf{x}_{q,1}^j|}}{4\pi |\mathbf{x}_p^i - \eta_1 \mathbf{R}_q^j \cdot (1, \eta_2) - \mathbf{x}_{q,1}^j|} |\det \mathbf{R}_q^j| d\eta_2 d\eta_1,
 \end{aligned}$$

kde jsme značili rohy T_q^j v pravotočivém smyslu jako $\mathbf{x}_{q,1}^j$, $\mathbf{x}_{q,2}^j$ a $\mathbf{x}_{q,3}^j$. Všimněme si, že druhá substituce transformuje bod $\hat{\mathbf{y}} = (0, 0)$ na úsečku $\eta_1 = 0$, což je v Lebesgueově integrálu povoleno, zatímco v Riemannově integrálu zakázáno. Cílem našich substitucí je nyní přibližný výpočet dvojnásobnou Gaussovou kvadraturou přes úsečky $(0, 1)$:

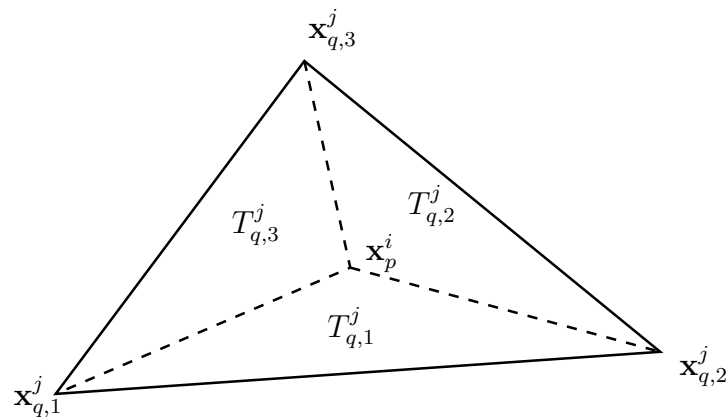
$$(\mathbf{V}_{p,q})_{i,j} \approx \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N w_{\alpha}^N w_{\beta}^N \xi_{\alpha}^N \frac{e^{i\kappa |\mathbf{x}_p^i - \xi_{\alpha}^N \mathbf{R}_q^j \cdot (1, \xi_{\beta}^N) - \mathbf{x}_{q,1}^j|}}{4\pi |\mathbf{x}_p^i - \xi_{\alpha}^N \mathbf{R}_q^j \cdot (1, \xi_{\beta}^N) - \mathbf{x}_{q,1}^j|} |\det \mathbf{R}_q^j|,$$

$p \neq q$, nebo $i \neq j$.

Při zvyšování řádu kvadratury N získáváme přesnější aproximaci integrálu. Gaussovy kvadrurní body ξ_k^N a příslušné váhy w_k^N pro několik uvádíme v Tab. 4.1.

Nyní se podívejme na singulární případ, kdy kolokační bod \mathbf{x}_p^i je těžištěm trojúhelníku T_q^j . V tomto případě trojúhelník T_q^j se singularitou v těžišti \mathbf{x}_p^i rozložíme podle Obr. 4.7 na trojúhelníky $T_{q,1}^j$, $T_{q,2}^j$ a $T_{q,3}^j$ se singularitami v rohu \mathbf{x}_p^i a použijeme substituce na referenční trojúhelník, viz Obr. 4.6 (uprostřed), tak, aby se singulární

řád N	body ξ_k^N	váhy w_k^N
1	$\frac{1}{2}$	1
2	$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$
	$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$	$\frac{5}{18}$
4	$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3-2\sqrt{6/5}}}{2\sqrt{7}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{72}$
	$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3+2\sqrt{6/5}}}{2\sqrt{7}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{72}$
5	$\frac{1}{2}$	$\frac{64}{225}$
	$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5-2\sqrt{10/7}}}{6}$	$\frac{322+13\sqrt{70}}{1800}$
	$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5+2\sqrt{10/7}}}{6}$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{1800}$

Tabulka 4.1: Gaussova kvadratura na úsečce $(0, 1)$.

Obrázek 4.7: Dekompozice trojúhelníku na tři se singularitami v rozích.

bod \mathbf{x}_p^i vždy transformoval na $\hat{\mathbf{x}}_1 := (0, 0)$

$$\text{Sub 3: } \hat{\mathbf{y}} := \underbrace{(\mathbf{x}_{q,1}^j - \mathbf{x}_p^i, \mathbf{x}_{q,2}^j - \mathbf{x}_{q,1}^j)}_{=: \mathbb{R}_{q,1}^j} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}_p^i,$$

$$\text{Sub 4: } \hat{\mathbf{y}} := \underbrace{(\mathbf{x}_{q,2}^j - \mathbf{x}_p^i, \mathbf{x}_{q,3}^j - \mathbf{x}_{q,2}^j)}_{=: \mathbb{R}_{q,2}^j} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}_p^i,$$

$$\text{Sub 5: } \hat{\mathbf{y}} := \underbrace{(\mathbf{x}_{q,3}^j - \mathbf{x}_p^i, \mathbf{x}_{q,1}^j - \mathbf{x}_{q,3}^j)}_{=: \mathbb{R}_{q,3}^j} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}_p^i.$$

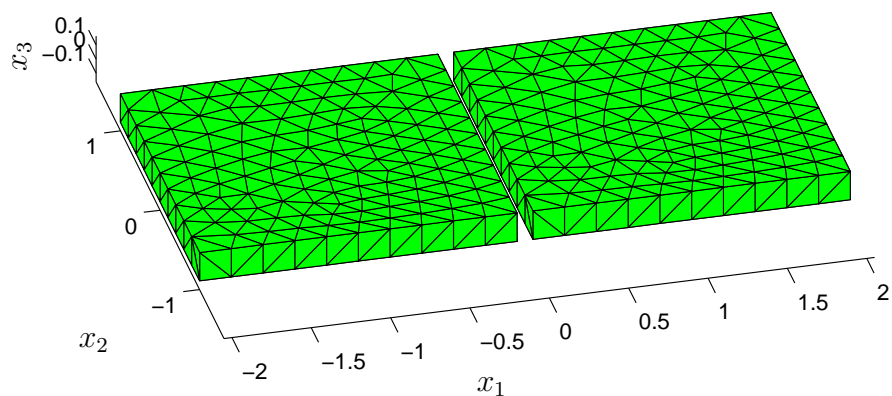
Následně singularity odstraníme substitucí 2. Integrál se tedy transformuje takto:

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_{p,q})_{i,j} &= \int_{T_q^j} \frac{e^{i\kappa |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}|}}{4\pi |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}|} dS(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^3 \int_{T_{q,k}^j} \frac{e^{i\kappa |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}|}}{4\pi |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}|} dS(\mathbf{y}) \stackrel{\text{Sub.3,4,5}}{=} \\ &\stackrel{\text{Sub.3,4,5}}{=} \sum_{k=1}^3 \int_0^1 \int_0^{\hat{y}_1} \frac{e^{i\kappa |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{R}_{q,k}^j \cdot \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_p^i|}}{4\pi |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{R}_{q,k}^j \cdot \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_p^i|} |\det \mathbf{R}_{q,k}^j| d\hat{y}_2 d\hat{y}_1 \stackrel{\text{Sub.2}}{=} \\ &\stackrel{\text{Sub.2}}{=} \sum_{k=1}^3 \int_0^1 \int_0^1 \frac{e^{i\kappa \eta_1 |\mathbf{R}_{q,k}^j \cdot (1, \eta_2)|}}{4\pi |\mathbf{R}_{q,k}^j \cdot (1, \eta_2)|} |\det \mathbf{R}_{q,k}^j| d\eta_2 d\eta_1. \end{aligned}$$

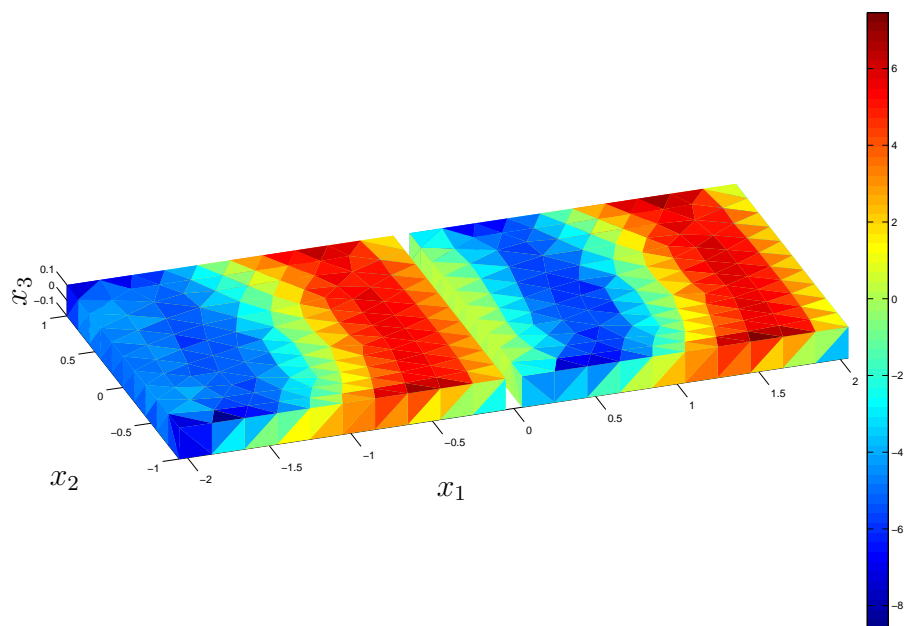
Nakonec integrál spočteme přibližně Gaussovou kvadraturou, viz Tab. 4.1,

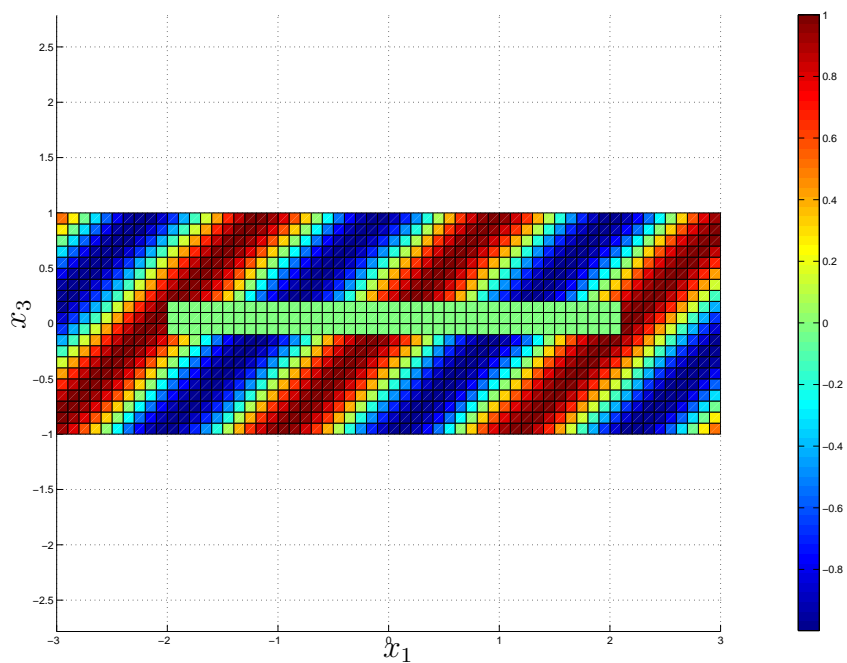
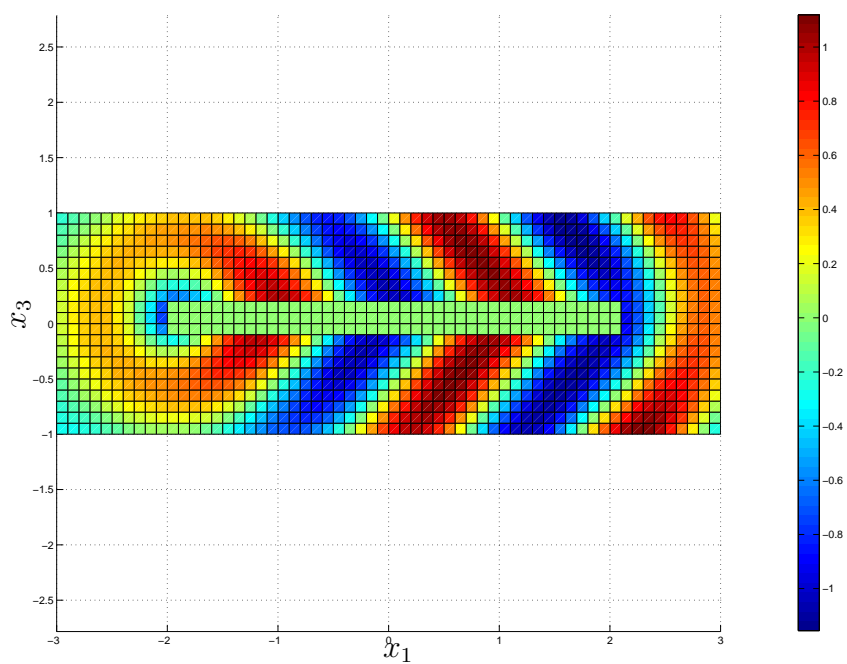
$$(\mathbf{V}_{p,q})_{i,j} \approx \sum_{k=1}^3 \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N w_\alpha^N w_\beta^N \frac{e^{i\kappa \xi_\alpha^N |\mathbf{R}_{q,k}^j \cdot (1, \xi_\beta^N)|}}{4\pi |\mathbf{R}_{q,k}^j \cdot (1, \xi_\beta^N)|} |\det \mathbf{R}_{q,k}^j|, \quad p = q \text{ a } i = j.$$

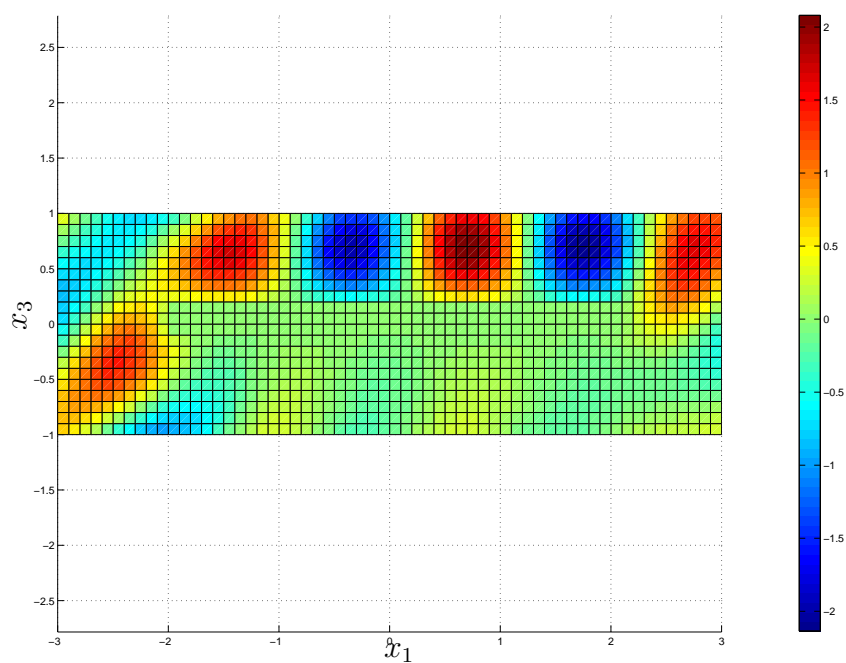
Na Obr. 4.8 je povrchová diskretizace geometrie $\Omega_- := (-2.05, -0.05) \times (-1, 1) \times (-0.1, 0.1)$ a $\Omega_+ := (0.05, 2.05) \times (-1, 1) \times (-0.1, 0.1)$ s diskretizačním parametrem $h := 0.2$, což vede na $m_- = m_+ := 282$ trojúhelníků. Geometrii ozařujeme shora incidenční vlnou \hat{u}^i , která dopadá v rovině $x_2 := 0$ zleva pod úhlem 45° s vlnovou délkou $\lambda := 1.5$, viz Obr. 4.10. Reálné složky vypočtených hustot potenciálů jednoduché vrstvy w_- a w_+ jsou na Obr. 4.9. Reálná složka vypočteného odraženého pole \hat{u}^s je vykreslena v rovině $x_2 := 0$ na Obr. 4.11. Celková reálná složka $\hat{u} := \hat{u}^s + \hat{u}^i$ v rovině $x_2 := 0$ je na Obr. 4.12. Při výpočtu jsme použili Gaussovou kvadraturu řádu $N := 5$.



Obrázek 4.8: Hraniční diskretizace oblasti.

Obrázek 4.9: Reálná složka řešení w_- a w_+ úlohy (4.10).

Obrázek 4.10: Reálná složka incidentní vlny \hat{u}^i (4.7).Obrázek 4.11: Reálná složka odražené vlny \hat{u}^s (4.9).



Obrázek 4.12: Reálná složka celkové vlny $\hat{u} := \hat{u}^i + \hat{u}^s$.

Literatura

- [1] J. Bouchala, Úvod do "Boundary Elements Method". Přednášky zimní školy SNA 2007, Ostrava.
- [2] M. Costabel, Symmetric methods for coupling of finite and boundary elements. In: Brebbia, C., Wendland, W., Kuhn, G. (editoři), Boundary Elements IX, str. 411–420, Springer, 1987.
- [3] R.P. Feynman, R.B. Leightons a M. Sands, Feynmanovy přednášky z fyziky, 3. díl. Fragment, 2006.
- [4] M. Křížek a K. Segeth, Numerické modelování problémů elektrotechniky. Karolinum, Praha, 2001.
- [5] MATLAB User's Manual. The Mathworks, Inc., 1993.
- [6] P. Monk, Finite Element Methods for Maxwell's Equations. Clarendon Press, Oxford, 2003.
- [7] J.C. Nédélec, Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Numerische Mathematik* **35**:315–341, 1980.
- [8] M. Sadowská, Řešení variačních nerovnic pomocí hraničních integrálních rovnic. Diplomová práce, VŠB–Technická univerzita Ostrava, 2005.
- [9] J. Schöberl, Numerical Methods for Maxwell's Equations. Elektronická skripta, TU Vídeň, 2009.
- [10] O. Steinbach a S. Rjasanow, The Fast Solution of Boundary Integral Equations. Springer, 2007.

Rejstřík

formulace

- energetická, 9, 27
- hraniční integrální, 14, 29, 52
- variační, 7, 26, 38
 - penalizovaná, 9, 39
 - smíšená, 10, 38

hustota

- elektrického potenciálu, 15
- elektrického proudu, 20
- elektromagnetického potenciálu, 52
- magnetického potenciálu, 30
- náboje, 2

indukce

- elektrická, 5
- elektromagnetická, 46
- magnetická, 20

intenzita

- elektrická, 2
- magnetická, 22

metoda

- hraničních prvků
 - uzlová, 16, 31, 32, 53
- konečných prvků
 - hranová, 39
 - smíšená, 12, 39
 - uzlová, 11, 27, 32
- partikulárního řešení, 9

náboj

- elektrický, 2
- magnetický, 21

permeabilita, 21

permitivita, 2

podmínky

- na rozhraní
 - elektrické, 5
 - magnetické, 23
- v nekonečnu, 5, 23, 49

potenciál

- jednoduché vrstvy, 14, 30, 52
- Newtonův objemový, 30
- skalární elektrický, 5
- vektorový magnetický, 23

proud

- elektrický, 20
- Maxwellův posuvný, 48
- vířivý, 46

síla

- Coulombova, 2
- Lorentzova, 20

vodivost, 45

věta

- Gaussova, 3, 20, 21
- Greenova, 8, 26
- Stokesova, 5, 21, 46

zákon

- Ampérův, 21
- Coulombův, 2
- Faradayův, 46
- Gaussův, 3
- Ohmův, 45
- zachování náboje, 20