Fyzika Maxwellových rovnic a formulace okrajových úloh

Seminář Helmholtzových rovnic, 3. a 10. dubna 2007

Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky,
VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

http://lukas.am.vsb.cz/talks/Fyzika_Maxwellovych_rovnic.pdf

Fyzika Maxwellových rovnic a formulace okrajových úloh

Motto

„Budiž elektromagnetické pole ... a bylo světlo."

Richard P. Feynman

Fyzika Maxwellových rovnic a formulace okrajových úloh

Osnova

- Elektrostatika
- Magnetostatika
- Maxwellovy rovnice
- Elektromagnetické vlnění
- Odraz a lom světla

Fyzika Maxwellových rovnic a formulace okrajových úloh

Osnova

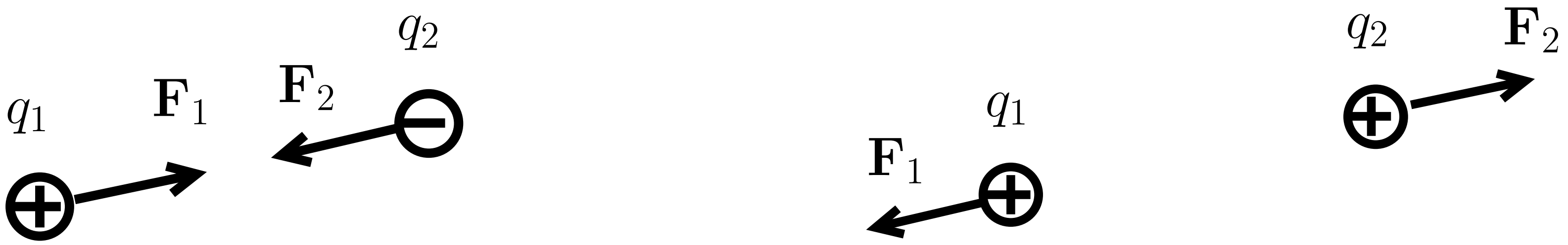
- Elektrostatika
- Magnetostatika
- Maxwellovy rovnice
- Elektromagnetické vlnění
- Odraz a lom světla

Elektrostatika

popisuje časově neměnná eletrická (silová) pole nabitých těles.

Coulombův zákon

vyjadřuje síly mezi náboji.



$$\mathbf{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2} \cdot \mathbf{e}_{12} = -\mathbf{F}_2,$$

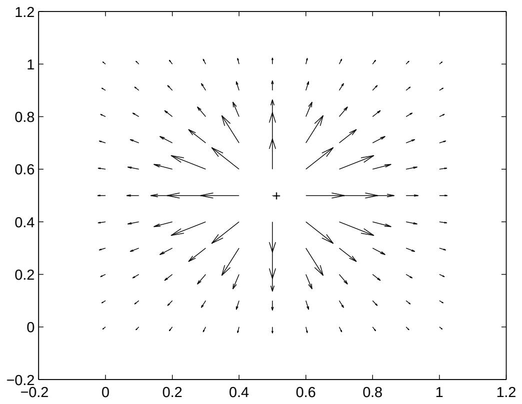
$q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ ... elektrické náboje (v Coulombech),
$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ ... polohy nábojů, $\mathbf{e}_{12} := (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)/|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$,
$\varepsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12}$ ... permitivita vakua

Elektrostatika

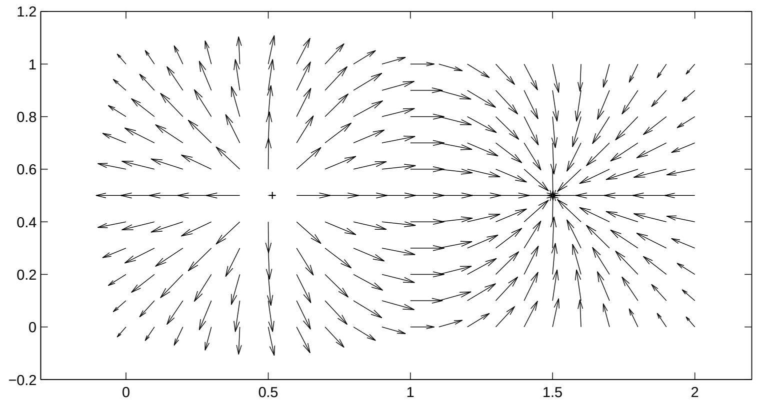
Intenzita elektrického pole

je síla elektrického pole na jednotkový náboj.

pole kladného náboje



pole dvou nesouhlasných nábojů



Platí princip superpozice, např.:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\Omega \frac{\rho(\mathbf{y})(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}\, dV(\mathbf{y}),$$

kde $\rho(\mathbf{y})$ je objemová hustota náboje v $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, tj. $\mathrm{supp}(\rho) \subset \Omega$.

Elektrostatika

Gaussův zákon (ve vakuu)

Tok elektrického pole z povrchu objemového elementu je určen náboji v tomto objemu. Gaussův zákon je ekvivalentní s Coulombovým zákonem.

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x})\, dV(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \Omega \subset \mathbb{R}^3,$$

kde $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ je vnější jednotková normála k $\partial\Omega$.

Gaussova věta: $\oint_{\partial\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{E}(\mathbf{x}))\, dV(\mathbf{x})$ dává

$$\boxed{\operatorname{div}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.}$$

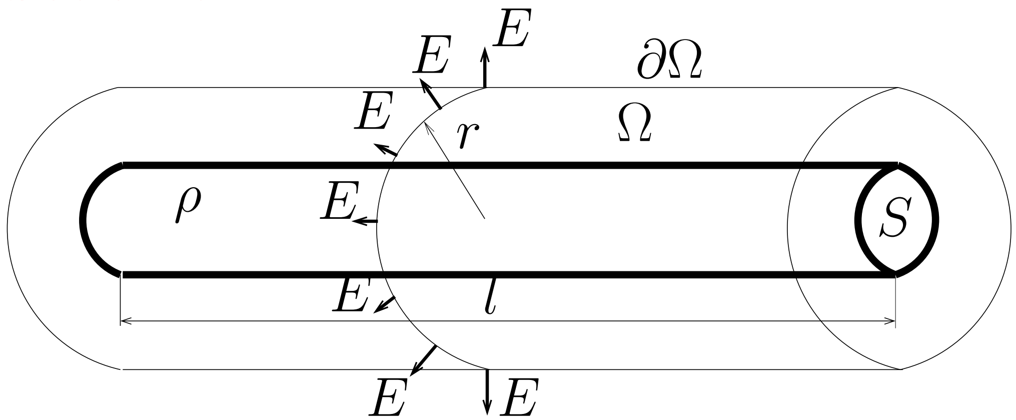
Elektrostatika

Příklad 1: Pole dlouhé nabité tyče

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}\, dV(\mathbf{x})$$

$$E(r) 2\pi r l = \frac{\rho S l}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho S}{2\pi r \varepsilon_0}$$

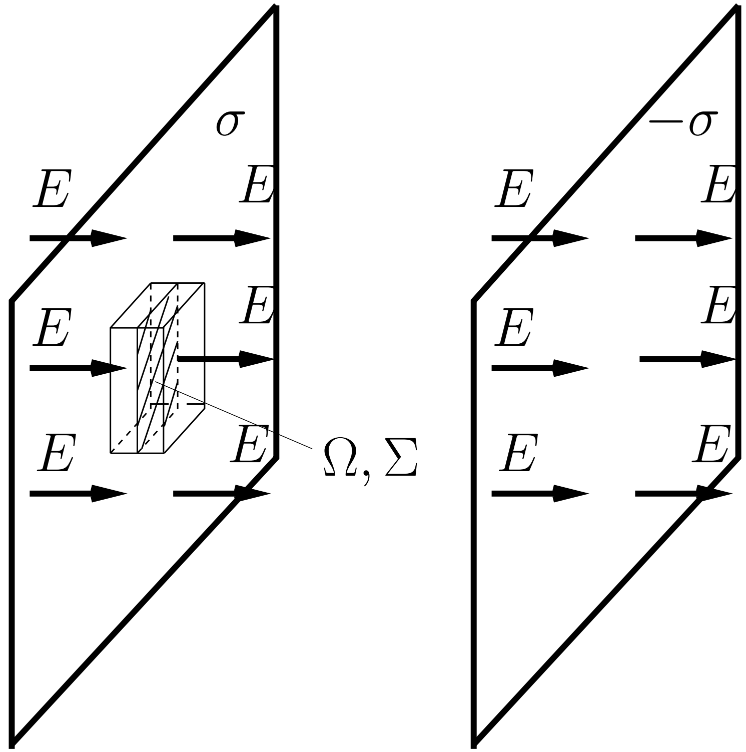


Příklad 2: Pole nabité desky

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{E}_{+}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} \frac{\sigma(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}\, dS(\mathbf{x})$$

$$2E_{+}|\Sigma| = \frac{\sigma|\Sigma|}{\varepsilon_0}$$

$$E_{+} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



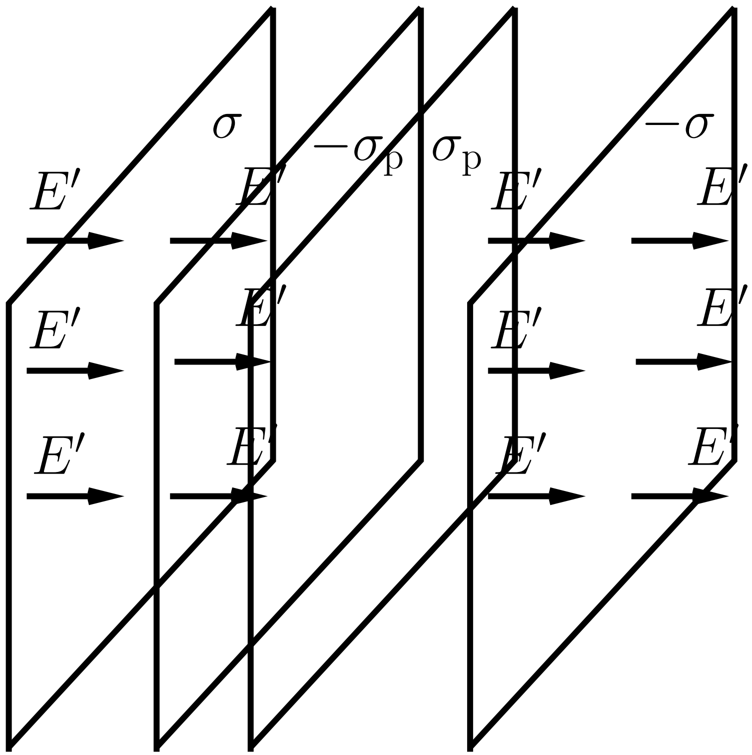
Příklad 3: Pole deskového kondenzátoru

$$E = 2E_{+} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Elektrostatika

Příklad 4: Pole dvou vnořených deskových kondenzátorů s opačnou orientací

$E' = E - E_\mathrm{p} = \frac{\sigma - \sigma_\mathrm{p}}{\varepsilon_0}$



Příklad modeluje chování polarizovaných nábojů (vnitřní kondenzátor) v dielektriku, které je vloženo do elektrostatického pole (vnější kondenzátor).

Elektrostatika

Gaussův zákon v dielektriku

V dielektrických materiálech se po vložení do elektrostatického pole vytvoří vrstvy polarizovaných nábojů orientovaných v souladu s vnějším polem. Ty se chovají jako vnořené kondenzátory, viz příklad 4, tedy zeslabují vnější pole.

Označme $\rho_{\mathrm{pol}}(\mathbf{x}) = \mathrm{div}(-\mathbf{P}(\mathbf{x}))$ hustotu polarizovaného náboje v dielektriku, kde $\mathbf{P}$ je elektrostatická polarizace.

$$\mathrm{div}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) = \frac{\rho(\mathbf{x}) + \rho_{\mathrm{pol}}(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}$$

$$\mathrm{div}(\varepsilon_{\mathrm{r}}\mathbf{E}(\mathbf{x})) := \mathrm{div}\left(\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}\right) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0},$$

kde $\varepsilon_{\mathrm{r}} \geq 1$ je relativní permitivita. Označme $\mathbf{D}(\mathbf{x}) := \varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x})$ el. indukci:

$$\boxed{\mathrm{div}(\mathbf{D}(\mathbf{x})) = \rho(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.}$$

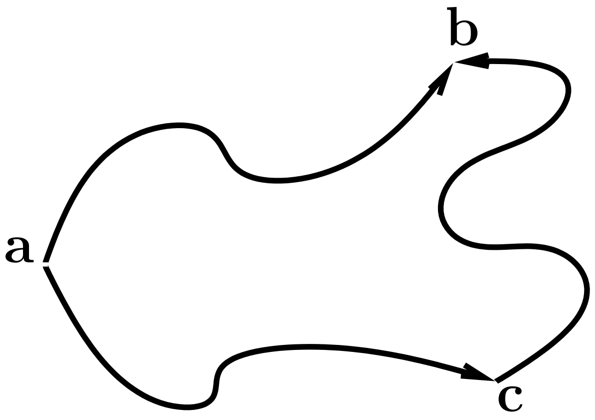
Elektrostatika

Elektrický potenciál (napětí)

Elektrostatické pole je potenciální:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla u(\mathbf{x}),$$

kde u je elektrický potenciál (napětí). Tzn. práce, kterou vykoná elektrostatické pole působící na jednotkový náboj, nezávisí na dráze:



$$W_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} = -\int_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} \mathbf{E}(\mathbf{x})\,\mathbf{dl}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} \nabla u(\mathbf{x})\,\mathbf{dl}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{b}) - u(\mathbf{a})$$

$$= W_{\mathbf{a}\to\mathbf{c}} + W_{\mathbf{c}\to\mathbf{b}}$$

a tedy:

$$-\oint_k \mathbf{E}(\mathbf{x})\,\mathbf{dl}(\mathbf{x}) = 0$$

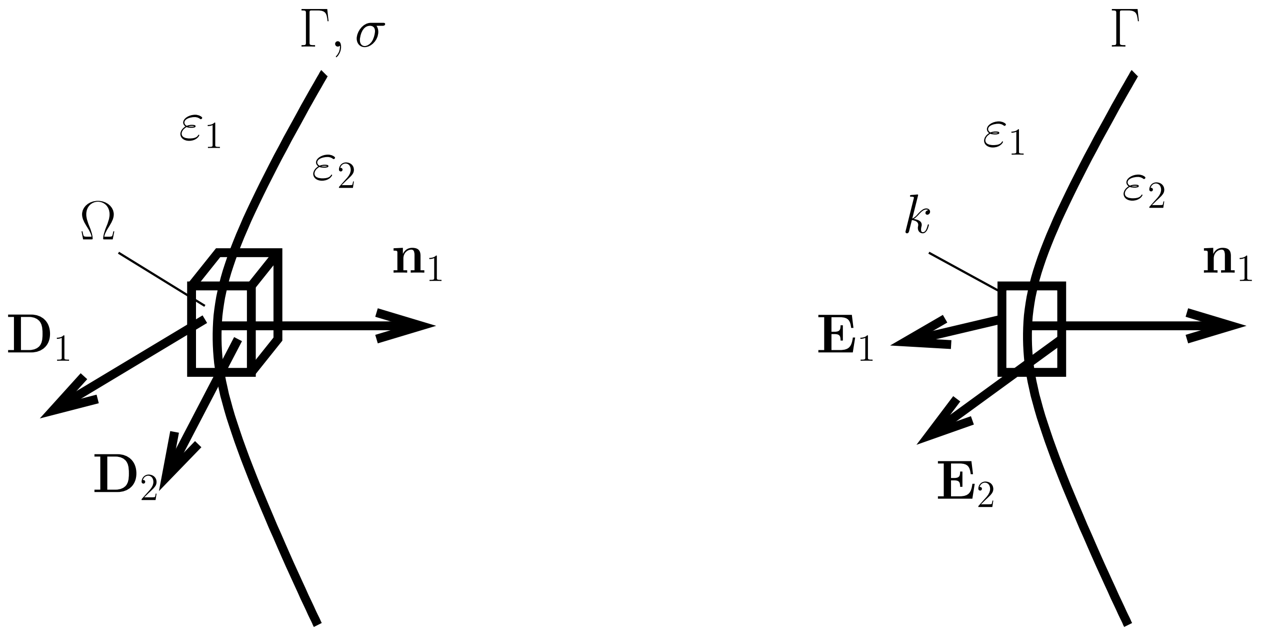
pro jakoukoliv uzavřenou křivku k.

Stokesova věta: $\oint_{\partial S} \mathbf{E}(\mathbf{x})\,\mathbf{dl}(\mathbf{x}) = \int_S \mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x})$ dává

$$\boxed{\mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.}$$

Elektrostatika

Podmínky na rozhraní



$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}) = \int_\Omega \rho(\mathbf{x})\,dV(\mathbf{x}) \Rightarrow \boxed{(\mathbf{D}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{D}_2(\mathbf{x}))\cdot\mathbf{n}_1(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x}\in\Gamma.}$$

$$\oint_k \mathbf{E}(\mathbf{x})\,\mathbf{dl}(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \boxed{(\mathbf{E}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{E}_2(\mathbf{x}))\times\mathbf{n}_1(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pro } \mathbf{x}\in\Gamma.}$$

Elektrostatika

Příklad formulace elektrostatické úlohy

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) = \dfrac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \\ u(\mathbf{x}) = \overline{u} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad \textbf{Je to nutné?} \\ u(\mathbf{x}) = O(1/|\mathbf{x}|) \quad \text{pro } |\mathbf{x}| \to \infty \end{cases}$$

kde $\mathrm{supp}\,\rho \subset \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená neprázdná oblast, na jejíž hranici je aplikováno napětí $\overline{u}$.

$\varepsilon_r(\mathbf{x}) \equiv 1$:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\, dV(\mathbf{y}).$$

Fyzika Maxwellových rovnic a formulace okrajových úloh

Osnova

- Elektrostatika
- Magnetostatika
- Maxwellovy rovnice
- Elektromagnetické vlnění
- Odraz a lom světla

Magnetostatika

popisuje magnetická (silová) pole stacionárních proudů.

Zákon zachování náboje

Úbytek náboje v objemovém elementu odpovídá toku náboje z povrchu elementu:

$$\oint_{\partial\Omega} \rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = -\int_{\Omega} \frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial t}\, dV(\mathbf{x}),$$

kde $\mathbf{v}$ je rychlost toku náboje (rychlost elektronů), t je čas.

Označme $\mathbf{j}(\mathbf{x}) := \rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})$ hustotu elektrického proudu. Pak Gaussova věta dává

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}(\mathbf{x})) = -\frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial t}.$$

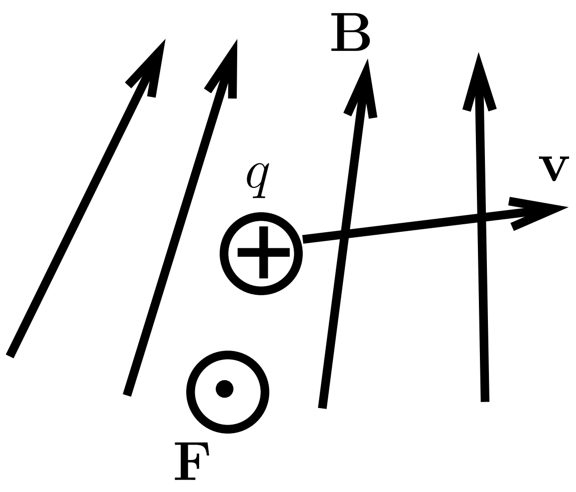
Označme dále tok elektrického náboje trubicí o průřezu Σ jako elektrický proud

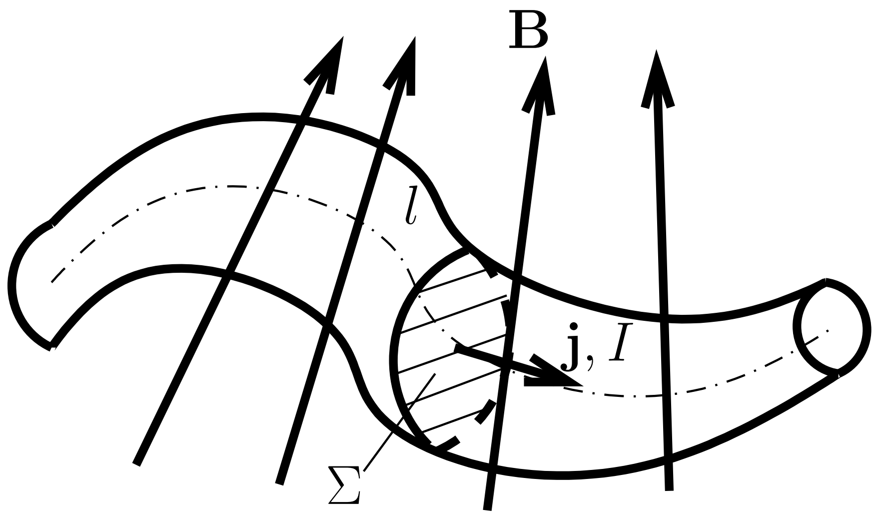
$$I(\Sigma) := \int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \text{konst}.$$

Magnetostatika

Lorentzova síla

je síla působící na pohybující se náboj nebo na proudovodič.





$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{F} = \int_l \int_{\Sigma(\mathbf{y})} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{x})\, dl(\mathbf{y}) = \int_l I(\mathbf{y})\mathbf{n}(\mathbf{y}) \times \mathbf{B}(\mathbf{y})\, dl(\mathbf{y}),$$

kde $\mathbf{B}$ je pole magnetické indukce.

Magnetostatika

Neexistují magnetické náboje.

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = 0$$

Gaussova věta dává:

$$\boxed{\operatorname{div}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.}$$

Ampérův zákon (ve vakuu)

Magnetické pole rotuje kolem budících proudů:

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{B}(\mathbf{x})\, \mathbf{dl}(\mathbf{x}) = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}),$$

kde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ je permeabilita vakua, přičemž $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, kde c je rychlost světla.
Stokesova věta dává:

$$\boxed{\mathbf{rot}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.}$$

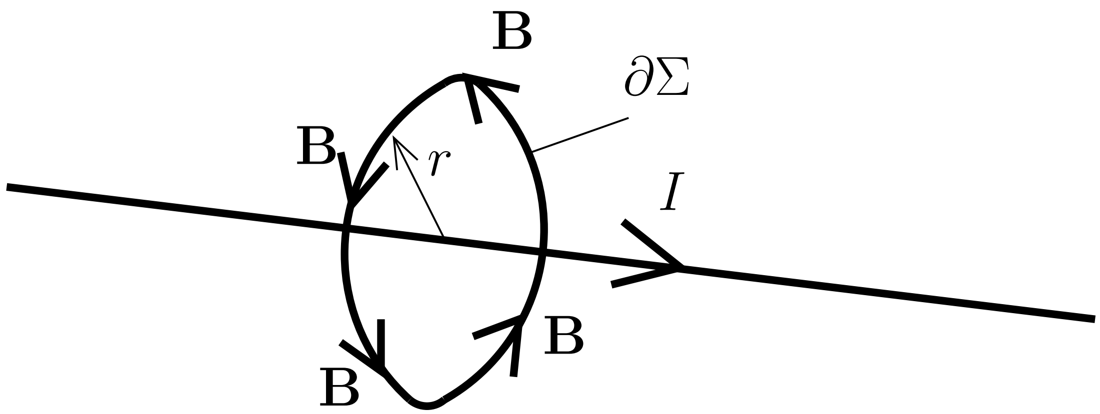
Magnetostatika

Příklad 5: Pole dlouhého vodiče

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{B}(\mathbf{x})\,\mathbf{dl}(\mathbf{x}) = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x})$$

$$B(r)2\pi r = \mu_0 I$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



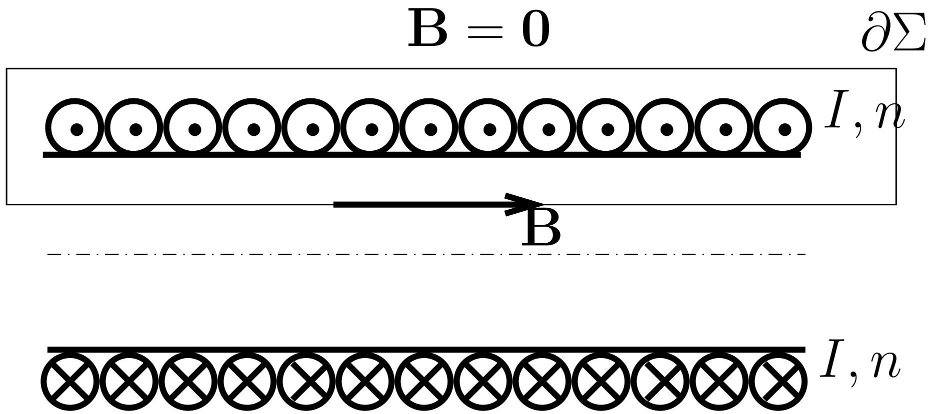
Příklad 6: Pole dlouhé cívky

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{B}(\mathbf{x})\,\mathbf{dl}(\mathbf{x}) = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x})$$

$$Bl = \mu_0 n l I$$

$$B = \mu_0 n I,$$

kde n je hustota závitů.

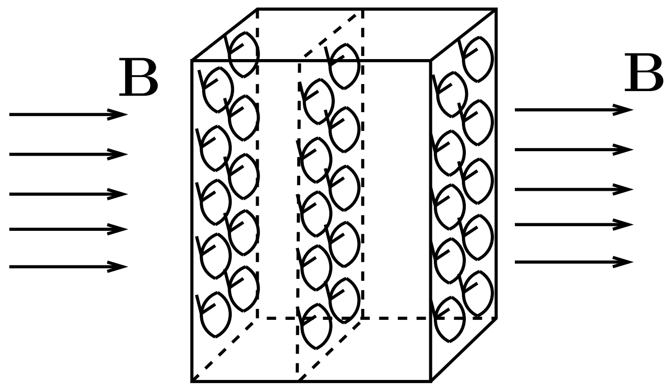


Magnetostatika

Ampérův zákon ve feromagnetiku

Ve feromagnetických materiálech se po vložení do magnetického pole vytvoří vrstvy zmagnetizovaných proudových smyček orientovaných v souladu s vnějším polem tak, že magnetické pole zesilují.

Označme $\mathbf{j}_{\mathrm{mag}}(\mathbf{x}) = \mathbf{rot}(\mathbf{M}(\mathbf{x}))$ hustotu magnetizovaných dipólů, kde $\mathbf{M}$ je magnetizace.



$$\mathbf{rot}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) = \mu_0(\mathbf{j}(\mathbf{x}) + \mathbf{j}_{\mathrm{mag}}(\mathbf{x}))$$

$$\mathbf{rot}\left(\frac{1}{\mu_{\mathrm{r}}}\mathbf{B}(\mathbf{x})\right) := \mathbf{rot}\left(\mathbf{B}(\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x})}{\mu_0}\right) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}),$$

kde $\mu_{\mathrm{r}} \geq 1$ je relativní permebailita.

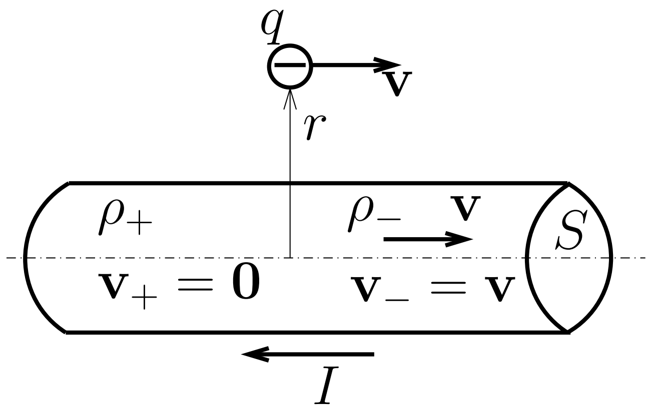
Označme $\mathbf{H}(\mathbf{x}) := \frac{1}{\mu_0\mu_{\mathrm{r}}(\mathbf{x})}\mathbf{B}(\mathbf{x})$ magnetickou intenzitu:

$$\boxed{\mathbf{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x})) = \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.}$$

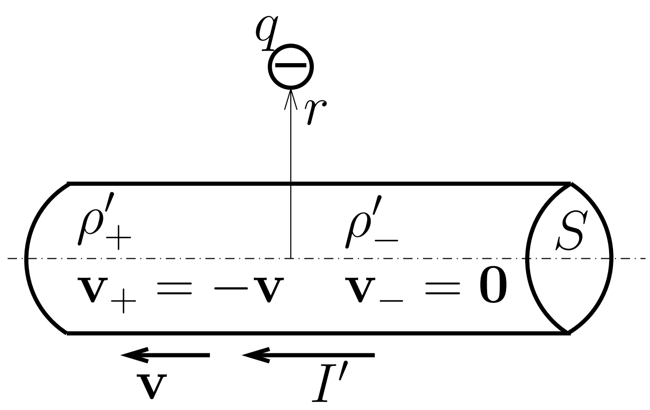
Magnetostatika

Teorie relativity: elektřina=magnetizmus

a) vodič v klidu, náboj v pohybu



b) náboj v klidu, vodič v pohybu



magnetostatika:

$$-\rho_+ = \rho_-$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times B = \frac{qv\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_- S}{r}\frac{v^2}{c^2}$$

elektrostatika:

Náboj se zachovává, ale zkracuje se délka, tj. mění se hustota náboje:

$\rho'_+ = \rho_+ \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, $\rho'_- = \rho_-$

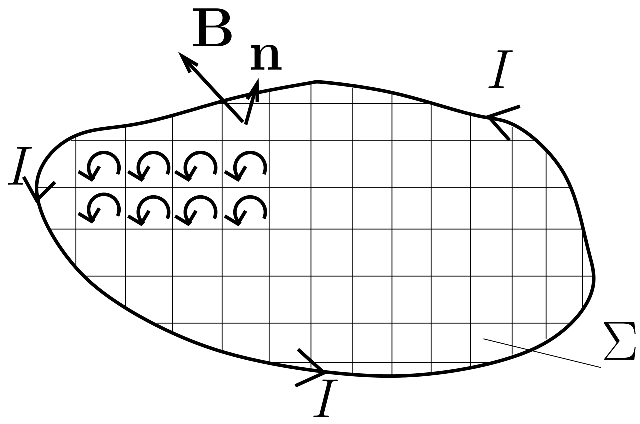
$$\mathbf{F}' = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_+ S}{r}\frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx \mathbf{F} \text{ pro } v \ll c$$

Magnetostatika

Magnetický vektorový potenciál

Energie proudové smyčky:

$$W = I \int_\Sigma \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}).$$



Definujme magnetický vektorový potenciál $\mathbf{A}$:
$\mathbf{rot}(\mathbf{A}(\mathbf{x})) = \mathbf{B}(\mathbf{x})$. Stokesova věta dává

$$W = I \int_\Sigma \mathbf{rot}(\mathbf{A}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = I \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{A}(\mathbf{x})\, \mathbf{dl}(\mathbf{x}).$$

$\mathbf{A}$ je nejednoznačný, neboť

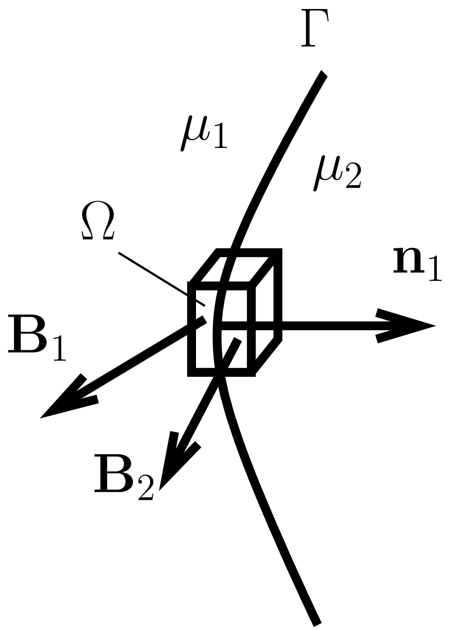
$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{rot}(\mathbf{A}(\mathbf{x})) = \mathbf{rot}(\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla\phi(\mathbf{x}))$$

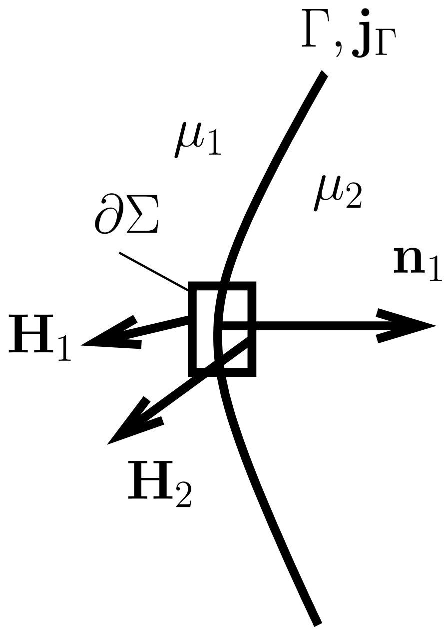
Jednoznačnost můžeme vynutit např. Coulombovskou kalibrační podmínkou:

$$\mathrm{div}(\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla\phi(\mathbf{x})) = 0.$$

Magnetostatika

Podmínky na rozhraní





$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \boxed{(\mathbf{B}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_2(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Gamma.}$$

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{H}(\mathbf{x})\, \mathbf{dl}(\mathbf{x}) = \mu_0 \int_\Sigma \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) \Rightarrow$$

$$\boxed{(\mathbf{H}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{H}_2(\mathbf{x})) \times \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{j}_\Gamma(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Gamma.}$$

Magnetostatika

Příklad formulace magnetostatické úlohy

$$\begin{cases} \mathbf{rot}\left(\dfrac{1}{\mu_{\mathrm{r}}(\mathbf{x})}\mathbf{rot}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))\right) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad \textbf{Je to nutné?} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) = O(1/|\mathbf{x}|) \quad \text{pro } |\mathbf{x}| \to \infty \end{cases}$$

kde $\operatorname{supp} \mathbf{j} \subset \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená neprázdná oblast.

$\mu_r(\mathbf{x}) \equiv 1$: (Biot–Savartův zákon)

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\Omega \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \, dV(\mathbf{y}).$$

Fyzika Maxwellových rovnic a formulace okrajových úloh

Osnova

- Elektrostatika
- Magnetostatika
- Maxwellovy rovnice
- Elektromagnetické vlnění
- Odraz a lom světla

Maxwellovy rovnice

Stacionární Maxwellovy rovnice v nevodivém prostředí

jsou dva nezávislé systémy:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{div}(\mathbf{D}(\mathbf{x})) &= \rho(\mathbf{x}) \\ \mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) &= \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \quad \text{elektrostatika}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x})) &= \mathbf{j}(\mathbf{x}) \\ \mathrm{div}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{magnetostatika}$$

spolu s materiálovými vztahy $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0\mu_\mathrm{r}(\mathbf{x})\mathbf{H}(\mathbf{x})$, s okrajovými podmínkami a podmínkami v ∞.

Zavedeme-li potenciály $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla u(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{rot}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$, dostáváme:

$$-\mathrm{div}\left(\varepsilon_0\varepsilon_r(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})\right) = \rho(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{rot}\left(\frac{1}{\mu_0\mu_r(\mathbf{x})}\mathbf{rot}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))\right) = \mathbf{j}(\mathbf{x})$$

Maxwellovy rovnice

Ohmův zákon

Vodivé materiály se vyznačují velkým počtem volných elektronů a po vložení do elektrostatického pole dochází k jejich pohybu, tedy teče proud. Vodivé materiály jsou modelovány lineárním Ohmovým zákonem:

$$\mathbf{j}_{\mathrm{Ohm}}(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}),$$

kde σ je elektrická vodivost.

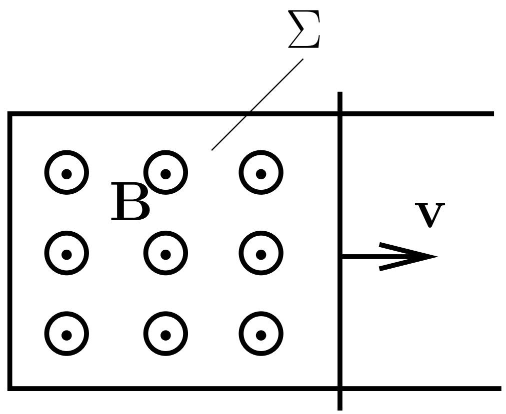
Stacionární Maxwellovy rovnice ve vodivém prostředí

Elektrostatické pole přispívá k tvorbě magnetického pole:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{div}(\mathbf{D}(\mathbf{x})) &= \rho(\mathbf{x}) \\ \mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x})) &= \mathbf{j}(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}) \\ \mathrm{div}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Maxwellovy rovnice

Faradayův zákon elektromagnetické indukce



Časové změny magnetického pole indukují elektrické pole, které působí proti těmto změnám:

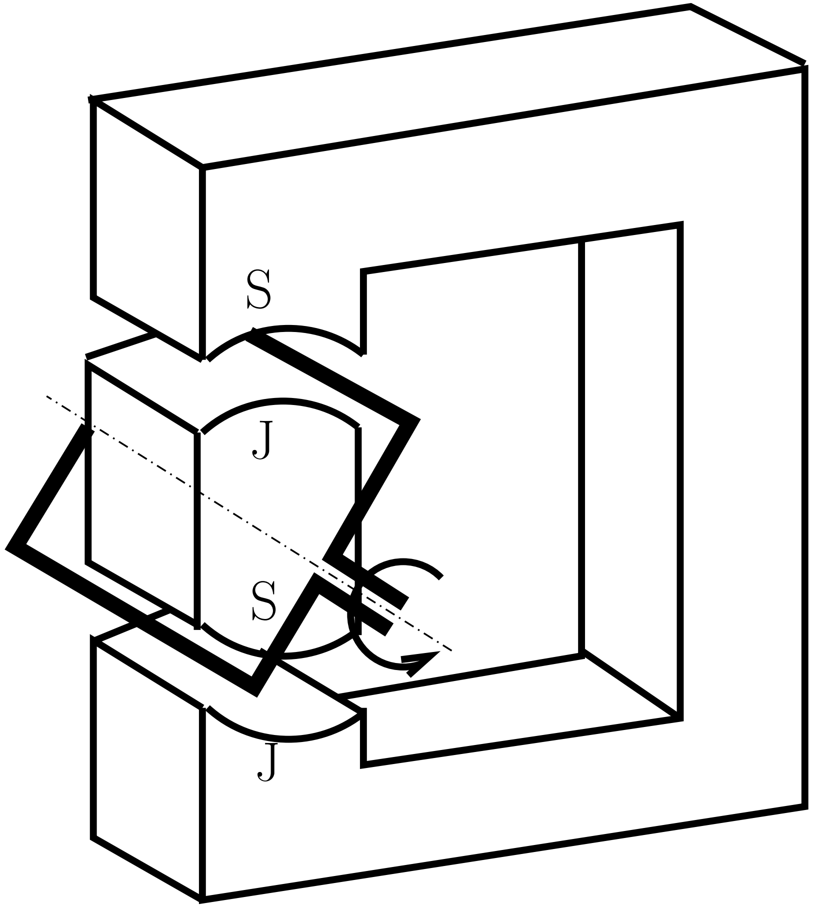
$$\oint_{\partial\Sigma(t)} \mathbf{E}(\mathbf{x},t)\,\mathbf{dl}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma(t)} \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}).$$

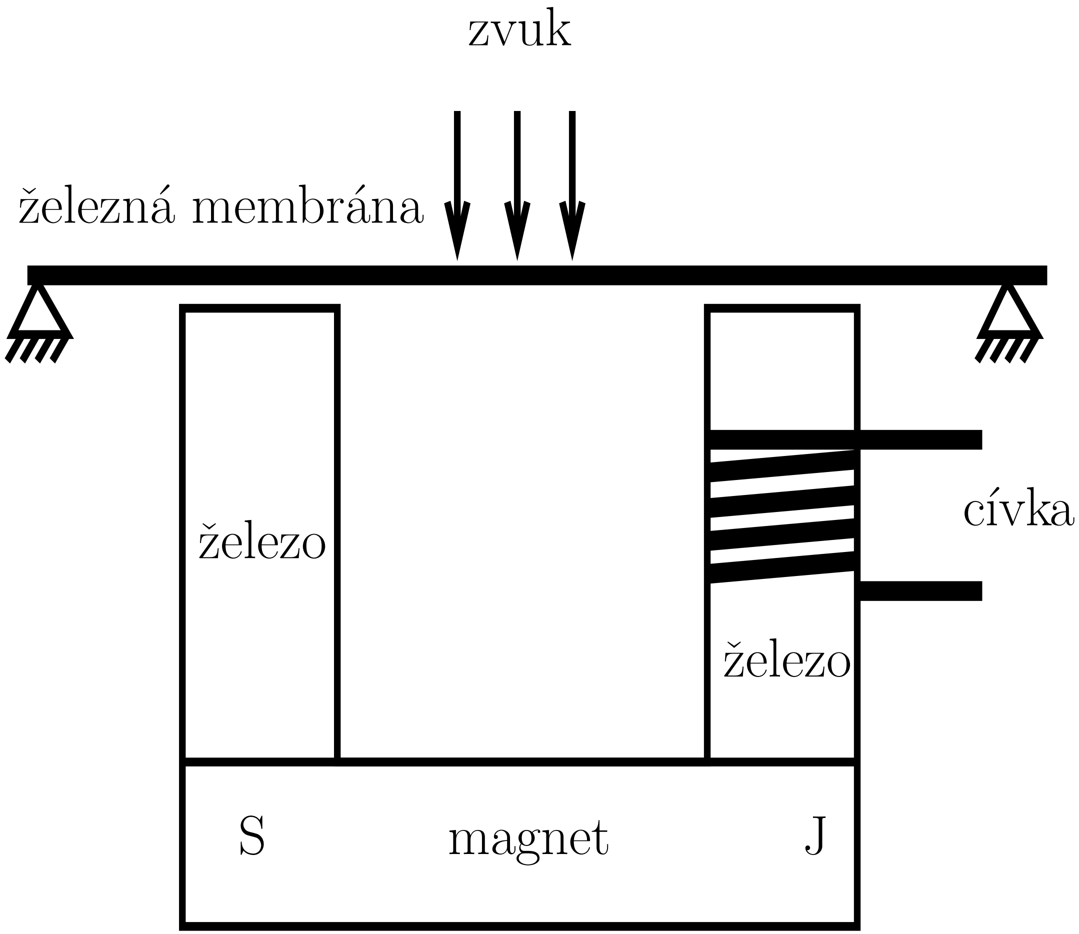
Stokesova věta dává:

$$\boxed{\mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x},t)) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}^3.}$$

Maxwellovy rovnice

Motory a generátory, telefon





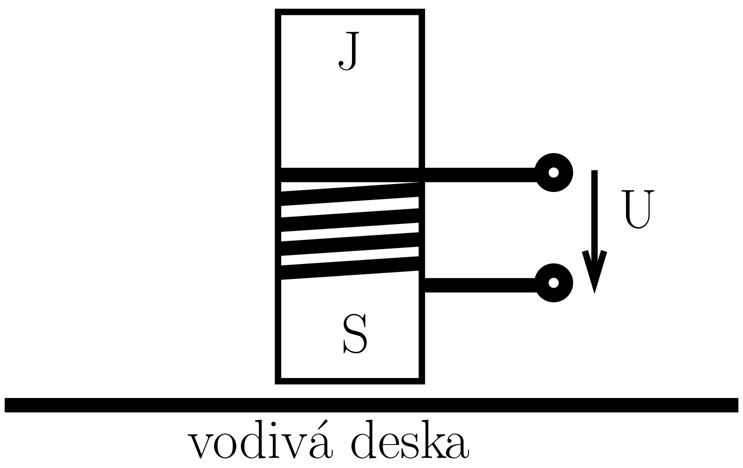
Maxwellovy rovnice

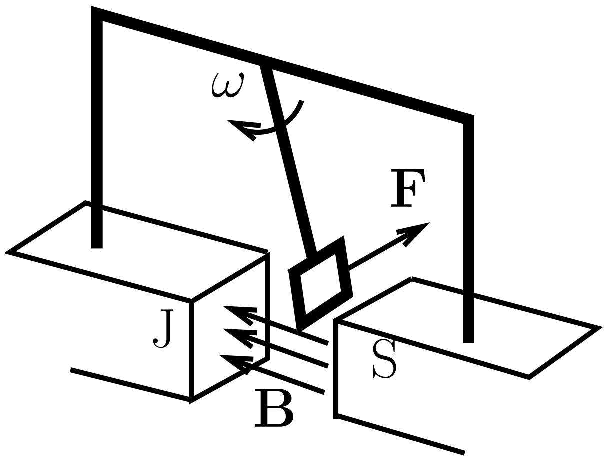
Vířivé proudy

Při změně magnetického pole se ve vodivém prostředí indukují tzv. vířivé proudy:

$$\mathbf{rot}\left(\frac{1}{\sigma(\mathbf{x})}\mathbf{j}_{\mathrm{Ohm}}(\mathbf{x},t)\right) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t}.$$

Elektrická pec, elektrická brzda





Maxwellovy rovnice

Maxwellovy rovnice před Maxwellem (nízko–frekvenční aproximace)

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x},t)) = -\dfrac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t} \\ (2) & \mathbf{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x},t)) = \mathbf{j}(\mathbf{x},t) + \sigma(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \\ (3) & \mathrm{div}(\mathbf{D}(\mathbf{x},t)) = \rho(\mathbf{x},t) \\ (4) & \mathrm{div}(\mathbf{B}(\mathbf{x},t)) = 0 \end{array}\right\} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,\ t \in [0,\infty),$$

kde $\mathbf{D}(\mathbf{x},t) = \varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mu_0\mu_{\mathrm{r}}(\mathbf{x})\mathbf{H}(\mathbf{x},t)$.

Maxwellův posuvný proud

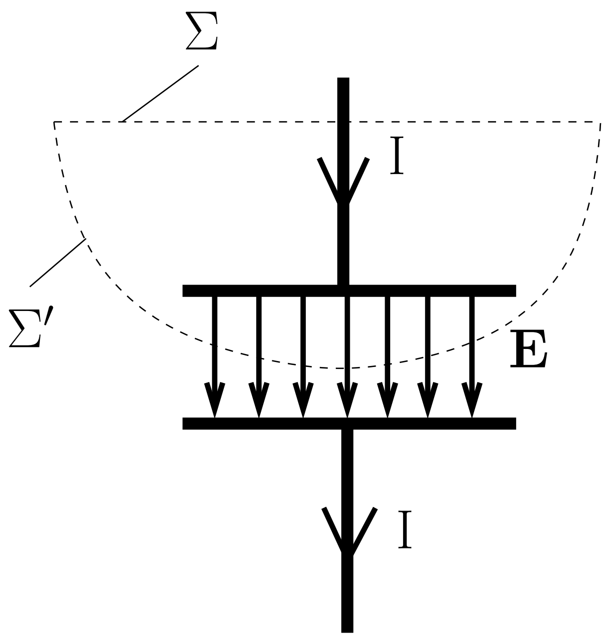
V nevodivých materiálech, $\sigma(\mathbf{x}) = 0$, by ale neplatil zákon zachování náboje (5):

$$0 = \mathrm{div}(\mathbf{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x},t))) \stackrel{(2)}{=} \mathrm{div}(\mathbf{j}(\mathbf{x},t)) \stackrel{(5)}{=} -\frac{\partial \rho(\mathbf{x},t)}{\partial t} \stackrel{(3)}{=} -\mathrm{div}\left(\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x},t)}{\partial t}\right) \neq 0,$$

$$\Rightarrow (2) \quad \boxed{\mathbf{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x},t)) = \mathbf{j}(\mathbf{x},t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \sigma(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,\ t \in [0,\infty).}$$

Maxwellovy rovnice

Příklad posuvného proudu: nabíjení kondenzátoru



$$\oint_\Gamma \mathbf{H}(\mathbf{x})\,\mathbf{dl}(\mathbf{x}) = \int_\Sigma \mathbf{j}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x})$$

$$= \int_{\Sigma'} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x},t)}{\partial t}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x})$$

Maxwellovy rovnice

$$\boxed{\left.\begin{aligned}\mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x},t)) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t}\\ \mathbf{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x},t)) &= \mathbf{j}(\mathbf{x},t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \sigma(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\\ \mathrm{div}(\mathbf{D}(\mathbf{x},t)) &= \rho(\mathbf{x},t)\\ \mathrm{div}(\mathbf{B}(\mathbf{x},t)) &= 0\end{aligned}\right\}\quad \text{pro } \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\ t\in[0,\infty),}$$

kde $\mathbf{D}(\mathbf{x},t) = \varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mu_0\mu_{\mathrm{r}}(\mathbf{x})\mathbf{H}(\mathbf{x},t)$.

Podmínky na rozhraní

Nechť na Σ je $\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{x})$ nebo $\mu_{\mathrm{r}}(\mathbf{x})$ v normálovém směru $\mathbf{n}_\Sigma(\mathbf{x})$ nespojité, pak:

$$\boxed{\left.\begin{aligned}(\mathbf{E}_1(\mathbf{x},t) - \mathbf{E}_2(\mathbf{x},t)) \times \mathbf{n}_\Sigma(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}\\ (\mathbf{H}_1(\mathbf{x},t) - \mathbf{H}_2(\mathbf{x},t)) \times \mathbf{n}_\Sigma(\mathbf{x}) &= \mathbf{j}_\Sigma(\mathbf{x},t)\\ (\mathbf{D}_1(\mathbf{x},t) - \mathbf{D}_2(\mathbf{x},t)) \cdot \mathbf{n}_\Sigma(\mathbf{x}) &= \rho_\Sigma(\mathbf{x},t)\\ (\mathbf{B}_1(\mathbf{x},t) - \mathbf{B}_2(\mathbf{x},t)) \cdot \mathbf{n}_\Sigma(\mathbf{x}) &= 0\end{aligned}\right\}\quad \text{pro } \mathbf{x}\in\Sigma,\ t\in[0,\infty).}$$

Fyzika Maxwellových rovnic a formulace okrajových úloh

Osnova

- Elektrostatika
- Magnetostatika
- Maxwellovy rovnice
- Elektromagnetické vlnění
- Odraz a lom světla

Elektromagnetické vlnění

Putující elektromagnetické pole

obrazek 18.3 obrazek 18.4 (c)

Pohybujeme-li po čas $t \in [0, T]$ dvěma nabitými listy, putuje vakuem impuls elektromagnetického pole rychlostí světla tak, že $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ a směr šíření jsou na sebe navzájem kolmé.

Díky současné působnosti jevů $\mathbf{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ a $\mathbf{rot}(\mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ nemůže tento impuls ve vakuu zaniknout. Zaniká až superpozicí s elektromagnetickými poli jiných nábojů.

Elektromagnetické vlnění

Vlnové rovnice v prostředí bez volných nábojů

Nechť $\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}) = \varepsilon$, $\mu_0\mu_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}) = \mu$ a $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma$ pro $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, pak:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} + \sigma\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x},t))) &= -\mu\frac{\partial\mathbf{j}(\mathbf{x},t)}{\partial t} \\ \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{H}(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} + \sigma\mu\frac{\partial\mathbf{H}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x},t))) &= \mathbf{rot}(\mathbf{j}(\mathbf{x},t)) \end{aligned}\right\} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega,}$$

přičemž $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \approx 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ je rychlost světla ve vakuu.

Okrajové podmínky

dokonalý vodič: $\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega,}$

nedokonalý vodič: $\boxed{\mathbf{H}(\mathbf{x},t) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \frac{1}{\sigma(\mathbf{x})}(\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \times \mathbf{n}(\mathbf{x})) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega}$

+ počáteční podmínky na $\mathbf{E}(\mathbf{x},0)$, $\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{x},0)}{\partial t}$, $\mathbf{H}(\mathbf{x},0)$ a $\frac{\partial\mathbf{H}(\mathbf{x},0)}{\partial t}$ pro $\mathbf{x} \in \Omega$.

Elektromagnetické vlnění

Rovnice Helmholtzova typu

Předpokládejme harmonické budící proudy i výsledná pole s kmitočtem $\omega > 0$:

$$\mathbf{j}(\mathbf{x},t) = \mathrm{Re}\left\{\widehat{\mathbf{j}}(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-i\omega t}\right\}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathrm{Re}\left\{\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-i\omega t}\right\},$$

pak $\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \rightsquigarrow -i\omega(\cdot)$ a **rot** je aplikována na $\widehat{\mathbf{j}}$ a $\widehat{\mathbf{E}}$:

$$\boxed{\mathbf{rot}\left(\mathbf{rot}\left(\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x})\right)\right) - \widehat{k}^2\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = i\omega\mu\widehat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega}$$

kde $\widehat{k}^2 = \omega^2\varepsilon\mu + i\omega\sigma \approx \omega^2/c^2$ je vlnové číslo.

Rovinné vlny

Pro $\widehat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ v $\mathbb{R}^3$ je řešením Helmholtzovy elektrické rovnice např.:

$$\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

kde $\mathbf{E}_0 \in \mathbb{R}^3$ je amplituda, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ je směr šíření, $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}_0$ a $|\mathbf{k}|^2$ je vlnové číslo.

Elektromagnetické vlnění

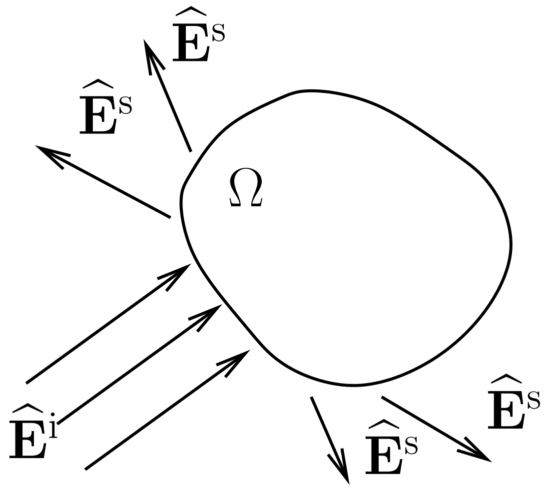
Silver–Müllerova radiační podmínka

Vnější radiační úloha vyžaduje splnění podmínky, že se vlny v nekonečnu neodrážejí:

$$\boxed{\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} |\mathbf{x}| \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \times \mathbf{rot}(\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x})) + ik\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) \right) = \mathbf{0}.}$$

Elektromagnetické vlnění

Rozptyl vlnění od objektu

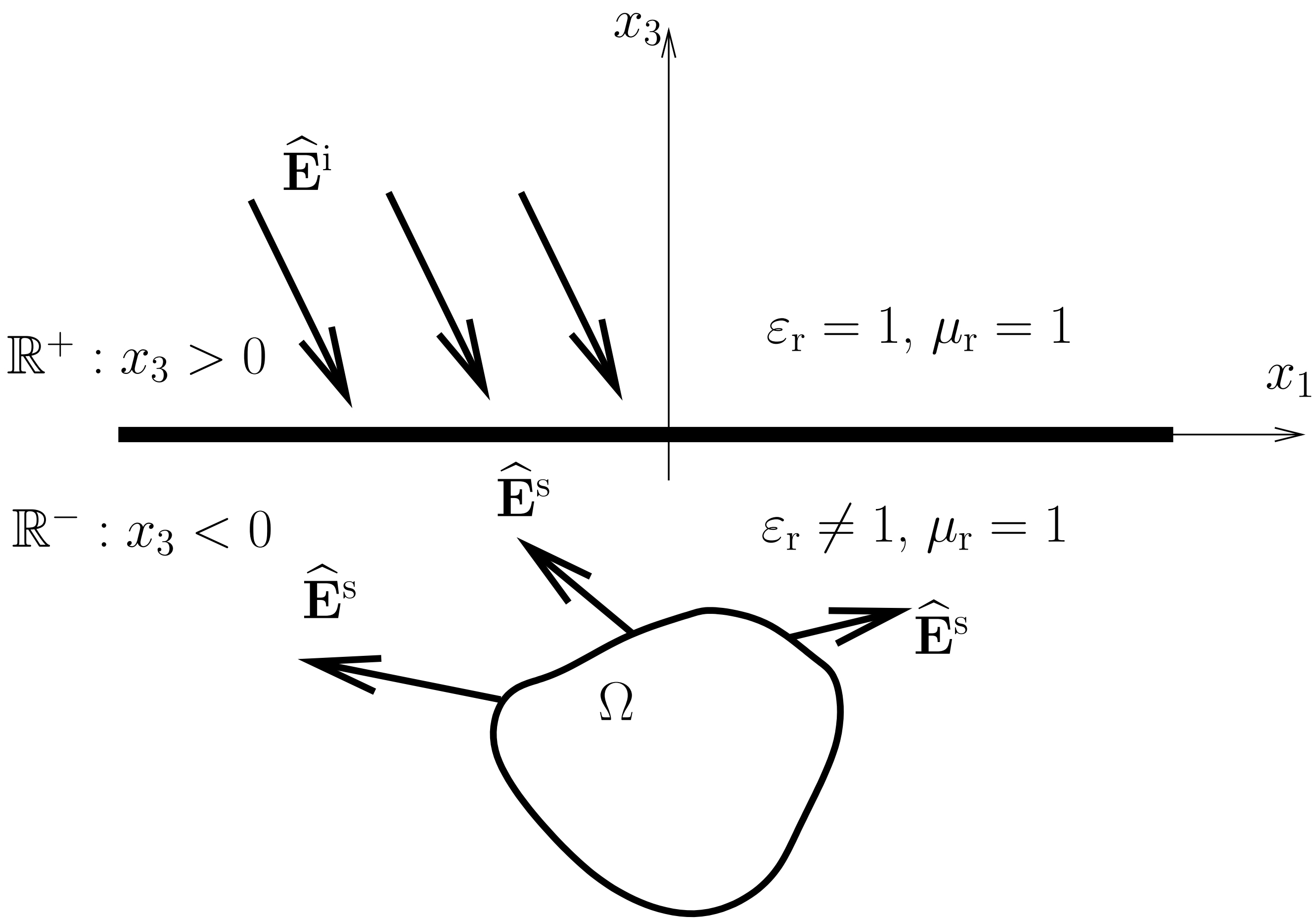


Je dána incidenční vlna $\widehat{\mathbf{E}}^{\mathrm{i}}(\mathbf{x})$ splňující homogenní Helmholtzovu rovnici a objekt $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Hledáme $\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{E}}^{\mathrm{i}}(\mathbf{x}) + \widehat{\mathbf{E}}^{\mathrm{s}}(\mathbf{x})$:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x})) - k^2\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) &= \widehat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \\ \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} |\mathbf{x}| \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \times \mathbf{rot}(\widehat{\mathbf{E}}^{\mathrm{s}}(\mathbf{x})) + ik\widehat{\mathbf{E}}^{\mathrm{s}}(\mathbf{x}) \right) &= \mathbf{0}. \end{aligned}\right\}$$

Elektromagnetické vlnění

Rozptyl vlnění od objektu v zemi



Elektromagnetické vlnění

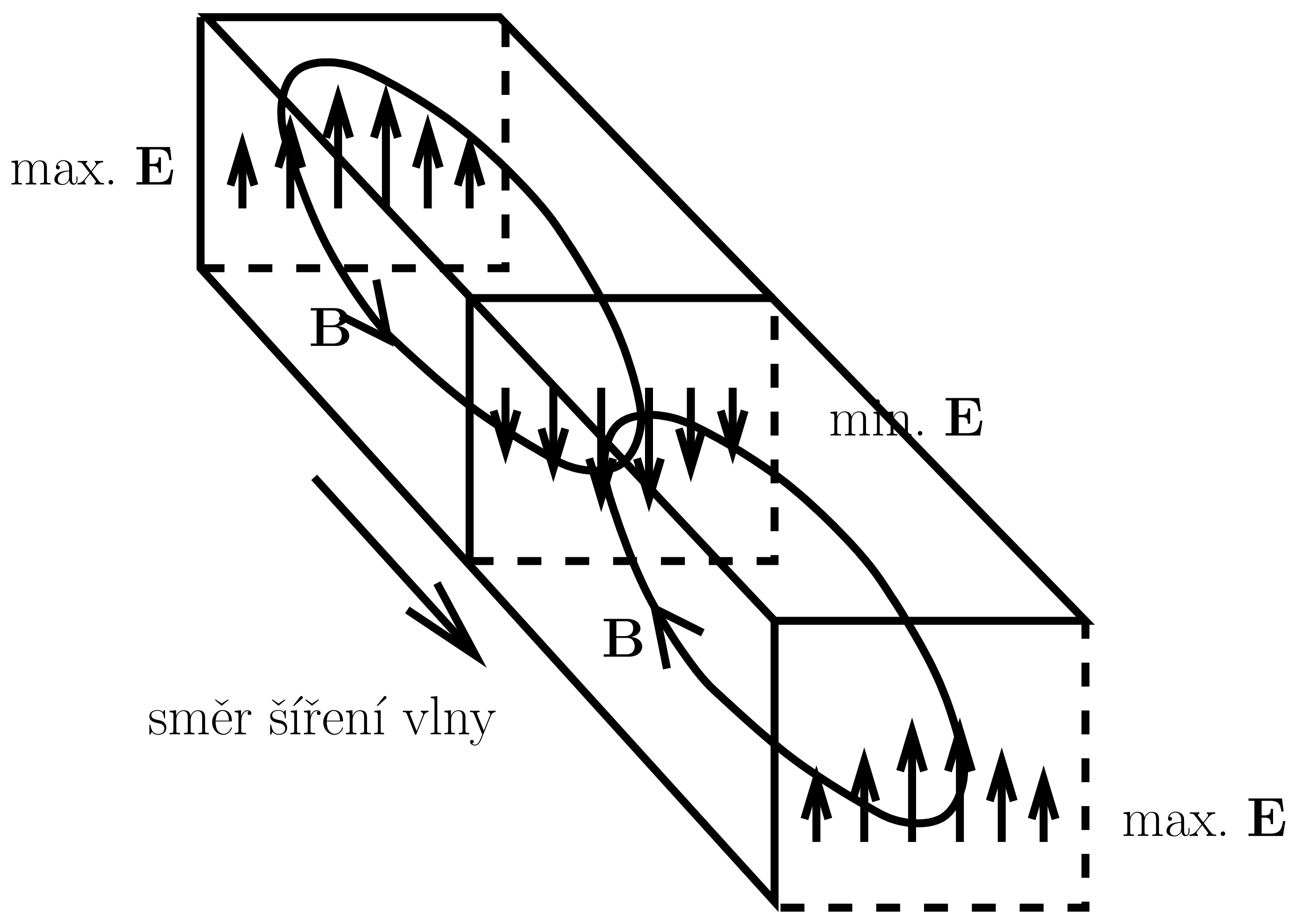
Rozptyl vlnění od objektu v zemi

Je dána $\widehat{\mathbf{E}}^{\mathrm{i}}(\mathbf{x})$ a objekt v zemi $\Omega \subset (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-)$. Hledáme $\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{E}}^{\mathrm{i}}(\mathbf{x}) + \widehat{\mathbf{E}}^{\mathrm{s}}(\mathbf{x})$:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x})) - k^2\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) &= \widehat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \\
\mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x})) - k^2\varepsilon_{\mathrm{r}}\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) &= \widehat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-) \setminus \overline{\Omega} \\
\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} \\
\mathbf{rot}(\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x})) \times \mathbf{n}(\mathbf{x})) &= \mathbf{0} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} \\
\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega \\
\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \int_{\partial B^+(|\mathbf{x}|)} \left| \mathbf{rot}(\widehat{\mathbf{E}}^{\mathrm{s}}(\mathbf{y})) \times \mathbf{n}(\mathbf{y}) + ik\widehat{\mathbf{E}}^{\mathrm{s}}(\mathbf{y}) \right|^2 dS(\mathbf{y}) &= \mathbf{0} \\
\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \int_{\partial B^-(|\mathbf{x}|)} \left| \mathbf{rot}(\widehat{\mathbf{E}}^{\mathrm{s}}(\mathbf{y})) \times \mathbf{n}(\mathbf{y}) + ik\widehat{\mathbf{E}}^{\mathrm{s}}(\mathbf{y}) \right|^2 dS(\mathbf{y}) &= \mathbf{0}
\end{aligned}\right\}$$

Elektromagnetické vlnění

Dutinový rezonátor: vlnovod



Elektromagnetické vlnění

Dutinový rezonátor: formulace úlohy

Hledáme $k > 0$ a $\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$:

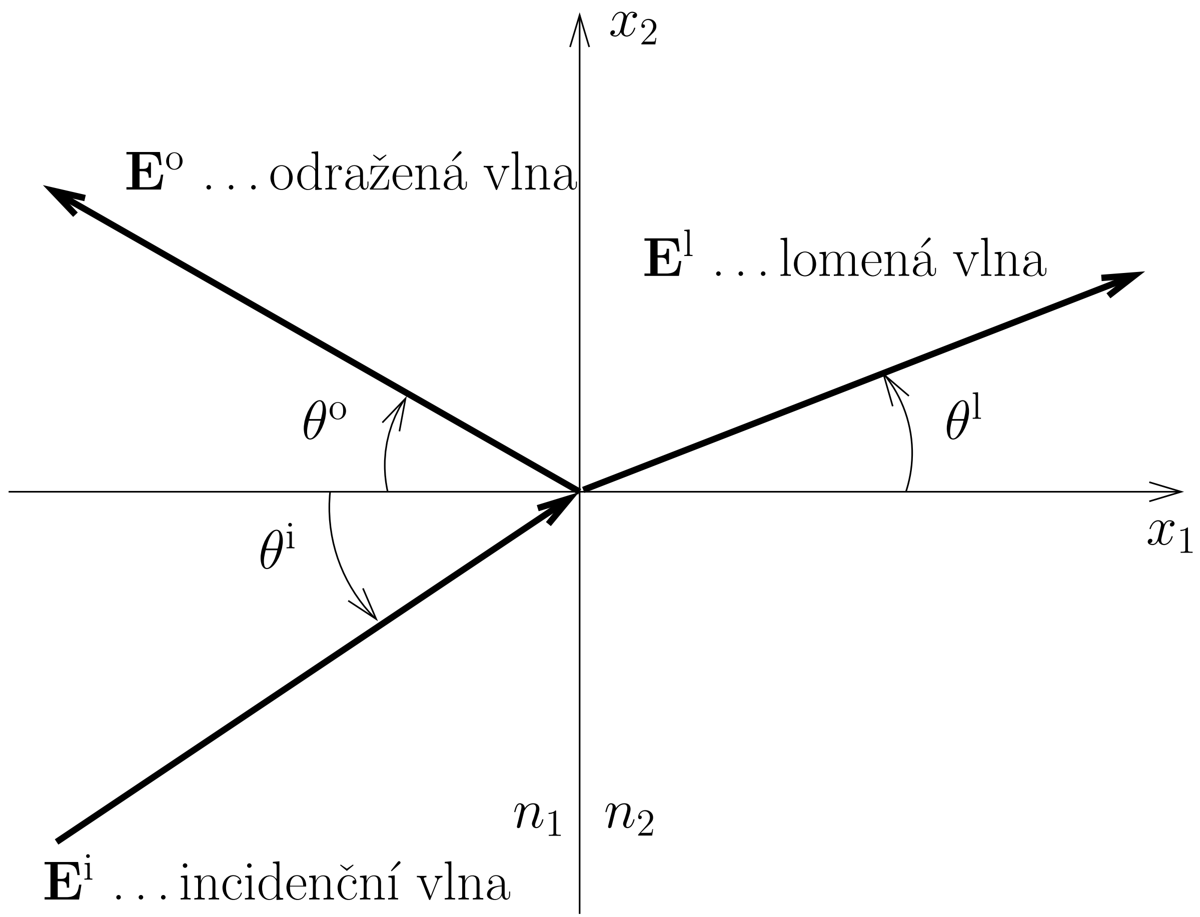
$$\left.\begin{aligned} \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x})) - k^2 \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega \\ \operatorname{div}(\varepsilon(\mathbf{x}) \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x})) &= 0 \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega \\ \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{aligned}\right\}$$

Fyzika Maxwellových rovnic a formulace okrajových úloh

Osnova

- Elektrostatika
- Magnetostatika
- Maxwellovy rovnice
- Elektromagnetické vlnění
- Odraz a lom světla

Odraz a lom světla



Odraz a lom světla

Buď $\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}_0 \mathrm{e}^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}$, $\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mathbf{B}_0 \mathrm{e}^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}$ rovinná elektromagnetická vlna:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{B}_0 \perp \mathbf{E}_0 \text{ a } \mathbf{B}_0 \perp \mathbf{k}, \qquad \varepsilon \mathrm{div}(\mathbf{E}) = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k}.$$

Buď $x_3 = 0$ rovina dopadu a uvažujme TE polarizaci: $\mathbf{E}((x_1,x_2),t) = (0,0,E_0)\mathrm{e}^{-i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)}$. Označme E^{i}, E^{o} a E^{l} vlnu incidenční, odraženou a lomenou. Tečná složka musí být na rozhraní, $x_1 = 0$, spojitá:

$$\forall x_2, t : E^{\mathrm{i}}((0,x_2),t) + E^{\mathrm{o}}((0,x_2),t) = E^{\mathrm{l}}((0,x_2),t) \Rightarrow \omega^{\mathrm{i}} = \omega^{\mathrm{o}} = \omega^{\mathrm{l}} = \omega \text{ a } k_2^{\mathrm{i}} = k_2^{\mathrm{o}} = k_2^{\mathrm{l}} = k_2$$

Jelikož $n = \frac{c}{v} = \frac{c|\mathbf{k}|}{\omega}$ je index lomu, dostáváme zákon odrazu a Snellův zákon lomu:

$$\frac{c|\mathbf{k}^{\mathrm{i}}|}{n_1} = \frac{c|\mathbf{k}^{\mathrm{o}}|}{n_1} \Rightarrow (k_1^{\mathrm{i}})^2 + (k_2)^2 = (k_1^{\mathrm{o}})^2 + (k_2)^2 \Rightarrow k_1^{\mathrm{i}} = -k_1^{\mathrm{o}} \Rightarrow \theta^{\mathrm{i}} = \theta^{\mathrm{o}}$$

$$\frac{c|\mathbf{k}^{\mathrm{i}}|}{n_1} = \frac{c|\mathbf{k}^{\mathrm{l}}|}{n_2} \Rightarrow \frac{(k_1^{\mathrm{i}})^2 + (k_2)^2}{(n_1)^2} = \frac{(k_1^{\mathrm{l}})^2 + (k_2)^2}{(n_2)^2} \Rightarrow n_2 \sin\theta^{\mathrm{l}} = n_1 \sin\theta^{\mathrm{i}}.$$

Fyzika Maxwellových rovnic a formulace okrajových úloh

Cíle

Metodou konečných nebo hraničních prvků chceme simulovat např.

- odraz a lom světla v materiálech s periodickou hranicí,
- odraz a lom světla v materiálech s vnitřní periodickou strukturou (homogenizace),
- rezonanční módy vlnovodu.

Literatura

- F. Ihlenburg: Finite element analysis of acoustic scattering, Springer, '98
- Feynmanovy přednašky z fyziky, 2.díl, Fragment, '01
- P. Monk: Finite element methods for Maxwell's equations, Oxford Univ. Press, '03
- J.-C. Nédélec: Acoustic and electromagnetic equations, Springer, '01
- J. Schöberl: Numerical methods for Maxwell's equations, skripta JKU Linec, '05