Výpočetní elektrostatika

1. přednáška předmětu Výpočetní elektrotechnika

Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky,
VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

http://lukas.am.vsb.cz/Teaching/VE/

Elektrostatika

popisuje časově neměnná eletrická (silová) pole nabitých těles.

Coulombův zákon

vyjadřuje síly mezi náboji.

$$\mathbf{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2} \cdot \mathbf{e}_{12} = -\mathbf{F}_2,$$

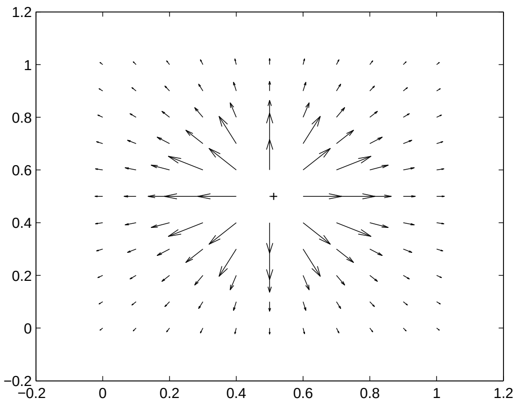
$q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ ... elektrické náboje (v Coulombech),
$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ ... polohy nábojů, $\mathbf{e}_{12} := (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)/|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$,
$\varepsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12}$ ... permitivita vakua

Elektrostatika

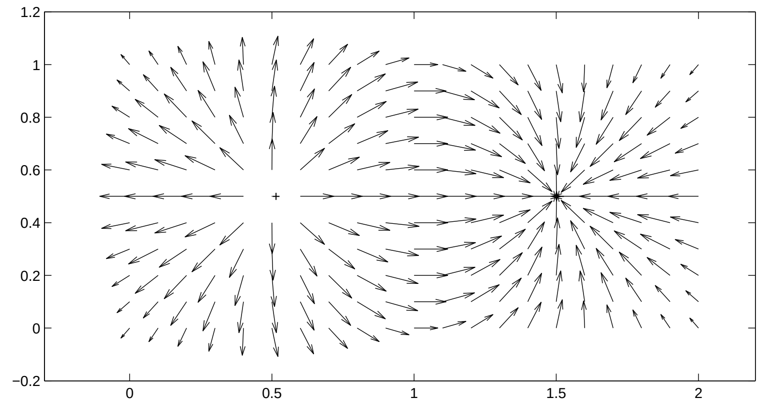
Intenzita elektrického pole

je síla elektrického pole na jednotkový náboj.

pole kladného náboje



pole dvou nesouhlasných nábojů



Platí princip superpozice, např.:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\Omega \frac{\rho(\mathbf{y})(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}\, dV(\mathbf{y}),$$

kde $\rho(\mathbf{y})$ je objemová hustota náboje v $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, tj. $\operatorname{supp}(\rho) \subset \Omega$.

Elektrostatika

Gaussův zákon (ve vakuu)

Tok elektrického pole z povrchu objemového elementu je určen náboji v tomto objemu. Gaussův zákon je ekvivalentní s Coulombovým zákonem.

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x})\, dV(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \Omega \subset \mathbb{R}^3,$$

kde $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ je vnější jednotková normála k $\partial\Omega$.

Gaussova věta: $\oint_{\partial\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{E}(\mathbf{x}))\, dV(\mathbf{x})$ dává

$$\boxed{\operatorname{div}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.}$$

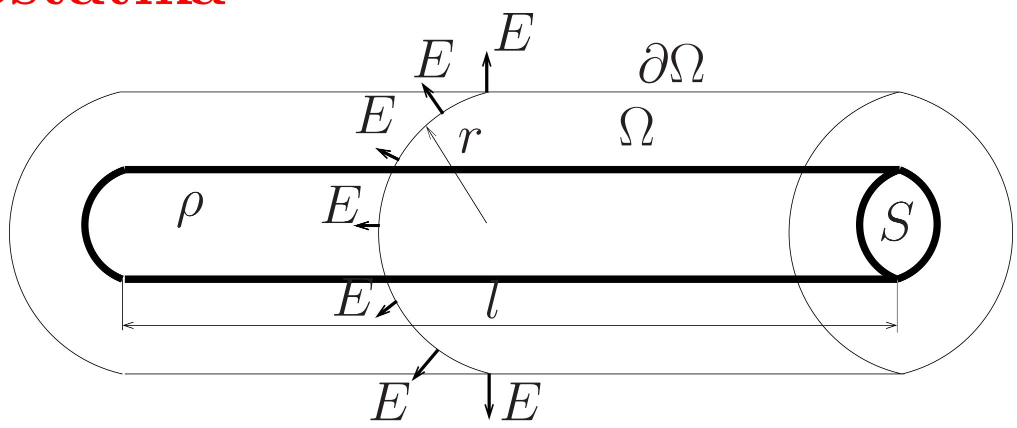
Elektrostatika

Příklad 1: Pole dlouhé nabité tyče

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}\, dV(\mathbf{x})$$

$$E(r) 2\pi r l = \frac{\rho S l}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho S}{2\pi r \varepsilon_0}$$

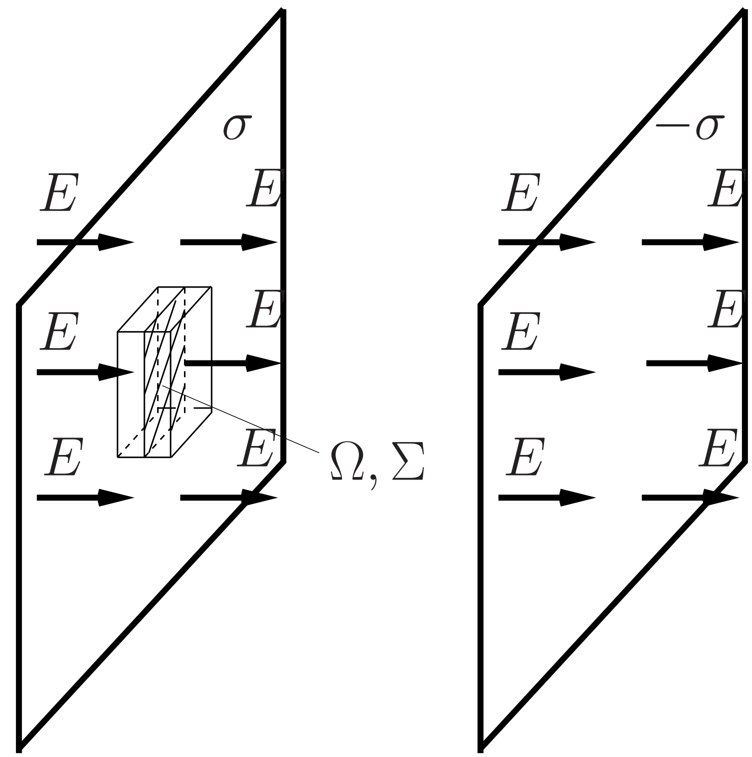


Příklad 2: Pole nabité desky

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{E}_+(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} \frac{\sigma(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}\, dS(\mathbf{x})$$

$$2E_+|\Sigma| = \frac{\sigma|\Sigma|}{\varepsilon_0}$$

$$E_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



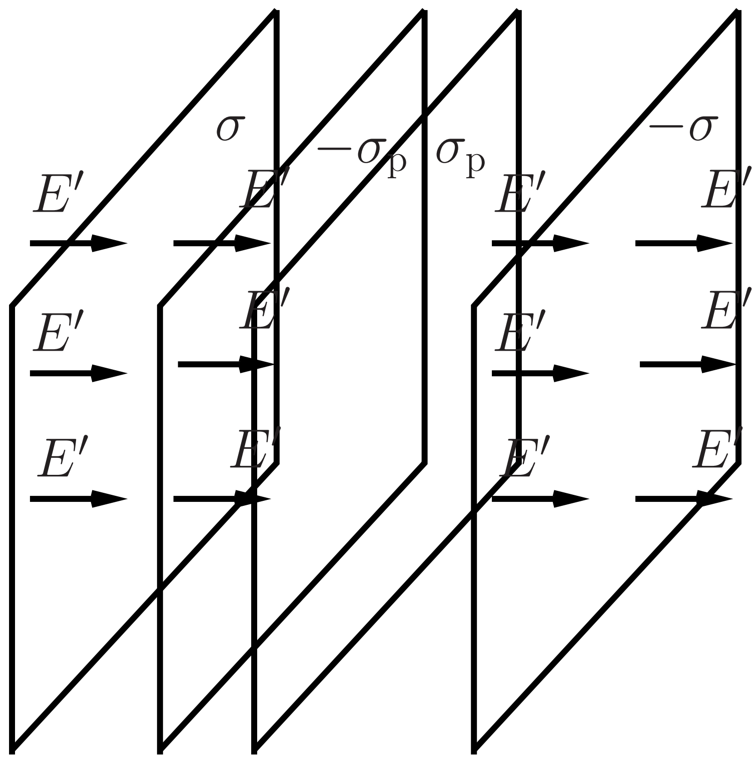
Příklad 3: Pole deskového kondenzátoru

$$E = 2E_+ = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Elektrostatika

Příklad 4: Pole dvou vnořených deskových kondenzátorů s opačnou orientací

$E' = E - E_{\mathrm{p}} = \frac{\sigma - \sigma_{\mathrm{p}}}{\varepsilon_0}$



Příklad modeluje chování polarizovaných nábojů (vnitřní kondenzátor) v dielektriku, které je vloženo do elektrostatického pole (vnější kondenzátor).

Elektrostatika

Gaussův zákon v dielektriku

V dielektrických materiálech se po vložení do elektrostatického pole vytvoří vrstvy polarizovaných nábojů orientovaných v souladu s vnějším polem. Ty se chovají jako vnořené kondenzátory, viz příklad 4, tedy zeslabují vnější pole.

Označme $\rho_{\mathrm{pol}}(\mathbf{x}) = \mathrm{div}(-\mathbf{P}(\mathbf{x}))$ hustotu polarizovaného náboje v dielektriku, kde $\mathbf{P}$ je elektrostatická polarizace.

$$\mathrm{div}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) = \frac{\rho(\mathbf{x}) + \rho_{\mathrm{pol}}(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}$$

$$\mathrm{div}(\varepsilon_{\mathrm{r}}\mathbf{E}(\mathbf{x})) := \mathrm{div}\left(\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}\right) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0},$$

kde $\varepsilon_{\mathrm{r}} \geq 1$ je relativní permitivita. Označme $\mathbf{D}(\mathbf{x}) := \varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x})$ el. indukci:

$$\boxed{\mathrm{div}(\mathbf{D}(\mathbf{x})) = \rho(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.}$$

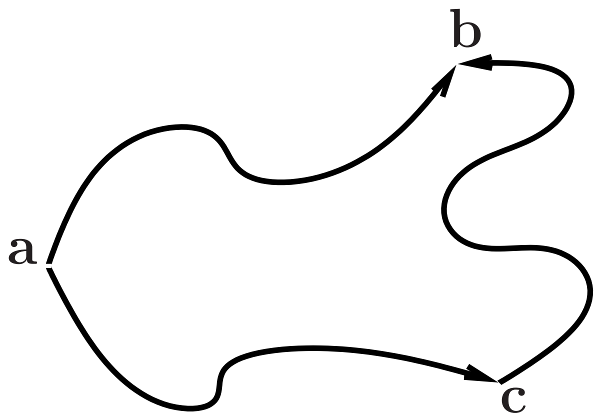
Elektrostatika

Elektrický potenciál (napětí)

Elektrostatické pole je potenciální:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla u(\mathbf{x}),$$

kde u je elektrický potenciál (napětí). Tzn. práce, kterou vykoná elektrostatické pole působící na jednotkový náboj, nezávisí na dráze:



$$W_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} = -\int\limits_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} \mathbf{E}(\mathbf{x})\,\mathbf{dl}(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} \nabla u(\mathbf{x})\,\mathbf{dl}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{b}) - u$$

$$= W_{\mathbf{a}\to\mathbf{c}} + W_{\mathbf{c}\to\mathbf{b}}$$

a tedy:

$$-\oint_k \mathbf{E}(\mathbf{x})\,\mathbf{dl}(\mathbf{x}) = 0$$

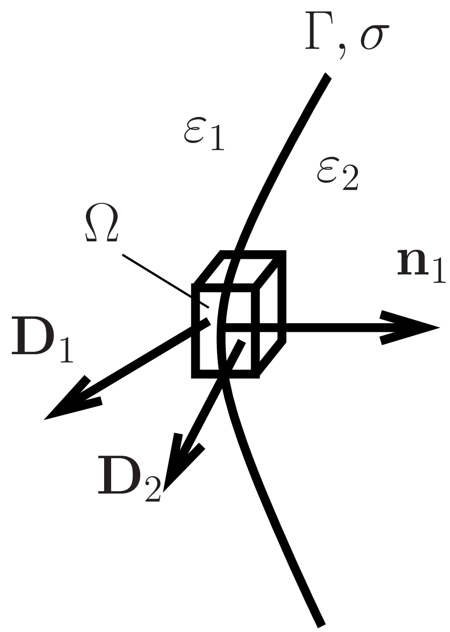
pro jakoukoliv uzavřenou křivku k.

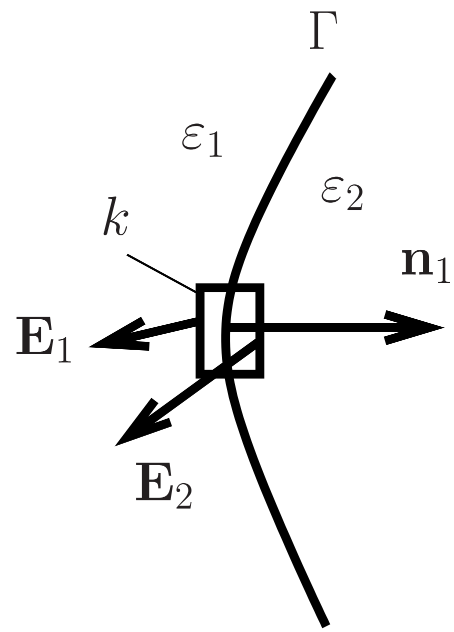
Stokesova věta: $\oint_{\partial S} \mathbf{E}(\mathbf{x})\,\mathbf{dl}(\mathbf{x}) = \int_S \mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x}))\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x})$ dává

$$\boxed{\mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad \text{pro } \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3.}$$

Elektrostatika

Podmínky na rozhraní





$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x})\, dV(\mathbf{x}) \Rightarrow \boxed{(\mathbf{D}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{D}_2(\mathbf{x}))\cdot\mathbf{n}_1(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Gamma}$$

$$\oint_{k} \mathbf{E}(\mathbf{x})\, \mathbf{dl}(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \boxed{(\mathbf{E}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{E}_2(\mathbf{x})) \times \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Gamma.}$$

Elektrostatika

Příklad formulace elektrostatické úlohy

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) = \dfrac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \Big(\quad u(\mathbf{x}) = \overline{u} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad \Big) \\ u(\mathbf{x}) = O(1/|\mathbf{x}|) \quad \text{pro } |\mathbf{x}| \to \infty \end{cases}$$

kde $\operatorname{supp} \rho \subset \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená neprázdná oblast, $\Big($ na jejíž hranici je aplikováno napětí $\overline{u}$ $\Big)$.

Metoda konečných prvků v elektrostatice

Slabá formulace úlohy elektrostatiky

Literatura

- F. Ihlenburg: Finite element analysis of acoustic scattering, Springer, '98
- Feynmanovy přednašky z fyziky, 2.díl, Fragment, '01
- P. Monk: Finite element methods for Maxwell's equations, Oxford Univ. Press, '03
- J.-C. Nédélec: Acoustic and electromagnetic equations, Springer, '01
- J. Schöberl: Numerical methods for Maxwell's equations, skripta JKU Linec, '05
- O. Steinbach, S. Rjasanow: Fast Boundary Element Methods, Springer '07