Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

Fakulta elektrotechniky a informatiky

LINEÁRNÍ ALGEBRA

(pro bakalářské studium)

Libor Šindel

1999

Ostrava

1. Matice a algebra matic

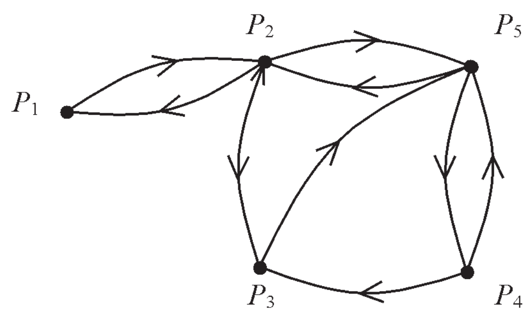
Matice představují základní aparát aplikované matematiky. S těmito tabulkami čísel se setkáváme také v běžném životě.

Příklad 1.1. *Vzdálenosi mezi městy.*

$$
\begin{array}{l}
 \\
\text{Ostrava} \\
\text{Olomouc} \\
\text{Brno}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}\text{Ostrava} & \text{Olomouc} & \text{Brno}\end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 100 & 180 \\ 100 & 0 & 80 \\ 180 & 80 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Příklad 1.2. *Teorie grafů.*

Uvažujme komunikační systém, který zahrnuje pět stanic:



Obr. 1.1.

Stanice $P_1, \dots, P_5$ tvoří uzly grafu a spojení mezi nimi je vyjádřeno orientovanými hranami. Například stanice P_3 může poslat zprávu do stanice P_5, ale stanice P_5 může poslat zprávu do stanice P_3 jedině prostřednictvím stanice P_4. Daný graf můžeme reprezentovat tabulkou (maticí)

$$
\mathbf{A} = \begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
a_{12} = 1 \text{ existuje hrana směřující z } P_1 \text{ do } P_2 \\[1em]
a_{53} = 0 \text{ neexistuje hrana směřující z } P_5 \text{ do } P_3
\end{array}
$$

matice sousednosti

Definice 1.1. ***Matice***: Nechť m, n jsou přirozená čísla. Soustavu $m \cdot n$ čísel uspořádaných do m řádků a n sloupců

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

nazýváme ***maticí typu*** (m, n) nebo $m \times n$ ***maticí***.

Označení matic: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots ; \quad \mathbf{A} = [a_{ik}]_{m\times n}$

$$a_{ik} \text{ resp. } [\mathbf{A}]_{ik} \ \ldots \ \text{prvek na místě (v pozici) } (i,k)$$

Reálná (komplexní) matice: prvky matice jsou reálná (komplexní) čísla, t.j. $a_{ik} \in \mathbb{R}$, ($a_{ik} \in \mathbb{C}$)

$\mathbf{u} = [u_1, \ldots, u_n]$ řádkový n-členný vektor ($1 \times n$ matice)

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$ sloupcový m-členný vektor ($m \times 1$ matice)

$\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} = [a_{i1}, \ldots, a_{in}]\,, i = 1, \ldots, m$ (i-tý řádek matice $\mathbf{A}$)

$\mathbf{s}_j^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, j = 1, \ldots, n$ (j-tý sloupec matice $\mathbf{A}$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}} \end{bmatrix} = [\ \mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \ldots, \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}}\ ]$$

Pokud $m = n$, hovoříme o ***čtvercové matici*** řádu n.

$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{ss}, s = \min\{m, n\}$ ***diagonála matice***

Rovnost matic: Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ nazýváme rovnými, píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, jsou-li stejného typu (m, n) a jestliže $a_{ik} = b_{ik}$ pro $i = 1, \ldots, m$ a $j = 1, \ldots, n$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad [1,3] \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [1,3,0] \neq [1,3]$$

Definice 1.2. ***Násobení matice skalárem*:** Součinem skaláru α ($\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{C}$) a matice $\mathbf{A}$ je matice $\alpha\mathbf{A}$ stejného typu jako $\mathbf{A}$ definovaná předpisem

$$[\alpha\mathbf{A}]_{ij} = \alpha\,[\mathbf{A}_{ij}]\,.$$

$$-4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 0 \\ -16 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Definice 1.3. ***Sčítaní matic*:** Součtem matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ stejného typu je matice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ téhož typu definovaná vztahem

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + [\mathbf{B}]_{ij}\,.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ nelze sčítat}$$

Sčítání matic je ***komutativní***. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

Nulová matice: Matice, která má všechny prvky rovny nule, se nazývá nulová matice.

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{platí} : \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A} \quad (\mathbf{A}, \mathbf{0} \text{ jsou stejného typu})$$

Opačná matice:

$$-\mathbf{A}, \quad [-\mathbf{A}]_{ij} = -[\mathbf{A}]_{ij}, \quad \text{platí} : \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

Odčítání matic:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Násobení matice a vektoru:

Mějme soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 - \ x_3 &= \ 0 \\ x_1 \qquad + 2x_3 &= 12 \\ x_1 - 2x_2 \qquad &= -4\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Položme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ -4 \end{bmatrix}$$

a připomeňme si rovnici o jedné neznámé: $ax = b$; soustavu (1.1) chceme vyjádřit v obdobném tvaru, tj. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$x_1 + x_2 - x_3 = 0$ ... levá strana je skalárním součinem 1. řádku matice $\mathbf{A}$ ($\mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} = [1, 1, -1]$) a sloupce $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$: $\mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{x} = x_1 + x_2 - x_3$. Pro zbývající rovnice platí obdobně $\mathbf{r}_2^{\mathbf{A}}\mathbf{x} = x_1 + 2x_3, \mathbf{r}_3^{\mathbf{A}}\mathbf{x} = x_1 - 2x_2$.

Definice 1.4. ***Součin matice a vektoru*:** Součinem matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ typu (m, n) a sloupcového vektoru $\mathbf{x}$ typu $(n, 1)$ je vektor $\mathbf{y}$ typu $(m, 1)$, pro jehož složky platí

$$[\mathbf{y}]_i = [\mathbf{Ax}]_i = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n, \quad i = 1, \ldots, m.$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{y} & & \mathbf{A} & & \mathbf{x} \\ \begin{bmatrix} \\ y_i \\ \\ \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \\ a_{i1} & \xrightarrow{\quad\dots\quad} & a_{in} \\ \\ \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}\Big\downarrow \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Definice 1.5. ***Násobení matic***: Nechť $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ je matice typu (m,n) a $\mathbf{B} = [b_{kj}]$ matice typu (n,s). Součinem matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ (v tomto pořadí) je matice $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ typu (m,s), kde c_{ij} je skalárním součinem i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ a j-tého sloupce matice $\mathbf{B}$:

$$c_{ij} = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{s}_j^{\mathbf{B}} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,s.$$

$$\underset{(\boldsymbol{m},n)}{\overset{\mathbf{A}}{\begin{bmatrix} \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ & \longrightarrow & \\ \end{bmatrix}}} \underset{(n,\boldsymbol{s})}{\overset{\mathbf{B}}{\begin{bmatrix} b_{1j} & \\ . & \\ . & \downarrow \\ . & \\ b_{nj} & \end{bmatrix}}} = \underset{(m,s)}{\overset{\mathbf{C}}{\begin{bmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{bmatrix}}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Násobení matice ***není komutativní***. $\quad \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Jednotková matice: Čtvercová matice $\mathbf{I}$ řádu n, jejíž každý diagonální prvek je roven 1 a všechny ostatní prvky jsou nulové, se nazývá jednotková matice řádu n.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

platí: $\mathbf{AI} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{IA} = \mathbf{A}$ pokud má násobení smysl.

Definice 1.6. ***Transponovaná matice***: Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu (m,n). Matice $\mathbf{A}^\top$ typu (n,m), pro jejíž prvky platí

$$a_{ij}^\top = a_{ji}, \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m,$$

nazýváme maticí ***transponovanou*** k matici $\mathbf{A}$.

Čtvercová matice $\mathbf{A}$ se nazývá ***symetrická*** právě tehdy, když $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ – symetrická matice}$$

Vlastnosti operací s maticemi: Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a nechť matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, jednotková matice $\mathbf{I}$ a nulová matice $\mathbf{0}$ jsou vždy takového typu, aby dané operace měly smysl.

$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$	komutativní zákon pro sčítání
$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$	asociativní zákon pro sčítání
$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$	vlastnost nulové matice
$\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$	distributivní zákon zleva
$(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$	distributivní zákon zprava
$(\alpha\beta)\mathbf{A}=\alpha(\beta\mathbf{A})$	asociativní zákon
$(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})=\alpha(\mathbf{AB})$	asociativní zákon
$\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$	asociativní zákon pro násobení
$\mathbf{IA}=\mathbf{A},\quad \mathbf{BI}=\mathbf{B}$	vlastnost jednotkové matice
$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$	distributivní zákon zleva
$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$	distributivní zákon zprava
$\left(\mathbf{A}^\top\right)^\top=\mathbf{A}$	transponování transponované matice
$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\top=\mathbf{A}^\top+\mathbf{B}^\top$	transponování součtu matic
$(\mathbf{AB})^\top=\mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$	transponování součinu matic

Ověření daných vztahů je jednoduché, a tak dokážeme pouze vztah o transponování součinu matic a asociativní zákon o násobení matic.

Příklad 1.3. *Ukažte, že platí* $(\mathbf{AB})^\top=\mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$.

Řešení: Budiž $\mathbf{A}$ typu (m,n), $\mathbf{B}$ typu (n,p), pak $(\mathbf{AB})^\top$ je typu (p,m); $\mathbf{B}^\top$ je typu (p,n), $\mathbf{A}^\top$ typu (n,m), takže $\mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$ je typu (p,m). Označme $\mathbf{C}=\mathbf{AB}, \mathbf{D}=\mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$, máme dokázat, že $\mathbf{C}^\top=\mathbf{D}$. Prvek $c^\top_{ij}$ matice $(\mathbf{AB})^\top$ je roven prvku c_{ji} matice $\mathbf{AB}$ $(i=1,\ldots,p, j=1,\ldots,m)$:

$$c^\top_{ij}=a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\ldots+a_{jn}b_{ni},$$

prvek d_{ij} matice $\mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$ je skalárním součinem i-tého řádku matice $\mathbf{B}^\top$ a j-tého sloupce matice $\mathbf{A}^\top$:

$$d_{ij}=b_{1i}a_{j1}+b_{2i}a_{j2}+\ldots+b_{ni}a_{jn}.$$

Matice $(\mathbf{AB})^\top, \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$ jsou téhož typu a mají na stejných místech sobě rovné prvky, tedy se rovnají. □

Příklad 1.4. *Ukažte, že platí* $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Řešení: $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ budiž typu (m,n), $\mathbf{B}=[b_{jk}]$ typu (n,r), $\mathbf{C}=[c_{kq}]$ typu (r,s);

$$i\text{–tý řádek matice } \mathbf{AB}: \quad \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{j1}, \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{j2}, \ldots \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jr}\right);$$

$$\text{prvek } d_{iq} \text{ matice } (\mathbf{AB})\mathbf{C}: \; d_{iq}=\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{j1}\right)c_{1q}+\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{j2}\right)c_{2q}+\ldots+\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jr}\right)c_{rq}$$

$d_{iq} = (a_{i1}b_{11} + \ldots + a_{in}b_{n1})c_{1q} + (a_{i1}b_{12} + \ldots + a_{in}b_{n2})c_{2q} + \ldots + (a_{i1}b_{1r} + \ldots + a_{in}b_{nr})c_{rq}$

$q-$tý sloupec matice $\mathbf{BC}$: $\left(\sum_{k=1}^{r} b_{1k}c_{kq}, \sum_{k=1}^{r} b_{2k}c_{kq}, \ldots, \sum_{k=1}^{r} b_{nk}c_{kq}\right)$

prvek e_{iq} matice $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$: $e_{iq} = a_{i1}\left(\sum_{k=1}^{r} b_{1k}c_{kq}\right) + a_{i2}\left(\sum_{k=1}^{r} b_{2k}c_{kq}\right) + \ldots + a_{in}\left(\sum_{k=1}^{r} b_{nk}c_{kq}\right)$

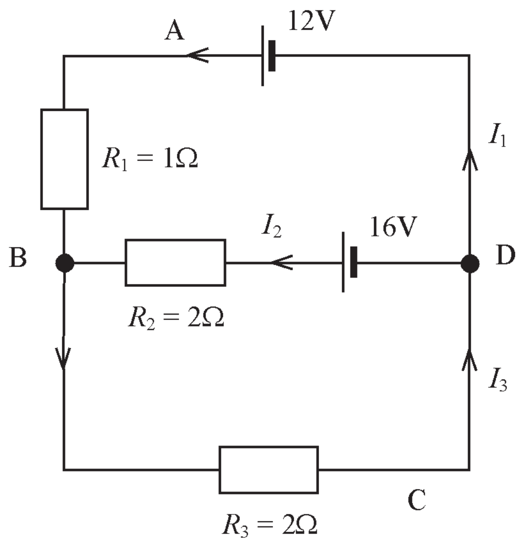
$e_{iq} = a_{i1}(b_{11}c_{1q} + \ldots + b_{1r}c_{rq}) + a_{i2}(b_{21}c_{1q} + \ldots + b_{2r}c_{rq}) + a_{in}(b_{n1}c_{1q} + \ldots + b_{nr}c_{rq})$

$$\left.\begin{aligned} d_{iq} &= \sum_{k=1}^{r}\Big[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kq}\Big] \\ e_{iq} &= \sum_{j=1}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{r} a_{ij}b_{jk}c_{kq}\Big] \end{aligned}\right\} d_{iq} = e_{iq} \quad (i = 1,\ldots,m, q = 1,\ldots,s), \quad (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

$\square$

2. Soustavy lineárních rovnic

Příklad 2.1. *Elektrický obvod.*



Obr. 2.1.

Vztahy mezi napětími a proudy můžeme vyjádřit pomocí obvodových rovnic sestavených na základě Kirchhoffových zákonů.

Kirchhoffovy zákony:

1. Kirchhoffův zákon	$I_1 + I_2 - I_3 = 0$	(pro uzel B resp. D)
2. Kirchhoffův zákon	$R_1 I_1 + R_3 I_3 = 12$	(pro smyčku ABCDA)
2. Kirchhoffův zákon	$R_1 I_1 - R_2 I_2 = 12 - 16$	(pro smyčku ABDA)

Obvodové rovnice:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\ I_1 + 2I_3 &= 12 \\ I_1 - 2I_2 &= -4 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Obvodové rovnice představují soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých. Ze střední školy známe ekvivalentní úpravy, jejichž smyslem je nahrazení dané soustavy jinou soustavou, která má stejné řešení a je jednodušší.

Ekvivalentní úpravy:

(E1) Výměna rovnic.

(E2) Vynásobení obou stran rovnice nenulovým číslem.

(E3) Přičtení násobku jedné rovnice k jiné rovnici.

Ekvivalentní úpravy mají samozřejmě tu vlastnost, že jimi můžeme upravit novou soustavu zpět na původní.

Vyřešme nyní soustavu (2.1) tak, že z druhé rovnice eliminujeme neznámou I_1 a z třetí rovnice neznámé I_1, I_2. To provedeme tak, že první rovnici odečteme od druhé a třetí rovnice a u nově vzniklé soustavy odečteme trojnásobek druhé rovnice od rovnice třetí:

$$\begin{array}{rcrcrcr|l} I_1 & + & I_2 & - & I_3 & = & 0 & \\ I_1 & & & + & 2I_3 & = & 12 & -r_1+r_2\to r_2 \\ I_1 & - & 2I_2 & & & = & -4 & -r_1+r_3\to r_3 \end{array} \mapsto \begin{array}{rcrcrcr|l} I_1 & + & I_2 & - & I_3 & = & 0 & \\ & - & I_2 & + & 3I_3 & = & 12 & \\ & - & 3I_2 & + & I_3 & = & -4 & -3r_2+r_3\to r_3 \end{array} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{array}{rcrcrcr} I_1 & + & I_2 & - & I_3 & = & 0 \\ & - & I_2 & + & 3I_3 & = & 12 \\ & & & - & 8I_3 & = & -40 \end{array} \implies \left.\begin{array}{rcl} I_1 & = & 2 \\ I_2 & = & 3 \\ I_3 & = & 5 \end{array}\right\uparrow \tag{2.2}$$

Jak vidíme, najít řešení soustavy (2.1) prostřednictvím ekvivalentní soustavy (2.2) je již snadné.

Práci si můžeme ještě usnadnit, nebudeme-li opisovat neznámé. Použijeme *matice*:

$$\underset{\text{matice soustavy}}{\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}}, \qquad \underset{\text{vektor pravých stran}}{\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ -4 \end{bmatrix}}, \qquad \underset{\text{rozšířená matice soustavy}}{\left[\,\mathbf{A}\,\middle|\,\mathbf{b}\,\right] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 12 \\ 1 & -2 & 0 & -4 \end{array}\right]},$$

Podobný postup nyní uplatníme na rozšířenou matici soustavy.

Ekvivalentním úpravám budou odpovídat ***elementární řádkové operace***:

(R1) Výměna řádků (výměna i-tého a j-tého řádku: $r_i \leftrightarrow r_j$).

(R2) Vynásobení řádku matice nenulovým číslem (vynásobení i-tého řádku číslem α: $\alpha r_i \to r_i$).

(R3) Přičtení násobku řádku k jinému řádku (přičtení α násobku i-tého řádku k j-tému řádku: $\alpha r_i + r_j \to r_j$).

Vznikne-li matice $\mathbf{B}$ z matice $\mathbf{A}$ elementárními řádkovými operacemi, řekneme, že matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou ***řádkově ekvivalentní*** a píšeme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$. Matici $\mathbf{B}$ můžeme totiž jinými elementárními řádkovými operacemi (inverzní operace) upravit zpět na matici $\mathbf{A}$.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 12 \\ 1 & -2 & 0 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -r_1+r_2\to r_2 \\ -r_1+r_3\to r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -3r_2+r_3\to r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & -8 & -40 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\hspace{6em}}$$

dopředná redukce

$$\begin{array}{rcrcrcr} I_1 & + & 3 & - & 5 & = & 0 \\ & - & I_2 & + & 3\cdot 5 & = & 12 \\ & & & - & 8I_3 & = & -40 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{rcl} I_1 & = & 2 \\ I_2 & = & 3 \\ I_3 & = & 5 \end{array}\right\uparrow \text{zpětná substituce}$$

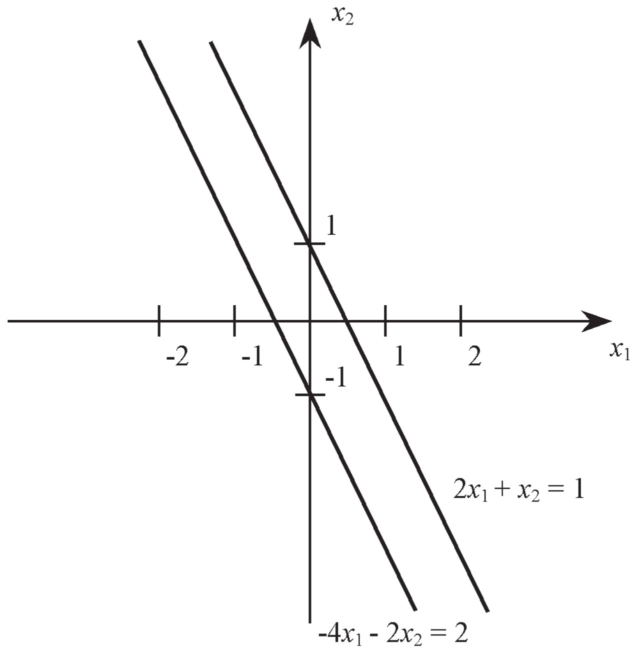
Soustava má jediné řešení.

Příklad 2.2.

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ -4x_1 & - & 2x_2 & = & 2 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 \end{array}\right] 2r_1 + r_2 \to r_2 \sim \left[\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \Longrightarrow$$

$$0x_1 + 0x_2 = 4$$

Soustava nemá řešení.



Obr. 2.2: Znázornění rovnic v příkladu 2.2.

Příklad 2.3.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & & & + & 5x_4 & & & = & 4 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & & & = & -11 \\ & & & & 2x_3 & + & 4x_4 & + & x_5 & = & -13 \\ & & & - & 3x_3 & - & 6x_4 & & & = & 21 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & -3 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & 0 & 21 \end{array}\right] r_1 + r_2 \to r_2 \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & 0 & 21 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2r_2 + r_3 \to r_3 \\ 3r_2 + r_4 \to r_4 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & 4 + 3r - 5s \\ x_2 & = & r \\ x_3 & = & -7 - 2s \\ x_4 & = & s \\ x_5 & = & 1 \end{array}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 + 3r - 5s \\ r \\ -7 - 2s \\ s \\ 1 \end{bmatrix} \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na dvou parametrech.

Metoda, kterou jsme použili při řešení příkladů 2.1–2.3, pochází od K.F. Gausse (1777-1855) a nazývá se ***Gaussova eliminační metoda (GEM)***. Výsledná matice, ke které jsme vždy dospěli (tzv. *schodová matice*), reprezentuje ekvivalentní soustavu, v níž každá následující rovnice má méně neznámých než předcházející. Najít její řešení je již jednoduché.

Definice 2.1. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ má ***schodový tvar***, jestliže platí:

1. Všechny nulové řádky matice $\mathbf{A}$ jsou umístěny dole až pod řádky s nenulovými prvky.
2. První nenulový prvek každého řádku ***(vedoucí prvek)*** je ve sloupci napravo od prvního nenulového prvku předcházejícího řádku.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ jsou schodové matice (SM). Matice $\mathbf{D}, \mathbf{E}$ nejsou schodové.

2.1 Obecný postup při řešení soustavy lineárních rovnic

Nechť je dána soustava m rovnic o n neznámých:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} & \text{maticový zápis soustavy} \\ \mathbf{A} & \text{matice soustavy} \\ \left[\, \mathbf{A} \,\middle|\, \mathbf{b} \,\right] & \text{rozšířená matice soustavy} \\ \mathbf{x} & \text{vektor neznámých} \\ \mathbf{b} & \text{vektor pravých stran} \end{array}$$

GEM transformujeme rozšířenou matici $\left[\, \mathbf{A} \,\middle|\, \mathbf{b} \,\right]$ soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ***dopřednou redukcí*** na matici $\left[\, \mathbf{H} \,\middle|\, \mathbf{c} \,\right]$ ekvivalentní soustavy $\mathbf{Hx} = \mathbf{c}$, kde matice $\mathbf{H}$ je ve *schodovém tvaru*. Soustava $\mathbf{Hx} = \mathbf{c}$ má stejné řešení jako původní, které obdržíme ***zpětnou substitucí*** pomocí matice $\mathbf{H}$.

Věta 2.1. Nechť je dána soustava m lineárních rovnic o n neznámých $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a nechť $\left[\, \mathbf{A} \,\middle|\, \mathbf{b} \,\right] \sim$ $\sim \left[\, \mathbf{H} \,\middle|\, \mathbf{c} \,\right]$, kde $\mathbf{H}$ je SM. Potom platí:

1. Soustava ***nemá řešení*** právě tehdy, když v matici $\left[\,\mathbf{H} \mid \mathbf{c}\,\right]$ je napravo od nulového řádku matice $\mathbf{H}$ nenulová složka vektoru $\mathbf{c}$.
2. Má-li soustava řešení a každý sloupec matice $\mathbf{H}$ obsahuje vedoucí prvek, pak má řešení ***právě jedno***.
3. Má-li soustava řešení, přičemž v některých sloupcích vedoucí prvek chybí, pak má ***nekonečně mnoho řešení*** závislých na k parametrech, kde k je počet sloupců, v nichž vedoucí prvek není.

Důkaz:

1. Je-li i-tý řádek matice $\mathbf{H}$ nulový a c_i různé od nuly, odpovídá tomuto řádku rovnice $0x_1 + \ldots + 0x_n = c_i$, která nemá řešení. Soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nemá tedy také řešení (viz příklad 2.2).

Nenastane-li případ 1., vynecháme v matici $\left[\,\mathbf{H} \mid \mathbf{c}\,\right]$ všechny nulové řádky. Těm totiž odpovídají rovnice $0x_1 + \ldots + 0x_n = 0$, které jsou splněny pro libovolná $x_1, \ldots, x_n$, a tudíž nemají vliv na řešení soustavy.

2. Obsahuje-li každý sloupec matice $\mathbf{H}$ vedoucí prvek, vypočteme z poslední rovnice neznámou x_n a dosadíme ji do předcházejících rovnic. Předposlední rovnice je opět rovnicí o jedné neznámé, z níž určíme neznámou x_{n-1}. Postupným dosazováním za neznámé pokračujeme až k první rovnici, přičemž vždy řešíme rovnici o jedné neznámé. Neznámé $x_n, \ldots, x_1$ jsou tak jednoznačně určeny (viz příklad 2.1).
3. Pro každý sloupec, který neobsahuje vedoucí prvek, položíme příslušnou neznámou rovnou parametru, který může nabývat libovolných reálných hodnot, a vypočteme neznámé, které odpovídají sloupcům s vedoucími prvky tak, že opět postupujeme od poslední rovnice soustavy k první rovnici jako v předchozím případě (viz příklad 2.3). Soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na daných parametrech.

$\square$

2.2 Gauss-Jordanova metoda

GJM je vylepšená *GEM*. Při elementárních řádkových operacích se nezastavíme u schodového tvaru, ale podělíme každý řádek matice vedoucím prvkem a pomocí operace (R3) upravíme matici tak, aby i nad vedoucím prvkem každého řádku byly nuly. Obdržíme matici v ***normovaném schodovém tvaru – (NSM)***.

SM z příkladu 2.1 upravíme na *NSM*.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & -8 & -40 \end{array}\right] \begin{array}{r} r_2 + r_1 \to r_1 \\ -r_2 \to r_2 \\ -\frac{1}{8} r_3 \to r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{r} -2r_3 + r_1 \to r_1 \\ 3r_3 + r_2 \to r_2 \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \quad \begin{array}{rcl} I_1 & = & 2 \\ I_2 & = & 3 \\ I_3 & = & 5 \end{array}$$

V našem případě je normovaná schodová matice jednotkovou maticí. Také poslední matice z příkladu 2.3 je *NSM*.

Dopředná redukce je u Gauss-Jordanovy metody pracnější, zpětná substituce je naopak snažší.

Poznámka 2.1. Má-li soustava m rovnic o n neznámých $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *právě jedno řešení*, pak nutně $m \geq n$ a *NSM* je tvořena jednotkovou maticí následovanou $m - n$ nulovými řádky. Soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se čtvercovou maticí ($m = n$) má tedy *jediné řešení*, právě když $\mathbf{A}$ je *řádkově ekvivalentní* s $n \times n$ jednotkovou maticí. Je-li soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ řešitelná a $m < n$, potom má *nekonečně mnoho řešení*.

2.3 Pracnost řešení

Pracnost řešení soustavy *GEM* charakterizujeme počtem násobení. Nechť $m = n$.

Dopředná redukce vyžaduje $\frac{1}{6}(2n+1)(n+1)n \sim \frac{1}{3}n^3$ násobení.
Zpětná substituce vyžaduje $\frac{1}{2}n(n+1) \sim \frac{1}{2}n^2$ násobení.

2.4 Soustavy se stejnou maticí a různými pravými stranami

Příklad 2.4. *Řešte soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & & & & & = & -10 \\ x_1 & - & 3x_2 & & & + & x_4 & = & -4 \\ x_1 & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -11 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcrcr} 2y_1 & - & 4y_2 & & & & & = & -8 \\ y_1 & - & 3y_2 & & & + & y_4 & = & -2 \\ y_1 & & & - & y_3 & + & 2y_4 & = & 9 \\ 3y_1 & - & 4y_2 & + & 3y_3 & - & y_4 & = & -15 \end{array}$$

Řešení: Soustavu vyřešíme užitím *GJM* pomocí jedné rozšířené matice.

$$\left[\begin{array}{rrrr|rr} 2 & -4 & 0 & 0 & -10 & -8 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 4 & 9 \\ 3 & -4 & 3 & -1 & -11 & -15 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{2}r_1 \to r_1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|rr} 1 & -2 & 0 & 0 & -5 & -4 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 4 & 9 \\ 3 & -4 & 3 & -1 & -11 & -15 \end{array}\right] \begin{array}{r} \\ -r_1 + r_2 \to r_2 \\ -r_1 + r_3 \to r_3 \\ -3r_1 + r_4 \to r_4 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|rr} 1 & -2 & 0 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 9 & 13 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{r} -2r_2 + r_1 \to r_1 \\ \\ 2r_2 + r_3 \to r_3 \\ 2r_2 + r_4 \to r_4 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|rr} 1 & 0 & 0 & -2 & -7 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 11 & 17 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{r} \\ -r_2 \to r_2 \\ \\ 3r_3 + r_4 \to r_4 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|rr} 1 & 0 & 0 & -2 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 11 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 39 & 52 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -r_3 \to r_3 \\ \frac{1}{13}r_4 \to r_4 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|rr} 1 & 0 & 0 & -2 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -11 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{r} 2r_4 + r_1 \to r_1 \\ r_4 + r_2 \to r_2 \\ 4r_4 + r_3 \to r_3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|rr} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{rcr} x_1 & = & -1 \\ x_2 & = & 2 \\ x_3 & = & 1 \\ x_4 & = & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} y_1 & = & 0 \\ y_2 & = & 2 \\ y_3 & = & -1 \\ y_4 & = & 4 \end{array}$$

□

Příklady k procvičení:

Cvičení 2.1. *Určete všechna řešení soustav lineárních rovnic užitím GJM:*

a) $$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 8x_2 & = & 16 \\ 5x_1 & - & 4x_2 & = & -8 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ 9x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & - & 7x_4 & = & 4 \end{array}$$

Cvičení 2.2. *Najděte řešení tří soustav lineárních rovnic se stejnou maticí a různými vektory pravých stran:*

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 3,\ 0,\ -10 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & 8,\ 0,\ -11 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & -5,\ 0,\ \ \ 9 \end{array}$$

3. Maticový zápis elementárních řádkových operací, inverzní matice

3.1 Elementární matice

Elementární řádkové operace můžeme realizovat prostřednictvím maticového násobení. Proveďme na jednotkové matici 2. řádu elementární řádkové operace R_1, R_2, R_3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} r_1 \leftrightarrow r_2 \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_1, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{\alpha r_2 \to r_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \mathbf{E}_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{\alpha r_1 + r_2 \to r_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_3$$

Budiž $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{2\times 2}$ libovolná matice a vypočítejme $\mathbf{E}_1\mathbf{A}, \mathbf{E}_2\mathbf{A}, \mathbf{E}_3\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{11} + a_{21} & \alpha a_{12} + a_{22} \end{bmatrix}$$

Vidíme, že výsledné matice $\mathbf{E}_1\mathbf{A}, \mathbf{E}_2\mathbf{A}, \mathbf{E}_3\mathbf{A}$ jsou matice, které bychom obdrželi z matice $\mathbf{A}$ provedením příslušných řádkových operací.

Definice 3.1. Matice, kterou obdržíme z jednotkové matice užitím jedné elementární řádkové operace, se nazývá ***elementární matice***.

Věta 3.1. Vznikne-li elementární matice $\mathbf{E}$ z jednotkové matice $\mathbf{I}$ řádu n provedením určité řádkové operace a je-li $\mathbf{A}$ $n \times s$ matice, potom součin $\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$ je matice, která je stejná jako matice, kterou dostaneme z matice $\mathbf{A}$ provedením této řádkové operace

Elementární matice řádu n:

$$\mathbf{I} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array} r_i \leftrightarrow r_j \sim \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \mathbf{P}_{ij}$$

$$\mathbf{I} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & i & & j & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \alpha r_i \to r_i \\ \sim \end{array} \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & i & & j & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \mathbf{M}_i(\alpha)$$

$$\mathbf{I} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & i & & j & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ \alpha r_i + r_j \to r_j \end{array} \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & i & & j & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \mathbf{G}_{ij}(\alpha)$$

3.2 Inverzní matice

Mějme lineární rovnici o jedné neznámé $ax = b$. Za předpokladu, že $a \neq 0$, obdržíme její řešení vynásobením obou stran číslem $1/a$:

$$x = (1/a)b.$$

Ptáme se nyní, zda-li i soustavu lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$, můžeme řešit podobným způsobem, t.j. existuje-li matice $\mathbf{C}$ taková, že $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$. Jestliže taková matice existuje, můžeme psát:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \ / \cdot \mathbf{C} && \text{Násobení maticí } \mathbf{C} \\ \mathbf{C}(\mathbf{Ax}) &= \mathbf{Cb} && \\ (\mathbf{CA})\mathbf{x} &= \mathbf{Cb} && \text{Asociativita násobení} \\ \mathbf{Ix} &= \mathbf{Cb} && \text{Vlastnost matice } \mathbf{C} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{Cb} && \text{Vlastnost jednotkové matice} \end{aligned}$$

Otázkou je, existuje-li k matici $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ matice $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{n\times n}$ dané vlastnosti. Například rovnice

$$\begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ukazuje, že

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ke každé matici $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ taková matice $\mathbf{C}$ však neexistuje. Bude-li matice $\mathbf{A}$ mít například j-tý sloupec nulový, pak také matice $\mathbf{CA}$ bude mít j-tý sloupec nulový pro libovolnou matici $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{n\times n}$:

$$\mathbf{C}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ \begin{bmatrix} . & 0 & . \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ . & 0 & . \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ \begin{bmatrix} . & 0 & . \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ . & 0 & . \end{bmatrix} \end{array} \neq \mathbf{I}.$$

Vyvstává také otázka, zda-li $\mathbf{AC} = \mathbf{I}$, pokud $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$ a naopak.

Definice 3.2. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice. Jestliže existuje matice $\mathbf{C}$ tak, že

$$\mathbf{AC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I},$$

pak se matice $\mathbf{C}$ nazývá ***inverzní maticí*** k matici $\mathbf{A}$. Čtvercová matice, ke které existuje inverzní matice se nazývá ***regulární***, v opačném případě takovou matici nazýváme ***singulární***.

Věta 3.2. Ke každé regulární matici existuje právě jedna inverzní matice.

Důkaz: Nechť platí $\mathbf{AC}_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{A} = \mathbf{I}, \mathbf{AC}_2 = \mathbf{C}_2\mathbf{A} = \mathbf{I}$:

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_2\mathbf{I} = \mathbf{C}_2(\mathbf{AC}_1) = (\mathbf{C}_2\mathbf{A})\mathbf{C}_1 = \mathbf{IC}_1 = \mathbf{C}_1$$

□

Jedinou inverzní matici k dané regulární matici $\mathbf{A}$ budeme značit $\mathbf{A}^{-1}$.

Příklad 3.1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}: \quad \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Příklad 3.2. *Také matice, která má nulový řádek je singulární:*

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} . & \dots & . \\ 0 & \dots & 0 \\ . & \dots & . \end{bmatrix}\mathbf{C} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} . & \dots & . \\ 0 & \dots & 0 \\ . & \dots & . \end{bmatrix} \neq \mathbf{I}$$

3.3 Elementární matice a regularita

Věta 3.3. Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{C}$ jsou regulární matice řádu n. Potom $\mathbf{AC}$ je regulární matice a platí $(\mathbf{AC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Důkaz:

$$(\mathbf{AC})(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AC}) = \mathbf{I}$$

□

Poznámka 3.1. Větu lze pomocí matematické indukce zobecnit na součin libovolného počtu regulárních matic:

$$(\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_n)^{-1} = \mathbf{A}_n^{-1} \dots \mathbf{A}_1^{-1}.$$

Elementární matice jsou regulární:

$$\mathbf{P}_{ij}^{-1} = \mathbf{P}_{ij}, \quad \mathbf{M}_i^{-1}(\alpha) = \mathbf{M}_i(\alpha^{-1}), \quad \mathbf{G}_{ij}^{-1}(\alpha) = \mathbf{G}_{ij}(-\alpha).$$

Elementární operace zachovávají regularitu matice:

$$\mathbf{A} \sim \text{elementární řádkové operace} \sim \mathbf{C}$$

Nechť $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_k$ jsou příslušné matice elementárních řádkových operací (elementární matice). Platí:

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}_k \dots \mathbf{T}_1 \mathbf{A}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{T}_1^{-1} \dots \mathbf{T}_k^{-1}, \quad \mathbf{C} \text{ je regulární}$$

3.4 Výpočet inverzní matice

Věta 3.4. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Pak rovnice $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ má jediné řešení $\mathbf{X}$ právě tehdy, když $\mathbf{A}$ je regulární. V tomto případě $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$.

DŮKAZ:

Jestliže $\mathbf{A}$ je regulární, potom existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ a platí: $\mathbf{AX} = \mathbf{I} / \cdot \mathbf{A}^{-1}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$.

Nechť obráceně rovnice $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ má jediné řešení $\mathbf{X} = \mathbf{C}$. Rovnice $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ je vlastně n soustav lineárních rovnic o n neznámých.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & & \mathbf{x}_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & & \mathbf{e}_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{Ax}_n = \mathbf{e}_n.$$

Soustavy mají stejnou matici $\mathbf{A}$ a řešíme je pomocí jediné rozšířené matice:

$$\left[\, \mathbf{A} \mid \mathbf{I} \,\right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] GJM \ \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{array}\right] = \left[\, \mathbf{I} \mid \mathbf{C} \,\right]$$

Rovnice má jediné řešení, a tedy podle poznámky 2.1 platí $\mathbf{A} \sim \mathbf{I}$. Z předpokladu věty 3.4 plyne $\mathbf{X} = \mathbf{C}$. Nechť $\mathbf{T}_1 \dots \mathbf{T}_k$ jsou příslušné matice elementárních řádkových operací transformujících $\left[\, \mathbf{A} \mid \mathbf{I} \,\right]$ na $\left[\, \mathbf{I} \mid \mathbf{C} \,\right]$ a nechť $\mathbf{T} = \mathbf{T}_k \dots \mathbf{T}_1$. Potom platí $\mathbf{TA} = \mathbf{I}, \mathbf{TI} = \mathbf{C}$, resp. $\mathbf{T} = \mathbf{C}$. Platí tedy

$$\mathbf{CA} = \mathbf{I}, \mathbf{AC} = \mathbf{I},$$

t.j. $\mathbf{C}$ je *inverzní maticí*, resp. $\mathbf{A}$ *je regulární*. □

Poznámka 3.2. Důkaz věty 3.4 dává návod k výpočtu inverzní matice. Sestavíme rozšířenou matici $[\,\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,]$. Matici $\mathbf{A}$ transformujeme řádkovými operacemi na jednotkovou matici a stejnými operacemi se jednotková matice transformuje na matici inverzní:

$$(\mathbf{T}_k \ldots \mathbf{T}_1)\mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad (\mathbf{T}_k \ldots \mathbf{T}_1)\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Příklad 3.3.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad [\,\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 9 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] r_1 \leftrightarrow r_2 \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 1 & 0 \end{array}\right] -2r_1 + r_2 \to r_2 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] -4r_2 + r_1 \to r_1 \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] = [\,\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}\,]$$

Věta 3.5. Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{C}$ jsou čtvercové matice řádu n. Potom $\mathbf{AC} = \mathbf{I}$ právě tehdy, když $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$.

Důkaz: Ukážeme, že ze vztahu $\mathbf{AC} = \mathbf{I}$ vyplývá $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$. Obrácenou implikaci bychom dokázali obdobně zaměněním úloh matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{C}$.

Je-li $\mathbf{AC} = \mathbf{I}$, potom soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má vždy řešení $\mathbf{x} = \mathbf{Cb}$ pro libovolný sloupcový vektor $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{A}(\mathbf{Cb}) = (\mathbf{AC})\mathbf{b} = \mathbf{Ib} = \mathbf{b}$$

Nechť $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_k$ jsou matice elementárních řádkových operací, které redukují matici $\mathbf{A}$ na matici $\mathbf{H}$, která je *NSM*. Platí tedy $\mathbf{H} = \mathbf{T}_k \ldots \mathbf{T}_1\mathbf{A}$. Ukážeme, že $\mathbf{H}$ je jednotkovou maticí. Kdyby tomu tak nebylo, matice $\mathbf{H}$ by měla poslední řádek nulový a soustava $\mathbf{Hx} = \mathbf{e}_n$, kde $\mathbf{e}_n$ je poslední sloupec jednotkové matice, by neměla řešení. To by ovšem znamenalo, že soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{T}_1^{-1} \ldots \mathbf{T}_k^{-1}\mathbf{e}_n$ jejíž úpravou soustava $\mathbf{Hx} = \mathbf{e}_n$ vznikla, by také neměla řešení, což je spor s naším pozorováním. Tedy $\mathbf{H} = \mathbf{I}$. Položme $\mathbf{T} = \mathbf{T}_k \ldots \mathbf{T}_1$. Potom $\mathbf{I} = \mathbf{TA}$. Odtud

$$\mathbf{T} = \mathbf{TI} = \mathbf{T}(\mathbf{AC}) = (\mathbf{TA})\mathbf{C} = \mathbf{IC} = \mathbf{C}.$$

Ukázali jsme tedy, že $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$. □

3.5 Použití inverzní matice

Inverzní matici můžeme použít k řešení lineární soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se čtvercovou regulární maticí. Jak už víme, řešení má tvar

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Počet operací nutných k výpočtu inverzní matice představuje u čtvercové matice řádu n asi n^3 násobení. Gaussova eliminační metoda je tedy výhodnější. Inverzní matice se vyplatí při řešení většího počtu lineárních soustav se stejnou maticí a různými pravými stranami. Její význam je také teoretický.

Příklady k procvičení:

Cvičení 3.1. *Rozhodněte, je-li matice*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

regulární a najděte inverzní matici, pokud existuje.

Cvičení 3.2. *Užitím inverzní matice řešte soustavu*

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 3 \\ -x_2 + x_3 &= 8. \end{aligned}$$

Cvičení 3.3. *Najděte inverzní matice k daným maticím:*

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

4. Řešení lineárních soustav pomocí LU rozkladu

Při řešení lineárních soustav $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{x}_s = \mathbf{b}_s$ je výhodné využít rozkladu matice $\mathbf{A}$ na součin dolní ($\mathbf{L}$) a horní ($\mathbf{U}$) trojúhelníkové matice, t.j. $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$. Předpokládáme, že $\mathbf{A}$ je čtvercová regulární matice.

Definice 4.1. Čtvercovou matici $\mathbf{U}(\mathbf{L})$ nazýváme horní (dolní) trojúhelníkovou maticí, jestliže $u_{ij} = 0$ pro $i > j$ ($l_{ij} = 0$ pro $i < j$).

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & u_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

HTM(horní trojúhelníková matice) $\qquad$ DTM(dolní trojúhelníková matice)

Řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, je-li $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$:

1. Soustavu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ napíšeme ve tvaru $\mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}$
2. Definujeme nový sloupcový vektor $\mathbf{y} : \mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$. (4.1)
3. Vyřešíme soustavu $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$.
4. Dosazením za $\mathbf{y}$ do (4.1) určíme $\mathbf{x}$.

Příklad 4.1.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b} : \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= 5 \\ y_3 &= 2 \end{aligned} \qquad \mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y} : \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Pokud bychom řešili jinou soustavu $\mathbf{A}\mathbf{x}' = \mathbf{b}'$ se stejnou maticí, lze opět využít matic $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$. Nechť například $\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} -4, & -2, & -5 \end{bmatrix}^\top$:

$$\mathbf{L}\mathbf{y}' = \mathbf{b}' : \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 7 & -5 \end{array}\right] \quad \begin{aligned} y_1' &= -2 \\ y_2' &= -8 \\ y_3' &= -3 \end{aligned} \qquad \mathbf{U}\mathbf{x}' = \mathbf{y}' : \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \quad \begin{aligned} x_1 &= -2 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Řešení soustavy se tak rozpadlo na řešení dvou soustav $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ *dopřednou substitucí* a $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ *zpětnou substitucí*.

K nalezení LU rozkladu regulární čtvercové matice potřebujeme nyní odvodit některé vlastnosti trojúhelníkových a elementárních matic.

Věta 4.1. Součinem dvou trojúhelníkových matic stejného typu je trojúhelníková matice téhož typu.

DŮKAZ: Nechť např. $\mathbf{U} = [u_{ij}]_{n\times n}$ a $\mathbf{V} = [v_{ij}]_{n\times n}$ jsou dvě HTM. Budiž $i > j$:

$$[\mathbf{UV}]_{ij} = 0v_{1j} + \ldots + 0v_{i-1\,j} + u_{ii}0 + \ldots + u_{in}0,$$

tedy $\mathbf{UV}$ je HTM.

Pro DTM se důkaz provede obdobně. □

Věta 4.2. Nechť $\mathbf{L} = [l_{ij}]_{n\times n}$ je DTM s nenulovými diagonálními prvky. Pak $\mathbf{L}$ je regulární a inverzní matice $\mathbf{L}^{-1}$ je také DTM.

DŮKAZ: Podle předpokladu $l_{ii} \neq 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Řádkovým operacím, které transformují matici $\mathbf{L}$ na jednotkovou matici $\mathbf{I}$ odpovídají elementární matice

$$\mathbf{G}_{12}(-l_{21}/l_{11}), \ldots, \mathbf{G}_{1n}(-l_{n1}/l_{11}), \mathbf{G}_{23}(-l_{32}/l_{22}), \ldots, \mathbf{G}_{2n}(-l_{n2}/l_{22}), \ldots, \mathbf{G}_{n-1n}(-l_{nn-1}/l_{n-1n-1});$$

$$\mathbf{M}_1(l_{11}^{-1}), \mathbf{M}_2(l_{22}^{-1}), \ldots, \mathbf{M}_n(l_{nn}^{-1}).$$

Položíme

$$\mathbf{T} = M_n(l_{nn}^{-1}) \ldots \mathbf{M}_1(l_{11}^{-1})\mathbf{G}_{n-1n}(-l_{nn-1}/l_{n-1n-1}) \ldots \mathbf{G}_{12}(-l_{21}/l_{11}),$$

potom $\mathbf{TL} = \mathbf{I}$, t.j. $\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{T}$. Matice $\mathbf{L}$ je tedy regulární. Inverzní matice $\mathbf{L}^{-1}$ je zřejmě DTM, neboť příslušné elementární matice jsou všechny DTM. □

4.1 Permutační matice

Definice 4.2. Matice $\mathbf{P}$ se nazývá permutační matice, je-li možno ji získat z jednotkové matice stejného typu postupnou výměnou řádků.

Poznámka 4.1. Výměnu i-tého a j-tého řádku dané matice lze provést vynásobením této matice maticí $\mathbf{P}_{ij}$ zleva. Každou permutační matici pak můžeme vyjádřit ve tvaru součinu

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{i_k j_k} \ldots \mathbf{P}_{i_2 j_2} \mathbf{P}_{i_1 j_1} \mathbf{I} = \mathbf{P}_{i_k j_k} \ldots \mathbf{P}_{i_1 j_1}$$

elementární matic zajišťujících vždy výměnu dvou řádků.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} r_1 \leftrightarrow r_3 \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} r_1 \leftrightarrow r_2 \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{12}\, \mathbf{P}_{13}\, \mathbf{I} = \mathbf{P}_{12}\, \mathbf{P}_{13}$$

Platí $\mathbf{P}_{ij}^{-1} = \mathbf{P}_{ij}$, dále $\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}_{ij}^{\top}$, takže $\mathbf{P}_{ij}^{-1} = \mathbf{P}_{ij}^{\top}$. Odtud

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^{\top} = \mathbf{P}_{i_k j_k} \ldots \mathbf{P}_{i_1 j_1} \left(\mathbf{P}_{i_k j_k} \ldots \mathbf{P}_{i_1 j_1}\right)^{\top} = \mathbf{P}_{i_k j_k} \ldots \mathbf{P}_{i_1 j_1} \mathbf{P}_{i_1 j_1}^{\top} \ldots \mathbf{P}_{i_k j_k}^{\top} = \mathbf{I},$$

tedy

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\top}.$$

Elementární matici $\mathbf{P}_{ij}$ můžeme také použít ***k výměně i-tého j-tého sloupce matice***. K tomu stačí danou matici ***vynásobit maticí $\mathbf{P}_{ij}$ zprava***:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix}.$$

Věta 4.3. ***O existenci LU rozkladu*:** Budiž $\mathbf{A}$ regulární čtvercová matice. Pak existuje *DTL* $\mathbf{L}$, *HTM* $\mathbf{U}$ a permutační matice $\mathbf{P}$ tak, že

$$\mathbf{AP} = \mathbf{LU}.$$

Matice $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$ jsou také regulární.

DŮKAZ: Nechť matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ je regulární. Matice $\mathbf{A}$ tedy nemůže mít žádný nulový sloupec nebo řádek. Existuje proto prvek $a_{1i_1} \neq 0, 1 \leq i_1 \leq n$. Matice $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{AP}_{1i_1}$ má tak na místě $(1,1)$ nenulový prvek $\bar{a}_{11} = a_{1i_1}$:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

Nechť $\mathbf{T}_1 = \mathbf{G}_{1n}(-\bar{a}_{n1}/\bar{a}_{11})\dots\mathbf{G}_{12}(-\bar{a}_{21}/\bar{a}_{11})$, potom $\mathbf{T}_1\mathbf{AP}_{1i_1} = \mathbf{A}_1$, kde

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ 0 & a^1_{22} & \dots & a^1_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a^1_{n2} & \dots & a^1_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1_{11} & a^1_{12} & \dots & a^1_{1n} \\ 0 & a^1_{22} & \dots & a^1_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a^1_{n2} & \dots & a^1_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matice $\mathbf{A}_1$ je opět regulární (viz poznámka 3.1), takže existuje prvek $a^1_{2i_2} \neq 0, 2 \leq i_2 \leq n$. Opakováním předchozího postupu obdržíme matici $\mathbf{T}_2\mathbf{A}_1\mathbf{P}_{2i_2} = \mathbf{A}_2$, kde

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a^2_{11} & a^2_{12} & \dots & a^2_{1n} \\ 0 & a^2_{22} & \dots & a^2_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a^2_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{G}_{2n}(-\bar{a}^1_{n2}/\bar{a}^1_{22})\dots\mathbf{G}_{23}(-\bar{a}^1_{32}/\bar{a}^1_{22}), \quad \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{AP}_{1i_1}\mathbf{P}_{2i_2} = \mathbf{A}_2.$$

Takto dospějeme až k matici

$$\mathbf{A}_{n-1} = \begin{bmatrix} a^{n-1}_{11} & a^{n-1}_{12} & \dots & a^{n-1}_{1n} \\ 0 & a^{n-1}_{22} & \dots & a^{n-1}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a^{n-1}_{nn} \end{bmatrix},$$

což je hledaná *HTM* $\mathbf{U}$, t.j. $\mathbf{U} = \mathbf{A}_{n-1}$. Platí tedy

$$\mathbf{T}_{n-1}\dots\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{AP}_{1i_1}\mathbf{P}_{2i_2}\dots\mathbf{P}_{n-1i_{n-1}} = \mathbf{U}.$$

Položme nyní

$$\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{T}_{n-1}\dots\mathbf{T}_1, \qquad \mathbf{P} = \mathbf{P}_{1i_1}\dots\mathbf{P}_{n-1i_{n-1}}.$$

Matice $\tilde{\mathbf{L}}$ je regulární *DTM*, neboť je součinem regulárních *DTM*. Existuje k ní proto inverzní matice $\tilde{\mathbf{L}}^{-1} = \mathbf{L}$, která je také *DTM*. Dosazením matic $\tilde{\mathbf{L}}$ a $\mathbf{P}$ obdržíme

$$\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{AP} = \mathbf{U}, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{AP} = \mathbf{LU}.$$

K matici $\mathbf{L}$ existuje inverzní matice $\tilde{\mathbf{L}}$, takže $\mathbf{L}$ je regulární. Matice $\mathbf{U}$ je součinem regulárních matic $\tilde{\mathbf{L}}, \mathbf{A}, \mathbf{P}$ a je tudíž také regulární. □

Poznámka 4.2. Rozbor důkazu dává návod, jak nalézt příslušný LU rozklad dané regulární matice:

$$\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{T}_{n-1} \dots \mathbf{T}_1 \mathbf{I}, \qquad \mathbf{U} = \mathbf{T}_{n-1} \dots \mathbf{T}_1 (\mathbf{AP})$$

Matici $\mathbf{A}$ upravíme na *HTM* $\mathbf{U}$ a stejnými řádkovými operacemi ((R3)) upravíme jednotkovou matici $\mathbf{I}$ na matici $\tilde{\mathbf{L}}$. Případnou výměnu sloupců provedeme na další jednotkové matici, abychom obdrželi matici $\mathbf{P}$. Matici $\mathbf{L}$ odvodíme známým postupem pro výpočet inverzní matice.

Příklad 4.2. *Najděte LU rozklad matice*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

$$[\,\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ 2r_1 + r_2 \to r_2 \\ -2r_1 + r_3 \to r_3 \end{array} \sim \underset{s_2 \leftrightarrow s_3}{\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]} \begin{array}{l} \text{výměna} \\ \text{sloupců} \end{array} \mapsto$$

$$\mapsto \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{3}{5}r_2 + r_3 \to r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{16}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{array}\right] = [\,\mathbf{U} \mid \tilde{\mathbf{L}}\,].$$

$$[\,\tilde{\mathbf{L}} \mid \mathbf{I}\,] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{16}{5} & -\frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2r_1 + r_2 \to r_2 \\ \frac{16}{5}r_1 + r_3 \to r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 1 & \frac{16}{5} & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \frac{3}{5}r_2 + r_3 \to r_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{3}{5} & 1 \end{array}\right] = [\,\mathbf{I} \mid \mathbf{L}\,]. \qquad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} s_2 \leftrightarrow s_3 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}.$$

$$\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -6 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -6 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

□

Poznámka 4.3. LU rozklad nemusí být jednoznačný. Při výpočtu matice $\mathbf{U}$ a $\tilde{\mathbf{L}}$ můžeme také použít řádkové operace (R2). Příslušné elementární matice $\mathbf{M}_i(\alpha)$ jsou také *DTM*. K matici $\mathbf{A}$ z předchozího příkladu můžeme také přiřadit matice

$$\tilde{\mathbf{L}}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -16 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Opět platí $\mathbf{AP} = \mathbf{L}'\mathbf{U}'$. Matice $\tilde{\mathbf{L}}', \mathbf{U}'$ obdržíme z matic $\tilde{\mathbf{L}}, \mathbf{U}$ provedením řádkové operace $5r_3 \to r_3$. Odpovídající elementární matice je

$$\mathbf{M}_3(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Při výpočtu matic $\mathbf{U}$ a $\tilde{\mathbf{L}}$ nepoužíváme výměny řádků!

4.2 Řešení soustav pomocí LU rozkladu

Je-li při výpočtu LU rozkladu matice $\mathbf{A}$ nutné provést výměnu sloupců, je řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ složitější. Rovnost $\mathbf{AP} = \mathbf{LU}$ přenásobíme zprava maticí $\mathbf{P}^\top$. Víme, že $\mathbf{P}^\top = \mathbf{P}^{-1}$. Vyjádření matice $\mathbf{A}$ dostaneme ve tvaru

$$\mathbf{A} = \mathbf{LUP}^\top.$$

Soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má tedy tvar $\mathbf{L}\big(\mathbf{U}(\mathbf{P}^\top\mathbf{x})\big) = \mathbf{b}$. Řešíme pak postupně

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{Uz} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{P}^\top\mathbf{x} = \mathbf{z}.$$

Příklad 4.3. *Užitím LU rozkladu řešte soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -2x_1 - 6x_2 + x_3 &= -9 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

ŘEŠENÍ: Matice $\mathbf{A}$ soustavy je shodná s maticí z příkladu 4.2. Můžeme přistoupit hned k řešení:

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b} : \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{16}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Uz} = \mathbf{y} : \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \begin{aligned} z_1 &= 1 \\ z_2 &= -1\,, \\ z_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}^\top\mathbf{x} = \mathbf{z} : \mathbf{x} = \mathbf{Pz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1\,. \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$\square$

Poznámka 4.4.

1. LU rozklad představuje efektivní nástroj pro řešení soustav lineárních rovnic se stejnou maticí soustavy a různými pravými stranami.
2. Počet násobení nutných k nalezení LU rozkladu čtvercové matice řádu n je asi $\frac{1}{2}n^3$, což je zhruba polovina operací, než je zapotřebí k nalezení inverzní matice.
3. Jak jsme si všimli, při řešení soustavy není nutné hledat matici $\mathbf{L}$, stačí pouze najít matici $\tilde{\mathbf{L}}$.
4. LU rozklad představuje důležitý nástroj teorie matic.

5. Determinant čtvercové matice

V této kapitole si ukážeme, že každé čtvercové matici odpovídá určité číslo nazývané *determinant matice*. Jak uvidíme, je možné determinantů použít i k řešení soustav lineárních rovnic se čtvercovou regulární maticí. Má také použití v některých oblastech vyšší matematiky.

5.1 Intuitivní pojetí determinantu

a) Mějme lineární rovnici o jedné neznámé $ax = b$. Její řešení má tvar

$$x = \frac{b}{a}, \text{ je} - \text{li } a \neq 0.$$

Zaveďme matice $\mathbf{A} = [a], \mathbf{B} = [b]$. Čísla $|\mathbf{A}| = a, |\mathbf{B}| = b$ budeme nazývat determinanty 1. řádu matic $\mathbf{A}, \mathbf{B}$. Řešení rovnice bude mít vyjádření

$$x = \frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{A}|}.$$

b) Soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých řešme sčítací metodou:

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & / \cdot a_{22} & / \cdot (-a_{21}) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & / \cdot (-a_{12}) & / \cdot a_{11} \end{array}$$

Soustava má jediné řešení

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad \text{jestliže} \quad a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0.$$

Sestavme matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}.$$

Čísla $|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}, |\mathbf{A}_1| = b_1a_{22} - b_2a_{12}, |\mathbf{A}_2| = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$ budeme nazývat determinanty 2. řádu matic $\mathbf{A}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$. Řešení soustavy má tak tvar

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|}, \qquad x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|}.$$

Můžeme si povšimnout, jak matici 2. řádu přiřadíme její determinant. Prvek matice na místě $(1,1)$ vynásobíme determinantem matice 1. řádu, kterou dostaneme vynecháním 1. řádku a 1. sloupce dané matice. Od tohoto součinu odečteme součin prvku matice v pozici $(2,1)$ s determinantem matice 1. řádu, kterou obdržíme vynecháním 2. řádku a 1. sloupce dané matice.

5.2 Determinant čtvercové matice řádu n

Definice 5.1. Budiž $\mathbf{A}$ čvercová matice n-tého řádu. ***Submatice*** $\mathbf{A}_{ij}$ matice $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu $n-1$, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Její determinant označujeme $|\mathbf{A}_{ij}|$ a nazýváme jej ***subdeterminantem*** *(minorem)* $(n-1)$-ního řádu matice $\mathbf{A}$. Číslo $A^*_{ij} = (-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|$ se nazývá ***algebraický doplněk*** prvku a_{ij}.

Definice 5.2. ***Determinant n-tého řádu*:** Determinantem matice $\mathbf{A} = [a_{11}]_{1\times 1}$ je číslo a_{11}. Nechť $n > 1$ a nechť jsou definovány všechny determinanty řádu menšího než n. Determinantem matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ rozumíme číslo

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A^*_{11} + a_{21}A^*_{21} + \ldots + a_{n1}A^*_{n1}.$$

Příklad 5.1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Příklad 5.2.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 6 & -7 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = 3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & -7 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(24-21) - 5\cdot(-4+6) + 2\cdot(7-12) = -11$$

Poznámka 5.1.

1. Definice 5.2 je definice rekurentní, resp. definice *indukcí*. Pravá strana vzorce pro determinant se nazývá rozvoj determinantu podle prvního sloupce. Někdy používáme místo $|\mathbf{A}|$ označení $\det \mathbf{A}$.

2. K výpočtu determinantu n-tého řádu počítáme n determinantů řádu $n-1$. Každý determinant řádu $n-1$ bychom zase počítali pomocí determinantů řádu $n-2$, atd.

3. Výpočet determinantu podle definice je tedy velmi zdlouhavý. Proto je vhodné odvodit vlastnosti determinantu, abychom si usnadnili jeho výpočet.

Věta 5.1. ***Rozvoj determinantu podle libovolného řádku nebo sloupce*:** Budiž $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ čtvercová matice řádu n. Nechť r, s jsou libovolná čísla z čísel $1, \ldots, n$. Potom

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{r+1} a_{r1} \, |\mathbf{A}_{r1}| + \ldots + (-1)^{r+n} a_{rn} \, |\mathbf{A}_{rn}| \qquad \text{(rozvoj determinantu podle } r\text{-tého řádku)},$$

resp.

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{1+s} a_{1s} \, |\mathbf{A}_{1s}| + \ldots + (-1)^{n+s} a_{ns} \, |\mathbf{A}_{ns}| \qquad \text{(rozvoj determinantu podle } s\text{-tého sloupce)}.$$

Důkaz věty je poněkud obtížný a uvedeme jej až později.

Příklad 5.3. *Determinant matice*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 6 & -7 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

vypočteme nyní rozvojem podle 3. řádku.

$$|\mathbf{A}| = 2 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (7 - 12) + 3 \cdot (-21 - 10) + 4 \cdot (18 + 5) = -11$$

Věta 5.2. ***Determinant matice*** $\mathbf{A}^\top$**:** Pro libovolnou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ platí, $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^\top|$.

DŮKAZ: Věta platí pro determinanty 1. a 2. řádu.

Nechť $n > 2$ a nechť věta platí pro čtvercové matice řádu menšího než n. Dokážeme, že věta platí i pro $n \times n$ matice. Položme $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= a_{11}|\mathbf{A}_{11}| - a_{12}|\mathbf{A}_{12}| + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n}|\mathbf{A}_{1n}| \qquad \text{(rozvoj determinantu podle 1. řádku)} \\ |\mathbf{B}| &= b_{11}|\mathbf{B}_{11}| - b_{21}|\mathbf{B}_{21}| + \ldots + (-1)^{n+1} b_{n1}|\mathbf{B}_{n1}| \qquad \text{(rozvoj determinantu podle 1. sloupce)} \end{aligned}$$

Platí: $a_{1j} = b_{j1}, \mathbf{B}_{j1} = \mathbf{A}^\top_{1j}, j = 1, \ldots, n$. Pro determinanty řádu $n-1$ věta platí. To znamená, že $|\mathbf{B}_{j1}| = |\mathbf{A}^\top_{1j}| = |\mathbf{A}_{1j}|$, odtud

$$|\mathbf{A}^\top| = |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|.$$

□

Poznámka 5.2. Věta zajišťuje, že každá vlastnost determinantu týkající se řádků platí i pro sloupce.

5.3 Vlastnosti determinantu

Věta 5.3. ***Výměna řádků*:** Vyměníme-li v dané čtvercové matici $\mathbf{A}$ dva různé řádky, je determinant vzniklé matice roven $-|\mathbf{A}|$.

DŮKAZ: Důkaz je triviální pro matici řádu 2. Budiž $n > 2$ a nechť věta platí pro matice řádu menšího než n. Nechť matice $\mathbf{B}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ záměnou i-tého a j-tého řádku. Jelikož $n > 2$, můžeme rozvinout determinanty matic $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ podle k-tého řádku, kde $k \neq i, k \neq j$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= (-1)^{k+1} a_{k1} |\mathbf{A}_{k1}| + \ldots + (-1)^{k+n} a_{kn} |\mathbf{A}_{kn}|, \\ |\mathbf{B}| &= (-1)^{k+1} b_{k1} |\mathbf{B}_{k1}| + \ldots + (-1)^{k+n} b_{kn} |\mathbf{B}_{kn}|. \end{aligned}$$

Platí: $a_{kl} = b_{kl}, l = 1, \ldots, n$, kromě řádků i, j jsou všechny řádky matic $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ stejné, $|\mathbf{B}_{kl}| = -|\mathbf{A}_{kl}|$, pro matice řádu $n-1$ věta platí. T.j. $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$, věta platí pro matice řádu n. □

Důsledek 5.1. Má-li čtvercová matice $\mathbf{A}$ dva stejné řádky, je $\det \mathbf{A} = 0$.

DŮKAZ: Výměnou těchto řádků obdržíme matici $\mathbf{B}$. Platí: $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$, ale také $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$ ($\mathbf{B} = \mathbf{A}$). Musí tudíž platit $\det \mathbf{A} = 0$ □

Věta 5.4. ***Vynásobení řádku skalárem*:** Je-li jeden řádek čtvercové matice $\mathbf{A}$ vynásoben skalárem r, bude determinant výsledné matice $r \cdot \det \mathbf{A}$.

DŮKAZ: Budiž $\mathbf{B}$ matice, kterou dostaneme z matice $\mathbf{A}$ náhradou k-tého řádku $(a_{k1}, \ldots, a_{kn})$ řádkem $(ra_{k1}, \ldots, ra_{kn})$.

$$|\mathbf{B}| = ra_{k1}A^*_{k1} + \ldots + ra_{kn}A^*_{kn} = r|\mathbf{A}|$$

□

Věta 5.5. ***Přičtení násobku řádku k jinému řádku*:** Přičteme-li r-násobek jednoho řádku čtvercové matice $\mathbf{A}$ k jinému řádku, je determinant takto vzniklé matice roven determinantu matice $\mathbf{A}$.

DŮKAZ: Označme $\mathbf{B}$ matici, kterou obdržíme z matice $\mathbf{A}$, jestliže r-násobek i-tého řádku přičteme k řádku k-tému, $k \neq i$. Determinant matice $\mathbf{B}$ vypočteme rozvojem podle k-tého řádku:

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}| &= b_{k1}B^*_{k1} + b_{k2}B^*_{k2} + \ldots + b_{kn}B^*_{kn} = \\ &= (ra_{i1} + a_{k1})A^*_{k1} + (ra_{i2} + a_{k2})A^*_{k2} + \ldots + (ra_{in} + a_{kn})A^*_{kn} = \\ &= (ra_{i1}A^*_{k1} + ra_{i2}A^*_{k2} + \ldots + ra_{in}A^*_{kn}) + (a_{k1}A^*_{k1} + a_{k2}A^*_{k2} + \ldots + a_{kn}A^*_{kn} = \\ &= r|\mathbf{C}| + |\mathbf{A}|. \end{aligned}$$

Matice $\mathbf{C}$ vznikla z matice $\mathbf{A}$ náhradou k-tého řádku řádkem i-tým. Má tak dva řádky stejné, a proto $|\mathbf{C}| = 0$. Potom ale $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$. □

Poznámka 5.3. Nyní už víme, jak řádkové operace ovlivňují determinant matice $\mathbf{A}$. Redukujeme-li matici $\mathbf{A}$ na *HTM* $\mathbf{U}$ a neprovádíme-li operaci násobení řádku skalárem, potom $\det \mathbf{A} = \pm \det \mathbf{U}$ a $\det \mathbf{U}$ je roven součinu diagonálních prvků:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & u_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\det \mathbf{U} = u_{11} \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} & \ldots & u_{2n} \\ 0 & u_{33} & \ldots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & u_{nn} \end{vmatrix} = u_{11}u_{22} \begin{vmatrix} u_{33} & u_{34} & \ldots & u_{3n} \\ 0 & u_{44} & \ldots & u_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & u_{nn} \end{vmatrix} = \ldots = u_{11}u_{22}\ldots u_{nn}.$$

Je-li $\mathbf{A}$ regulární čtvercová matice, potom matice $\mathbf{U}$ je také regulární, tzn., že všechny diagonální prvky matice $\mathbf{U}$ jsou nenulové. Platí tedy následující věta.

Věta 5.6. Čtvercová matice $\mathbf{A}$ je regulární tehdy a jenom tehdy, je-li $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Věta 5.7. Budiž $\mathbf{A}$ singulární matice řádu n a nechť $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n\times n}$ je libovolná matice. Potom matice $\mathbf{AB}$ je také singulární.

DŮKAZ: Důkaz provedeme sporem. Nechť $\mathbf{A}$ je singulární matice a předpokládejme, že $\mathbf{AB}$ je regulární matice. Potom k ní existuje inverzní matice $\mathbf{C}$ tak, že $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{I}$. Platí:

$$\mathbf{I} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}),$$

to znamená, že matice $\mathbf{BC}$ je inverzní k matici $\mathbf{A}$ (věta 3.5), což je ale spor, neboť $\mathbf{A}$ je singulární matice. $\square$

Věta 5.8. ***Determinant součinu matic*:** Jsou-li $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ $n\times n$ matice, je $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$.

DŮKAZ: Je-li matice $\mathbf{A}$ diagonální, věta platí:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \dots & a_{11}b_{1n} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & \dots & a_{22}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn}b_{n1} & a_{nn}b_{n2} & \dots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{AB}) = (a_{11}a_{22}\dots a_{nn}) \det \mathbf{B} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$. Využili jsme větu 5.4.

Je-li $\mathbf{A}$ singulární matice, pak také matice $\mathbf{AB}$ je singulární a platí $0 = \det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$.

Budiž nyní matice $\mathbf{A}$ regulární. Matici $\mathbf{A}$ redukujeme pomocí elementárních řádkových operací (R1), (R3) na diagonální matici $\mathbf{D}$. Platí: $\mathbf{D} = \mathbf{TA}$, matice $\mathbf{T}$ je rovna součinu příslušných elementárních matic, přičemž $|\mathbf{A}| = (-1)^r|\mathbf{D}|$, kde r označuje počet výměn řádků při redukci $\mathbf{A}$ na $\mathbf{D}$. Stejné operace transformují matici $\mathbf{AB}$ na matici $\mathbf{T}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{TA})\mathbf{B} = \mathbf{DB}$. Platí: $|\mathbf{AB}| = (-1)^r|\mathbf{DB}|$. To jest

$$|\mathbf{AB}| = (-1)^r|\mathbf{DB}| = (-1)^r|\mathbf{D}| \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|.$$

$\square$

5.4 Výpočet inverzní matice, řešení soustavy lineárních rovnic užitím determinantů

Věta 5.9. Nechť matice $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{n\times n}$ je regulární. Inverzní matice má následující tvar

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} A^*_{11} & A^*_{21} & \dots & A^*_{n1} \\ A^*_{12} & A^*_{22} & \dots & A^*_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^*_{1n} & A^*_{2n} & \dots & A^*_{nn} \end{bmatrix},$$

kde A^*_{ki} $(k, i = 1, \dots, n)$ jsou *algebraické doplňky* prvků a_{ki} matice $\mathbf{A}$.

Matici $\tilde{\mathbf{A}} = [A^*_{ki}]_{n\times n}$ nazýváme maticí ***adjungovanou*** k matici $\mathbf{A}$.

DŮKAZ: Nechť $\mathbf{A}_{i\to j}$ označuje matici, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ náhradou j-tého řádku řádkem i-tým:

$$\mathbf{A}_{i\to j} = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{-tý řádek} \\ \\ j\text{-tý řádek} \\ \\ \\ \end{array}$$

Potom

$$\det(\mathbf{A}_{i\to j}) = \begin{cases} \det \mathbf{A} & \text{, je-li } i = j \\ 0 & \text{, je-li } i \neq j. \end{cases}$$

Položme nyní $\mathbf{B} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\tilde{\mathbf{A}}$ a počítejme $\mathbf{AB}$:

$$\mathbf{AB} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^*_{11} & A^*_{21} & \dots & A^*_{n1} \\ A^*_{12} & A^*_{22} & \dots & A^*_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^*_{1n} & A^*_{2n} & \dots & A^*_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |\mathbf{A}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Platí totiž

$$\begin{aligned} a_{j1}A^*_{j1} + a_{j2}A^*_{j2} + \ldots + a_{jn}A^*_{jn} &= |\mathbf{A}|,\ j = 1, \ldots, n \\ a_{i1}A^*_{j1} + a_{i2}A^*_{j2} + \ldots + a_{in}A^*_{jn} &= 0,\quad i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

□

Věta 5.10. ***Cramerovo pravidlo***: Budiž dána soustava lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ s *regulární* $n \times n$ maticí. Soustava má jediné řešení, pro které platí

$$x_k = \frac{|\mathbf{A}_k|}{|\mathbf{A}|},\ k = 1, \ldots, n,$$

kde $\mathbf{A}_k$ je matice, kterou obdržíme z matice $\mathbf{A}$ výměnou k-tého sloupce za vektor pravých stran $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{A}_k = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & k & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array},\ k = 1. \ldots .n.$$

DŮKAZ: Matice soustavy je regulární, řešení soustavy je tedy jediné a platí $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{b} : \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_k} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} A^*_{11} & A^*_{21} & \dots & A^*_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A^*_{1k}} & \boldsymbol{A^*_{2k}} & \dots & \boldsymbol{A^*_{nk}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^*_{1n} & A^*_{2n} & \dots & A^*_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

t.j.

$$x_k = \frac{1}{|\mathbf{A}|}(b_1A^*_{1k} + b_2A^*_{2k} + \ldots + b_nA^*_{nk}) = \frac{|\mathbf{A}_k|}{|\mathbf{A}|}.$$

□

Poznámka 5.4. Výpočet inverzní matice pomocí matice adjungované má jen teoretický význam. Nalezení inverzní matice užitím elementárních řádkových operací je daleko výhodnější. Podobně soustavy lineárních rovnic budeme řešit Gaussovou eliminační metodou, řešení pomocí determinantů je vhodné pro soustavy nejvýše 3. řádu.

Příklad 5.4. *Najděte inverzní matici k matici*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

je-li $\mathbf{A}$ *regulární.*

Řešení:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -13 \neq 0.$$

Matice $\mathbf{A}$ je regulární.

$$\begin{aligned}
A^*_{11} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7, & A^*_{21} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5, & A^*_{31} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1, \\
A^*_{12} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, & A^*_{22} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A^*_{32} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8, \\
A^*_{13} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, & A^*_{23} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, & A^*_{33} &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \tilde{\mathbf{A}} = -\frac{1}{13} \begin{bmatrix} -7 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -8 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{13} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -8 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{13} \begin{bmatrix} -13 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Příklad 5.5. *Vypočtěte neznámou* x_2 *z dané soustavy rovnic*

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 1 \\
2x_1 + x_2 \phantom{{}- 3x_3} + 2x_4 &= 0 \\
x_2 - 6x_3 - x_4 &= 5 \\
3x_1 + x_2 \phantom{{}- 3x_3} + x_4 &= 1.
\end{aligned}$$

Řešení:

$$x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -6 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(-3)(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(-3)(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{2(-1)^2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{1(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-1} = 10$$

□

Příklady k procvičení:

Cvičení 5.1. *Vypočtěte inverzní matice k daným maticím užitím věty 5.9.*

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Cvičení 5.2. *Dané soustavy lineárních rovnic řešte pomocí Cramerova pravidla, pokud jej můžeme použít.*

a) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 1 \\ -4x_1 + 6x_2 &= -1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3x + 4y + 5z &= 5 \\ x + 2y + 4z &= 0 \\ 2x - y - 3z &= 6 \end{aligned}$

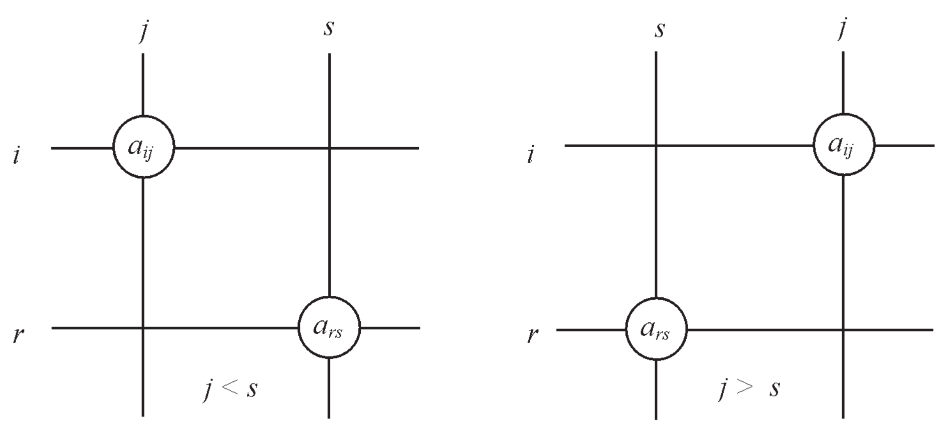
Důkaz věty 5.1: Ukážeme, že determinant můžeme vypočítat rozvojem podle libovolného řádku, pro sloupce je důkaz obdobný.

Věta platí zřejmě pro $n = 1, n = 2$.

Nechť $n > 2$ a předpokládejme, že věta platí pro determinanty řádu menšího než n. Máme dokázat, že věta platí i pro determinanty řádu n, t.j. rozvoj determinantu podle r-tého řádku je roven rozvoji determinantu podle i-tého řádku, je-li například $i < r$.

$$\text{rozvoj determinantu podle } i\text{-tého řádku} \quad \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|\mathbf{A}_{ij}| \tag{5.1}$$

$$\text{rozvoj determinantu podle } r\text{-tého řádku} \quad \sum_{s=1}^{n}(-1)^{r+s}a_{rs}|\mathbf{A}_{rs}| \tag{5.2}$$



Obr. 5.1.

Determinanty $|\mathbf{A}_{ij}|$ a $|\mathbf{A}_{rs}|$ jsou řádu $n-1$, takže je můžeme rozvinout podle libovolného řádku, tedy rozvineme $|\mathbf{A}_{ij}|$ podle řádku r a $|\mathbf{A}_{rs}|$ podle řádku i. Rozvoj (5.1) tak bude roven součtu součinů tvaru $(-1)^{\alpha}a_{ij}a_{rs}d$ a rozvoj (5.2) bude roven součtu součinů tvaru $(-1)^{\beta}a_{rs}a_{ij}d$, kde d je determinant matice, která vznikla z matice $\mathbf{A}$ vynecháním řádků i, r a sloupců j, s.

Platí (obr. 5.1):

Je-li $j < s, \alpha = i + j + (r-1) + (s-1)$; je-li $j > s, \alpha = i + j + (r-1) + s$.
Je-li $j < s, \beta = r + s + i + j$; je-li $j > s, \beta = r + s + i + (j-1)$.

Zřejmě $(-1)^{\alpha} = (-1)^{\beta}$, a tedy rozvoje (5.1) a (5.2) se rovnají.

Zbývá ještě dokázat, že rozvoj determinantu podle libovolného řádku je roven rozvoji podle libovolného sloupce. K tomu postačí dokázat rovnost rozvojů determinantů podle 1. řádku a podle 1. sloupce.

$$\text{rozvoj determinantu podle 1. řádku:} \quad a_{11}|\mathbf{A}_{11}| + \sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}|\mathbf{A}_{1j}|$$

Determinanty $|\mathbf{A}_{1j}|$ pro $j > 1$ rozvineme podle 1. sloupce:

$$|\mathbf{A}_{1j}| = \sum_{i=2}^{n}(-1)^{(i-1)+1}a_{i1}d,$$

kde d je determinant matice vzniklé z matice $\mathbf{A}$ vyškrtnutím řádků $1, i$ a sloupců $1, j$. Rozvoj determinantu podle 1. řádku je tak roven součtu členu $a_{11}|\mathbf{A}_{11}|$ a členů tvaru $(-1)^{1+j+i}a_{1j}a_{i1}d$.

Nyní rozvineme determinant podle 1. sloupce:

$$a_{11}|\mathbf{A}_{11}| + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}|\mathbf{A}_{i1}|$$

a determinanty $|\mathbf{A}_{i1}|$ pro $i > 1$ podle 1. řádku:

$$|\mathbf{A}_{i1}| = \sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+(j-1)}a_{1j}d.$$

Rozvoj determinantu podle 1. sloupce je opět roven součtu členu $a_{11}|\mathbf{A}_{11}|$ a členů tvaru $(-1)^{i+1+j}a_{i1}a_{1j}d$, kde d má stejný význam jako v předešlém odstavci.

Jak vidíme, oba rozvoje se rovnají součtu stejných členů a tedy jsou totožné. Důkaz věty je tak dokončen. $\square$

6. Polynomy a algebraické rovnice

6.1 Polynomy

S polynomy jsme se již seznámili na střední škole. Tyto elementární funkce potřebujeme nejen v matematice, ale také v technických oborech, kde například vztahy mezi zkoumanými veličinami často popisujeme pomocí polynomů. V této kapitole si naše poznatky o polynomech zopakujeme a rozšíříme.

Definice 6.1. Funkci P s definičním oborem $\mathbb{R}$, která je definována předpisem

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k,$$

kde $a_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, \ldots, n)$, nazýváme reálným polynomem.

Čísla $a_0, \ldots, a_n$ jsou koeficienty polynomu. Koeficient a_0 se nazývá absolutní člen. Je-li $a_n \neq 0$, řekneme, že polynom je stupně n. Člen a_nx^n se nazývá vedoucí člen polynomu.

Poznámka 6.1. Každá konstantní funkce s definičním oborem $\mathbb{R}$ je polynom. Polynomem je tudíž i funkce nulová na $\mathbb{R}$. Tento polynom nazýváme nulový a budeme jej značit 0. Platí tedy $0(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Věta 6.1. Budiž dán reálný polynom $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ a nechť $a_n \neq 0$. Potom polynom $P(x)$ je nutně nenulový.

Důkaz: Je-li $n = 0$, potom $P(x) = a_0 \neq 0$, a tudíž $P \neq 0$.

Nechť $n \geq 1$ a předpokládejme, že $P = 0$. Položme $K = |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|$. Zřejmě existuje reálné číslo x_0 takové, že $|x_0| > \frac{K}{|a_n|}$ a $|x_0| > 1$. Odtud platí:

$$|a_n||x_0| > K, \tag{6.1}$$

$$|x_0|^k \leq |x_0|^{n-1} \quad \text{pro} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{6.2}$$

Jelikož polynom P je nulový, znamená to, že $P(x_0) = 0$, a tudíž

$$-a_nx_0^n = a_0 + a_1x_0 + \ldots + a_{n-1}x_0^{n-1}.$$

Připomeňme si vlastnosti absolutní hodnoty:

$$|ab| = |a| \cdot |b|, \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$. Využijeme-li ještě (6.2), můžeme psát

$$|a_n||x_0|^n = |a_nx_0^n| \leq |a_0| + |a_1||x_0| + \ldots + |a_{n-1}||x_0|^{n-1} \leq K|x_0|^{n-1},$$

to jest $|a_n||x_0| \leq K$, což je ovšem spor s nerovností (6.1). Skutečně tedy $P \neq 0$. $\square$

Poznámka 6.2. Jestliže vyjádříme nulový polynom ve tvaru

$$0(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

potom nutně $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$. Platí tedy následující věta:

Věta 6.2. Dva nenulové polynomy

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \quad a_n \neq 0, \\ Q(x) &= b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m, \quad b_m \neq 0, \end{aligned}$$

se sobě rovnají právě tehdy, když $m = n$ a $a_k = b_k$ pro všechna $k = 0, \ldots, n$.

Poznámka 6.3. Je zřejmé, že nenulová konstantní funkce na $\mathbb{R}$ je polynom nultého stupně. Stupeň nulového polynomu není definován.

6.2 Operace s polynomy

Pro polynomy můžeme definovat operace sčítání, odčítání, násobení a dělení. Ze střední školy víme, že součet, rozdíl i součin polynomů je opět polynom. Výsledkem dělení polynomu polynomem nemusí už být polynom. Dělení polynomů je poněkud obtížnější, a tak si uvedeme větu, pomocí níž budeme moci dělit polynomy alespoň částečně a se zbytkem.

Věta 6.3. Ke každým dvěma polynomům $P(x)$ a $Q(x)$, kde $Q(x) \neq 0$, můžeme najít polynomy $B(x)$ a $R(x)$ tak, že

$$P(x) = Q(x)B(x) + R(x). \tag{6.3}$$

Stupeň polynomu $R(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$, nebo $R(x) = 0$, a polynomy $B(x), R(x)$ vyhovující vztahu (6.3) jsou jednoznačně určeny.

Důkaz: Budiž n stupeň polynomu P a m stupeň polynomu Q. Je-li $n < m$, položíme $B(x) = 0$ a $R(x) = P(x)$. Nechť nyní $n \geq m$ a nechť polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ jsou uspořádány sestupně, to jest

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0, \quad a_n \neq 0, \\ Q(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0, \quad b_m \neq 0. \end{aligned}$$

Položme

$$P(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} Q(x) = P_1(x).$$

Polynom $P_1(x)$ je stupně menšího než n. Označme jeho vedoucí člen $a_{n_1} x^{n_1}$. Pokud je $n_1 \geq m$, položíme

$$P_1(x) - \frac{a_{n_1}}{b_m} x^{n_1 - m} Q(x) = P_2(x).$$

Polynom $P_2(x)$ je stupně n_2, přičemž $n_2 < n_1$. Pokud $n_2 \geq m$, postupujeme dále, až konečně sestrojíme polynom

$$P_{k-1}(x) - \frac{a_{n_{k-1}}}{b_m} x^{n_{k-1} - m} Q(x) = P_k(x),$$

jehož stupeň n_k je menší než m. Platí tedy

$$P(x)-\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+\frac{a_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m}+\ldots+\frac{a_{n_{k-1}}}{b_m}x^{n_{k-1}-m}\right)Q(x)=P_k(x)$$

Označme $B(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+\frac{a_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m}+\ldots+\frac{a_{n_{k-1}}}{b_m}x^{n_{k-1}-m}, R(x)=P_k(x)$. Stupeň polynomu $R(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$. Existence polynomů $B(x)$ a $R(x)$ je tak dokázána.

Nechť nyní vedle polynomů $B(x)$ a $R(x)$ existují jiné dva polynomy $C(x)$ a $S(x)$ dané vlastnosti. Potom

$$P(x)=Q(x)B(x)+R(x), \tag{6.4}$$
$$P(x)=Q(x)C(x)+S(x). \tag{6.5}$$

Porovnáním pravých stran (6.4), (6.5) dostaneme

$$Q(x)\big[B(x)-C(x)\big]=S(x)-R(x) \tag{6.6}$$

Polynom $B(x)-C(x)$ je nutně nulový, jinak by polynom na levé straně (6.6) byl stupně většího nebo rovného stupni polynomu $Q(x)$, zatímco polynom na pravé straně (6.6) je stupně menšího než stupeň polynomu $Q(x)$. Je tedy $B(x)=C(x)$ a odtud $R(x)=S(x)$. $\square$

Poznámka 6.4. Věta dává návod k dělení polynomu polynomem. Polynom $B(x)$ nazýváme podílem polynomů $P(x)$ a $Q(x)$, polynom $R(x)$ se nazývá zbytek.

Příklad 6.1. *Polynom $P(x)=x^5+2x^4+3x^2+x$ dělte polynomem $Q(x)=x^2+2x-1$.*

ŘEŠENÍ:

$$\begin{array}{rll}
(x^5+2x^4+3x^2+x):(x^2+2x-1) = x^3+x+1 & & \\
\underline{-(x^5+2x^4-x^3)} & & \\
x^3+3x^2+x & =P_1(x) & (\text{stupeň } P_1(x): stp\,P_1=3>2)\\
\underline{-(x^3+2x^2-x)} & & \\
x^2+2x & =P_2(x) & (stp\,P_2=2\geq 2)\\
\underline{-(x^2+2x-1)} & & \\
1 & =P_3(x) & (stp\,P_3=0\leq 2)
\end{array}$$

Platí: $x^5+2x^4+3x^2+x=(x^2+2x-1)\cdot(x^3+x+1)+1, B(x)=x^3+x+1, R(x)=1.$ $\square$

Důsledek 6.1. Zbytek při dělení polynomu $P(x)$ lineárním dvojčlenem $x-c$ je roven hodnotě $P(c)$ polynomu $P(x)$ pro $x=c$. Platí totiž

$$P(x)=(x-c)B(x)+r.$$

Zbytek r je 0 nebo polynom stupně 0, to jest *nenulová konstanta*.

$$P(c)=(c-c)B(c)+r=r.$$

6.3 Hornerovo schéma

Na základě předchozího výsledku můžeme pro dělení polynomu lineárním dvojčlenem $x - c$ odvodit jednodušší algoritmus než dává věta 6.3.

Nechť $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ a nechť $P(x) = (x-c)B(x) + r$, kde polynom $B(x)$ je stupně $n-1$. Potom

$$(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0) = (x-c)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0) + r.$$

Porovnáním koeficientů při stejných mocninách dostáváme

$$\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n,\\
b_{n-2} &= a_{n-1} + cb_{n-1},\\
&\vdots\\
b_1 &= a_2 + cb_2,\\
b_0 &= a_1 + cb_1,\\
r &= a_0 + cb_0.
\end{aligned}$$

Uvedenému algoritmu říkáme Hornerovo schéma. Tímto způsobem obdržíme nejen koeficienty podílu $B(x)$, ale také hodnotu polynomu $P(x)$ pro $x = c$, což je právě zbytek r. V Hornerově schématu provádíme pouze násobení a sčítání a vyhneme se tak nepříjemnému umocňování. Postup se můžeme ještě usnadnit pomocí tabulky:

$$\begin{array}{c||cccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 & & \\
 & \downarrow & cb_{n-1} & \ldots & cb_2 & cb_1 & cb_0 & & \\
\hline
c & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_1 & b_0 & r & = & P(c)
\end{array}$$

Příklad 6.2. *Určete hodnotu polynomu $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + x - 7$ pro $x = 3$.*

Řešení:

$$\begin{array}{c||cccccc}
 & 2 & -5 & 0 & 1 & -7 & \\
 & \downarrow & 6 & 3 & 9 & 30 & \\
\hline
3 & 2 & 1 & 3 & 10 & 23 & = P(3)
\end{array}
\quad \text{nebo ještě jednodušeji} \quad
\begin{array}{c||cccccc}
 & 2 & -5 & 0 & 1 & -7 & \\
\hline
3 & 2 & 1 & 3 & 10 & 23 & = P(3)
\end{array}$$

□

6.4 Algebraické rovnice

Na střední škole jsme také poznali lineární a kvadratické rovnice, t.j. rovnice typu

$$ax + b = 0,\ a \neq 0,$$
$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0.$$

Kořeny těchto rovnic můžeme vypočítat pomocí jejich koeficientů algebraickými operacemi (sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování). Takto lze ještě získat kořeny rovnic třetího a čtvrtého stupně. Avšak rovnice stupně vyššího než 4 nemůžeme v obecném případě řešit algebraicky. To znamená, že jejich kořeny už nelze získat jako výsledek algebraických operací s jejich koeficienty. V některých jednodušších případech ale můžeme i tyto rovnice řešit.

V našich úvahách však nevystačíme pouze s reálnými polynomy. Například jednoduchá rovnice $x^2 + 1 = 0$ nemá reálné kořeny, nýbrž imaginární kořeny $i, -i$, jak se můžeme přesvědčit zkouškou. Potom ale za proměnnou x polynomu $x^2 + 1$ dosazujeme komplexní čísla, takže vlastně počítáme hodnotu funkce komplexní proměnné.

Definice 6.2. Funkce $P(x)$, která je pro všechna komplexní čísla x definována předpisem

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

kde $a_k \in \mathbb{C}$ $(k = 0, \ldots, n)$, se nazývá komplexní polynom.

Poznámka 6.5. Snadno se přesvědčíme, že výsledky odvozené v předchozích odstavcích pro reálné polynomy můžeme použít i v případě polynomů komplexních.

Definice 6.3. Rovnici $P(x) = 0$, kde $P(x)$ je polynom stupně $n \geq 1$ (obecně komplexní), nazýváme ***algebraickou rovnicí*** stupně n. Je-li $a_n = 1$, říkáme, že rovnice je v normovaném tvaru.

Definice 6.4. Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ nazýváme kořenem algebraické rovnice $P(x) = 0$ (resp. kořenem či nulovým bodem polynomu $P(x)$), jestliže $P(\alpha) = 0$. Výraz $x - \alpha$ nazýváme kořenovým činitelem.

Věta 6.4. ***Základní věta algebry*:** Každý komplexní polynom stupně alespoň prvního má v množině komplexních čísel alespoň jeden kořen.

DŮKAZ: Důkaz základní věty podal jako první K.F. Gauss koncem 18. století. Jeho důkaz stejně jako i jiné důkazy této věty využívají výsledků dalších matematických disciplín, a proto jej nebudeme uvádět. □

Věta 6.5. ***Bézoutova*:** Číslo α_1 je kořenem algebraické rovnice $P(x) = 0$ právě tehdy, když platí $P(x) = (x - \alpha_1)B(x)$. Jinými slovy polynom $P(x)$ je dělitelný kořenovým činitelem $x - \alpha_1$.

Důkaz věty se opírá o důsledek 6.1, na jehož základě můžeme psát

$$P(x) = (x - \alpha_1)B(x) + P(\alpha_1).$$

Důsledek 6.2. Je-li $B(x)$ stupně alespoň prvního, pak musí mít opět alespoň jeden kořen, označme jej α_2, takže platí $B(x) = (x - \alpha_2)C(x)$, a tedy $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)C(x)$. Budeme-li postupovat uvedeným způsobem, dospějeme k rozkladu polynomu $P(x)$ na součin n lineárních činitelů

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n). \tag{6.7}$$

Vyjádření polynomu $P(x)$ ve tvaru (6.7) je jednoznačné. Pokud by platilo, že

$$P(x) = a_n(x - \beta_1)(x - \beta_2)\ldots(x - \beta_n), \tag{6.8}$$

přičemž kořen α_i by byl různý od všech kořenů β_j $(j = 1, \ldots, n)$, pak by na základě (6.7) a (6.8) platilo, že $P(\alpha_i) = 0$ a zároveň $P(\alpha_i) \neq 0$. Tedy každý kořen α_i je roven některému z kořenů β_j a naopak.

Poznámka 6.6. Kořeny $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nemusí být všechny navzájem různé. Bude-li například k_1 kořenů rovno číslu α_1, budeme říkat, že kořen α_1 je k_1-násobný. Podobně kořen α_2 může být k_2-násobný atd. Platí tudíž následující věta:

Věta 6.6. Nechť polynom $P(x)$ stupně $n \geq 1$ má v množině komplexních čísel r různých kořenů $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, jejichž násobnost je $k_1, \ldots, k_r$. Pak můžeme polynom $P(x)$ vyjádřit jednoznačně ve tvaru

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_r)^{k_r}, \tag{6.9}$$

přičemž $k_1 + \ldots + k_r = n$.

Říkáme, že jsme polynom $P(x)$ vyjádřili ve tvaru součinu kořenových činitelů.

Důsledek 6.3. Každá algebraická rovnice stupně $n \in \mathbb{N}$ má v množině komplexních čísel právě n kořenů, jestliže každý kořen počítáme tolikrát, kolik je jeho násobnost.

Věta 6.7. ***O racionálních kořenech*:** Nechť algebraická rovnice

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

($n \in \mathbb{N}$) s celočíselnými koeficienty má jako kořen racionální číslo $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou celá čísla nesoudělná. Potom absolutní člen a_0 je dělitelný číslem p a koeficient vedoucího členu a_n je dělitelný číslem q.

Důkaz: Nechť

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Vynásobením obou stran rovnice číslem q^n obdržíme

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Odtud

$$\frac{a_0 q^n}{p} = -(a_n p^{n-1} + \ldots + a_1 q^{n-1}), \tag{6.10}$$

$$\frac{a_n p^n}{q} = -(a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_0 q^{n-1}). \tag{6.11}$$

Podle předpokladu jsou celá čísla p, q nesoudělná a $a_k \in \mathbb{Z}$ $(k = 0, \ldots, n)$. Na pravé straně rovností (6.10), (6.11) máme vždy celá čísla, a tedy číslo p je dělitelem čísla a_0 a číslo q je dělitelem čísla a_n. $\square$

Důsledek 6.4. Má-li normovaná algebraická rovnice s celočíselnými koeficienty kořen $\alpha \in \mathbb{Z}$, potom nutně absolutní člen a_0 je dělitelný číslem α.

Věta 6.8. ***O komplexních kořenech*:** Nechť koeficienty a_k $(k = 0, \ldots, n)$ rovnice $P(x) = 0$ jsou reálná čísla. Potom platí: Je-li komplexní číslo $\alpha = a + bi$ k-násobným kořenem této rovnice, pak také číslo komplexně sdružené $\bar{\alpha} = a - bi$ je k-násobným kořenem této rovnice.

Důkaz: Nechť $P(\alpha) = 0$, máme dokázat, že také $P(\overline{\alpha}) = 0$. Zřejmě $\overline{P(\alpha)} = 0$, t.j.

$$\overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0} = 0.$$

Jelikož pro libovolná komplexní čísla platí $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$, $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$, můžeme psát

$$\overline{a_n}\,\overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1}\,\overline{\alpha} + \overline{a_0} = 0.$$

Ale $\overline{a_n} = a_n, \ldots, \overline{a_0} = a_0$, neboť koeficienty jsou čísla reálná, a tedy

$$a_n\overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{\alpha} + a_0 = 0.$$

Ukážeme ještě, že kořen $\overline{\alpha}$ je k-násobný, je-li α k-násobný kořen. Kdyby kořen $\overline{\alpha}$ byl r-násobný, kde $r < k$, mohli bychom psát $P(x) = (x - \alpha)^r(x - \overline{\alpha})^r Q(x)$, přičemž číslo $\overline{\alpha}$ by nebylo kořenem polynomu $Q(x)$, zatímco α ano. To je však podle toho, co jsme dokázali výše, nemožné. Podobně nemůže nastat, že $r > k$. $\square$

Důsledek 6.5. Vynásobíme-li $(x-a-bi)(x-a+bi)$ obdržíme kvadratický mnohočlen x^2+px+q s reálnými koeficienty $p=-2a, q=a^2+b^2$, kde $p^2-4q<0$, který nelze rozložit na reálné lineární činitele. Bude-li mít polynom $P(x)$ s reálnými koeficienty reálné kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ s násobností $r_1, r_2, \ldots, r_k$ a komplexně sdružené kořeny $a_1 \pm b_1 i, a_2 \pm b_2 i, \ldots, a_l \pm b_l i$, jejichž násobnosti jsou $s_1, s_2, \ldots, s_l$, můžeme jej vyjádřit ve tvaru součinu reálných lineárních a kvadratických nerozložitelných mnohočlenů:

$$P(x) = a_n (x-\alpha_1)^{r_1} \cdots (x-\alpha_k)^{r_k} (x^2+p_1 x+q_1)^{s_1} \cdots (x^2+p_l x+q_l)^{s_l}, \tag{6.12}$$

přičemž $r_1+\ldots+r_k+2(s_1+\ldots+s_l)=n$.

7. Algebraické operace a struktury

Definice 7.1. Binární algebraická operace $\circ$ na neprázdné množině $\mathcal{A}$ je zobrazení $\circ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (a,b) \mapsto a \circ b \in \mathcal{A}$. Množina $\mathcal{A}$ spolu s operací $\circ$ se nazývá ***grupoid***, který zapisujeme $(\mathcal{A}, \circ)$.

Příklady:

$$
\begin{array}{ll}
(\mathbb{R}, +) & : \mathbb{R}^2 \ni (a,b) \mapsto a + b \in \mathbb{R} \\
(\mathbb{C}, \cdot) & : \mathbb{C}^2 \ni (\alpha,\beta) \mapsto \alpha \cdot \beta \in \mathbb{C} \\
\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \cdot\big) & : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ni (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\
 & \textit{množina všech reálných } n \times n \textit{ matic}
\end{array}
$$

Definice 7.2. Grupoid $(\mathbb{A}, \cdot)$ je asociativní, jestliže pro libovolné prvky $a, b, c \in \mathcal{A}$ platí

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Příklady:

$(\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, \cdot), \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \cdot\big)$

$\big(\mathcal{Z}(\mathcal{A}), \circ\big)$ množina všech zobrazení množiny $\mathcal{A}$ do sebe, $\circ$ je operace skládání zobrazení.

$f : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}, \quad g : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}, \quad g \circ f : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}, \quad x \in \mathcal{A} : (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

$$\big[(h \circ g) \circ f\big](x) = (h \circ g)\big(f(x)\big) = h\Big[g\big(f(x)\big)\Big]$$

$$\big[h \circ (g \circ f)\big](x) = h\big[(g \circ f)(x)\big] = h\Big[g\big(f(x)\big)\Big]$$

$(\mathbb{N}, \uparrow), \quad \uparrow : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (a,b) \mapsto a^b \in \mathbb{N}, \quad 2 \uparrow (4 \uparrow 2) = 2^{16}, \quad (2 \uparrow 4) \uparrow 2 = 16^2 = 2^8,$

$(\mathbb{N}, \uparrow)$ není asociativní.

Definice 7.3. Prvek $e \in \mathcal{A}$ nazýváme ***neutrálním prvkem*** grupoidu $(\mathcal{A}, \circ)$, jestliže pro každé $a \in \mathcal{A}$ platí

$$a \circ e = e \circ a = a.$$

Příklady:

$$
\begin{array}{ll}
(\mathbb{R}, +) & \text{neutrální prvek } 0 \ (\textit{nulový prvek}) \\
(\mathbb{C}, \cdot) & \text{neutrální prvek } 1 \ (\textit{jednotkový prvek}) \\
\big(\mathcal{Z}(\mathcal{A}), \circ\big) & \text{neutrální prvek } I_{\mathcal{A}} \ (\textit{identita na množině } \mathcal{A}) \\
\big(\mathcal{Z}(\mathbb{R}), \circ\big) & I_{\mathbb{R}} : y = x \\
\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \cdot\big) & \mathbf{I}_n \text{ jednotková matice} \\
(\mathbb{N}, \uparrow) & a \uparrow 1 = a^1 = a, 1 \uparrow a = 1^a = 1, \textit{ neexistuje neutrální prvek}
\end{array}
$$

Věta 7.1. Každý grupoid má ***nejvýše jeden*** neutrální prvek.

DŮKAZ: Nechť e_1, e_2 jsou dva neutrální prvky grupoidu $(\mathcal{A}, \circ)$. Potom

$$e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2.$$

□

Definice 7.4. Nechť $(\mathcal{A}, \circ)$ je grupoid s neutrálním prvkem e. Prvek $b \in \mathcal{A}$ nazýváme levým (pravým) inverzním prvkem k prvku $a \in \mathcal{A}$, jestliže platí $b \circ a = e$ $(a \circ b = e)$. Prvek b nazýváme ***inverzním prvkem*** k prvku a, jestliže

$$a \circ b = b \circ a = e.$$

Příklady:

$(\mathbb{Z}, +)$	inverzní prvek k $a \in \mathbb{Z}$ je $-a$ (*číslo opačné*)
$(\mathbb{R}, \cdot)$	inverzní prvek k $0 \neq a \in \mathbb{R}$ je $a^{-1} = \frac{1}{a}$ (*číslo převrácené*)
$\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \cdot\big)$	inverzní prvek k $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ je $\mathbf{A}^{-1}$
	množina čtvercových regulárních matic řádu n
$\big(\mathcal{Z}(\mathcal{A}), \circ\big)$,	nechť $g \circ f = I_{\mathcal{A}}$: f je pravé inverzní zobrazení ku g
	g je levé inverzní zobrazení k f
g je zobrazení na množinu:	$a = I_{\mathcal{A}}(a) = (g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big)$,
	t.j. každý prvek $a \in \mathcal{A}$ má svůj vzor $g_a \in \mathcal{A}$
f je zobrazení prosté:	$\big(a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)\big) \Leftrightarrow \big(f(a) = f(b) \Rightarrow a = b\big)$
	$a = I_{\mathcal{A}}(a) = (g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big) = g\big(f(b)\big) = (g \circ f)(b) = I_{\mathcal{A}}(b) = b$

Zobrazení $f \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ bude mít inverzní zobrazení ve smyslu definice 7.4, právě když bude vzájemně jednoznačné: $g \circ f = f \circ g = I_{\mathcal{A}}$.

Definice 7.5. Grupoid $(\mathcal{A}, \circ)$ je komutativní, jestliže pro všechna $a, b \in \mathcal{A}$ platí

$$a \circ b = b \circ a.$$

Příklady:

$(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}, \cdot)$	jsou komutativní grupoidy
$\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \cdot\big), \big(\mathcal{Z}(\mathcal{A}), \circ\big)$	nejsou komutativní grupoidy

Definice 7.6. Grupoid $(\mathcal{A}, \circ)$ se nazývá ***grupa***, jestliže platí

(i)	asociativní zákon	$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ pro všechna $a, b, c \in \mathcal{A}$,
(ii)	neutrální prvek	existuje $e \in \mathcal{A}$ tak, že $a \circ e = e \circ a = a$ pro všechna $a \in \mathcal{A}$,
(iii)	inverzní prvek	pro každé $a \in \mathcal{A}$ existuje $a^{-1} \in \mathcal{A}$ takový, že $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Příklady: $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \cdot\big)$ regulární matice

Věta 7.2. Nechť $(\mathcal{A}, \circ)$ je grupa s neutrálním prvkem e. Potom platí následující tvrzení:

a) ke každému prvku $a \in \mathcal{A}$ existuje právě jeden inverzní prvek $a^{-1} \in \mathcal{A}$;

b) nechť $a, b, c \in \mathcal{A}$, jestliže $a \circ b = a \circ c$, pak $b = c$. V grupě lze *krátit*;

c) nechť $a, b \in \mathcal{A}$, pak existuje jediný prvek $x \in \mathcal{A}$ $(y \in \mathcal{A})$ tak, že $a \circ x = b$ $(y \circ a = b)$.

Důkaz:

a) Nechť existují dva inverzní prvky $b, c : a \circ b = b \circ a = e, a \circ c = c \circ a = e$. Potom

$$b = b \circ e = b \circ (a \circ c) = (b \circ a) \circ c = e \circ c = c.$$

b) Nechť $a \circ b = a \circ c$, potom $a^{-1} \circ (a \circ b) = a^{-1} \circ (a \circ c)$, tedy

$$(a^{-1} \circ a) \circ b \circ (a^{-1} \circ a) \circ c, \text{ t.j. } e \circ b = e \circ c, \text{ resp. } b = c.$$

c) Budiž $x = a^{-1} \circ b : a \circ x = a^{-1} \circ (a \circ b) = (a^{-1} \circ a) \circ b = e \circ b = b$. Ukážeme, že x je jediné:

$$\text{Nechť } a \circ x_1 = b, a \circ x_2 = b, \text{ potom } a \circ x_1 = a \circ x_2 \text{ a podle b) } x_1 = x_2.$$

$\square$

Definice 7.7. ***Komutativní těleso*** $(\mathcal{T}, +, 0, \cdot, 1)$ je množina $\mathcal{T}$ mající alespoň dva různé prvky, na níž jsou definovány dvě binární operace $+$ s neutrálním prvkem 0 a $\cdot$ s neutrálním prvkem 1 tak, že platí

(T1) $(\mathcal{T}, +, 0)$ je komutativní grupa,

(T2) $(\mathcal{T} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ je komutativní grupa,

(T3) pro každé $a, b, c \in \mathcal{T}$ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Operace $+$ $(\cdot)$ nazýváme sčítání (násobení), nemusí však jít o běžné sčítání (násobení).

Příklady: $(\mathbb{R}, +, 0, \cdot, 1), (\mathbb{C}, +, 0, \cdot, 1), (\mathbb{Q}, +, 0, \cdot, 1), (\{0, 1\}, +, 0, \cdot, 1)$

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Cvičení 7.1.

1. *Ukažte, že v grupě* $(\mathcal{A}, \circ, e)$ *platí* $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.

2. *Ukažte, že v tělese platí* $1 \cdot 0 = 0, a \cdot 0 = 0, (-1) \cdot a = -a$.

3. *Dokažte, že v asociativním grupoidu platí* $\big((a \circ b) \circ c\big) \circ d = a \circ \big(b \circ (c \circ d)\big)$.

Obsah