Lineární algebra — 9. přednáška: Ortogonalita

Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

http://homel.vsb.cz/~luk76/LA1

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

Motivace

JPEG komprese Leny

původní bitmapa

1% komprese Fourierovou bází

Motivace

JPEG komprese Leny

původní bitmapa

5% komprese Fourierovou bází

Motivace

JPEG komprese Leny

původní bitmapa

10% komprese Fourierovou bází

Motivace

JPEG komprese Leny

původní bitmapa

15% komprese Fourierovou bází

Motivace

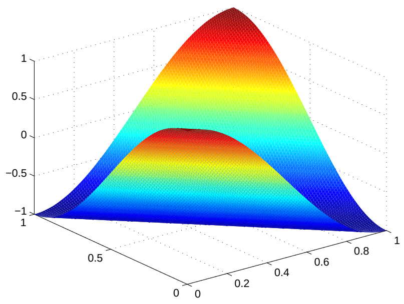
JPEG komprese Leny

původní bitmapa	20% komprese Fourierovou bází
	

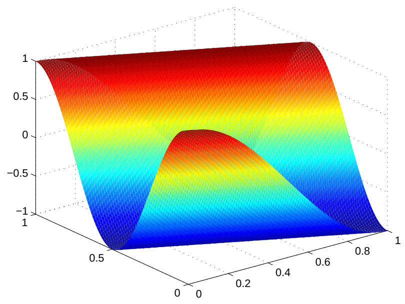
Motivace

JPEG: Fourierova L2–ortogonální báze $f_{jk}(x, y) := \mathrm{e}^{\imath\omega(jx+ky)}$

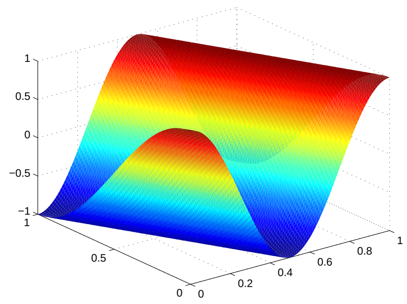
$\mathrm{Re}\, f_{11}(x, y)$



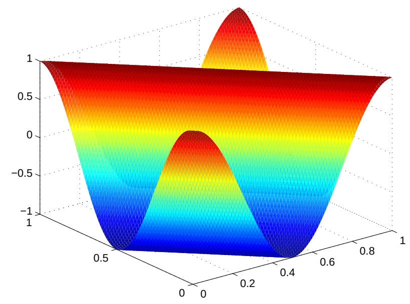
$\mathrm{Re}\, f_{12}(x, y)$



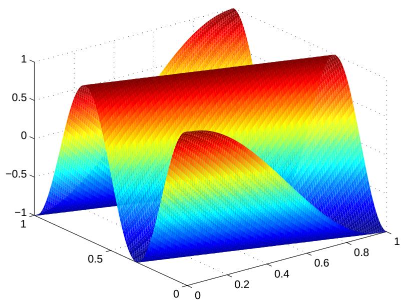
$\mathrm{Re}\, f_{21}(x, y)$



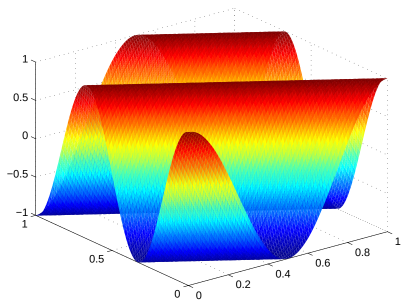
$\mathrm{Re}\, f_{22}(x, y)$



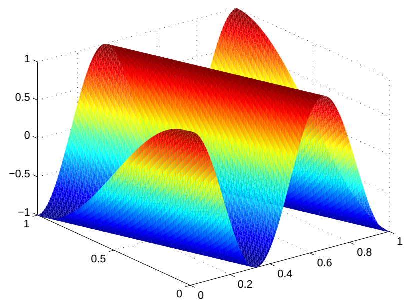
$\mathrm{Re}\, f_{13}(x, y)$



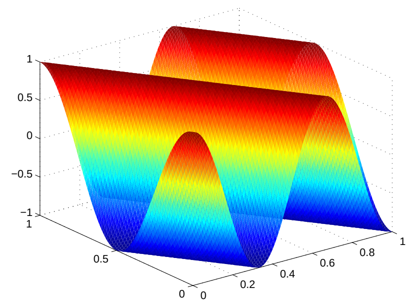
$\mathrm{Re}\, f_{23}(x, y)$



$\mathrm{Re}\, f_{31}(x, y)$



$\mathrm{Re}\, f_{32}(x, y)$



Ortogonalita (v L2 skalárním součinu) $\Longrightarrow$ rychlá komprese

Motivace

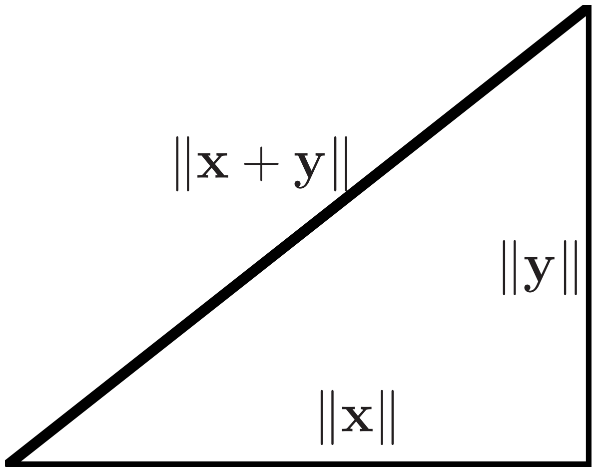
Lena — ,,první dáma internetu”

Lena Sjööblom, playmate 1972

Lena Söderberg, 1997

Ortogonalita = kolmost

Pythagorova věta: $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2: \ \mathbf{x} \perp \mathbf{y} \ \Leftrightarrow \ \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2$



$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

Vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou **ortogonální** (kolmé), pokud

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0.$$

Ortogonalita = kolmost

Eukleidovský skalární součin, norma, ortogonalita, ortonormalita

Bilineární forma $(.,.) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

se nazývá **Eukleidovský skalární součin**. Ten indukuje **Eukleidovskou normu**

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

Vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ jsou **ortogonální** (v Eukl. skalárním součinu), pokud

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,$$

a jsou **ortonormální** (v Eukl. skalárním součinu), pokud navíc

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 1.$$

Úhel mezi vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ zobecníme takto

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|}$$

Ortogonalita = kolmost

Příklad: Najděte $\mathbf{x} \perp (1,2)$.

Hledáme $\mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x_1, x_2) \cdot (1,2) = 1x_1 + 2x_2 = 0.$$

Řešením je $x_2 := t \in \mathbb{R}$, $x_1 = -2t$, tj. vektory na přímce se směrnicí $(-2,1)$

$$\mathbf{x} \in \langle (-2,1) \rangle.$$

Příklad: Najděte $\mathbf{x} \perp (1,2,3)$.

Hledáme $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (1,2,3) = 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.$$

Řešením je $x_3 := t \in \mathbb{R}$, $x_2 := s \in \mathbb{R}$, $x_1 = -2s - 3t$, tj. vektory v rovině

$$\mathbf{x} \in \{(-2s-3t, s, t) : \ s,t \in \mathbb{R}\} = \{s(-2,1,0) + t(-3,0,1) : \ s,t \in \mathbb{R}\} = \langle (-2,1,0), (-3,0,1) \rangle.$$

Ortogonalita = kolmost

Příklad: Najděte x: $\mathbf{x} \perp (1,2,3)$ a $\mathbf{x} \perp (1,1,1)$.

Hledáme $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$(x_1, x_2, x_3) \cdot (1,2,3) = 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ a $(x_1, x_2, x_3) \cdot (1,1,1) = 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 0$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \implies x_3 := t \in \mathbb{R},\ x_2 = -2t,\ x_1 = -5t.$$

Ortogonální systémy

Ortogonální/ortonormální systém

Vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tvoří **ortogonální systém (bázi** pro $n = m$**)**, pokud

$$(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0 \quad \text{pro } i \neq j.$$

Pokud navíc $\|\mathbf{v}_i\| = 1$, pak se jedná o **ortonormální systém (bázi)**.

Příklad: Kanonická báze $\mathbb{R}^2$ tvoří ortonormální systém.

Uvažujme kanonickou bázi prostoru $\mathbb{R}^2$

$$E := (\mathbf{e}_1 := (1,0), \mathbf{e}_2 := (0,1))\,.$$

Pak

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1), \quad \|\mathbf{e}_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \quad \|\mathbf{e}_2\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1.$$

Ortogonální systémy

Příklad: Kanonická báze $\mathbb{R}^n$ tvoří ortonormální systém.

Uvažujme kanonickou bázi prostoru $\mathbb{R}^n$

$$E := (\mathbf{e}_1 := (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 := (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n := (0, \ldots, 0, 1)) \,.$$

Pak pro libovolné $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ platí, že

$\|\mathbf{e}_i\| = \sqrt{0^2 + \cdots + 0^2 + 1^2 + 0^2 + \cdots + 0^2} = 1$, a pokud $i \neq j$, pak $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$.

Příklad: Najděte ortogonální systém prostoru $\langle(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$.

Vektory $\mathbf{u}_1 := (1, 1, 0)$, $\mathbf{u}_2 := (-1, 0, 1)$ tvoří bázi, ne však ortonormální, neboť

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (1, 1, 0) \cdot (-1, 0, 1) = -1.$$

Ortogonální bázi vytvoříme např. takto: $\mathbf{v}_1 := \mathbf{u}_1$ a $\mathbf{v}_2 := \mathbf{u}_2 - \alpha \mathbf{v}_1$ tak, že $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{v}_1$, tj.

$$0 = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{u}_2 - \alpha \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 - \alpha \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1,$$

$$\alpha = \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} = \frac{-1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0} = -\frac{1}{2}, \qquad \mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1) + \frac{1}{2}(1, 1, 0) = (-1/2, 1/2, 1).$$

Ortogonální systémy

„Ortogonalizujte" bázi $E := (\mathbf{e}_1 := (1,1,1), \mathbf{e}_2 := (1,-1,1), \mathbf{e}_3 := (-1,1,1))$.

Termín „ortogonalizujte" znamená nalézt ortogonální bázi $F := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ tak, že

$$1.\ \mathbf{f}_1 \in \langle \mathbf{e}_1 \rangle, \quad 2.\ \mathbf{f}_2 \in \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \quad 3.\ \mathbf{f}_3 \in \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle.$$

Ad 1. $\mathbf{f}_1 := \mathbf{e}_1 = (1,1,1)$.

Ad 2. $\mathbf{f}_2 := \mathbf{e}_2 - \alpha \mathbf{f}_1$: $\mathbf{f}_2 \perp \mathbf{f}_1$, tj.

$$0 = (\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1) = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{f}_1 - \alpha \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 \implies \alpha = \frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1} = \frac{(1,-1,1)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)} = \frac{1}{3},$$

a tedy $\mathbf{f}_2 = (1,-1,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Ad 3. $\mathbf{f}_3 := \mathbf{e}_3 - \beta \mathbf{f}_1 - \gamma \mathbf{f}_2$: $\mathbf{f}_3 \perp \mathbf{f}_1$ a $\mathbf{f}_3 \perp \mathbf{f}_2$, tj.

$$0 = (\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1) = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{f}_1 - \beta \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 \implies \beta = \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1} = \frac{(-1,1,1)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)} = \frac{1}{3},$$

$$0 = (\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_2) = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{f}_2 - \gamma \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2 \implies \gamma = \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{f}_2}{\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2} = \frac{(-1,1,1)\cdot\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)} = -\frac{1}{2},$$

a tedy $\mathbf{f}_3 = (-1,1,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = (-1,0,1)$.

Ortogonální systémy

Gram–Schmidtův ortogonalizační/ortonormalizační algoritmus

Mějme bázi $E := (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathbb{R}^n$. Ortogonalizujme/ortonormalizujme ji.

$$\mathbf{f}_1 := \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{q}_1 := \frac{1}{\|\mathbf{f}_1\|}\mathbf{f}_1,$$

$$\mathbf{f}_i := \mathbf{e}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}\mathbf{f}_j, \text{ kde } \alpha_{ij} = \frac{(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j)}{\|\mathbf{f}_j\|^2}, \ \mathbf{q}_i := \frac{1}{\|\mathbf{f}_i\|}\mathbf{f}_i, \text{ pro } i \in \{2, \ldots, n\}.$$

Výsledkem je ortog. báze $F := (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$, resp. ortonorm. báze $Q := (\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n)$.

Příklad: Ortonormalizujte $E := (\mathbf{e}_1 := (1,2), \mathbf{e}_2 := (1,1))$.

$$\mathbf{f}_1 := \mathbf{e}_1 = (1,2), \quad \mathbf{q}_1 = \frac{1}{\|(1,2)\|}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2),$$

$$\alpha_{21} = \frac{(\mathbf{e}_2, \mathbf{f}_1)}{\|\mathbf{f}_1\|^2} = \frac{(1,1)\cdot(1,2)}{5} = \frac{3}{5}, \quad \mathbf{f}_2 := \mathbf{e}_2 - \alpha_{21}\mathbf{f}_1 = (1,1) - \frac{3}{5}(1,2) = \frac{1}{5}(2,-1),$$

$$\mathbf{q}_2 := \frac{1}{\frac{1}{5}\|(2,-1)\|}(2,-1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1).$$

Ortogonální transformace

Ortogonální matice

Čtvercová **matice** $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, která splňuje

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad \text{a tedy } \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T,$$

se nazývá **ortogonální**. Její sloupce tvoří ortonormální systém.

Příklad: Ověřte, že matice $\mathbf{Q} := (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ z předchozího příkladu je ortogonální.

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

Ortogonální transformace

Soustavy s ortogonální maticí

Soustava s ortogonální matici $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a pravou stranu $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ je snadno řešitelná

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{b}.$$

Příklad: Vypočtěte souřadnice v $:= (1, 1)$ **v ortonormální bázi** $Q := (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$**, kde** $\mathbf{q}_1 := \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$**,** $\mathbf{q}_2 := \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$**.**

Hledáme $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\alpha_1 \mathbf{q}_1 + \alpha_2 \mathbf{q}_2 = \mathbf{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{v}, \text{ kde } \mathbf{Q} := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

je ortogonální matice. Řešením je

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{v}, \quad \text{t.j. } \alpha_1 = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{v} = \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad \alpha_2 = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Fourierova (JPEG) báze je ortonormální $\Rightarrow$ rychlý výpočet souřadnic (komprese).

Ortogonální transformace

Ortogonální transformace zachovává velikosti vektorů i úhly

Uvažujme lineární zobrazení s ortogonální maticí $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pro lib. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platí:

- normy (velikosti) vektorů jsou zachovány

$$\|\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T\cdot\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^T\cdot\mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|,$$

- hodnota skalárního součinu vektorů je zachována

$$(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x}, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\cdot\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Připomeňme, že úhel α mezi vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsme definovali pomocí $\cos\alpha = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$, tedy ortogonální transformace zachovává úhly mezi vektory.

Důsledek: „Ortogonální transformace = rotace + zrcadlení"

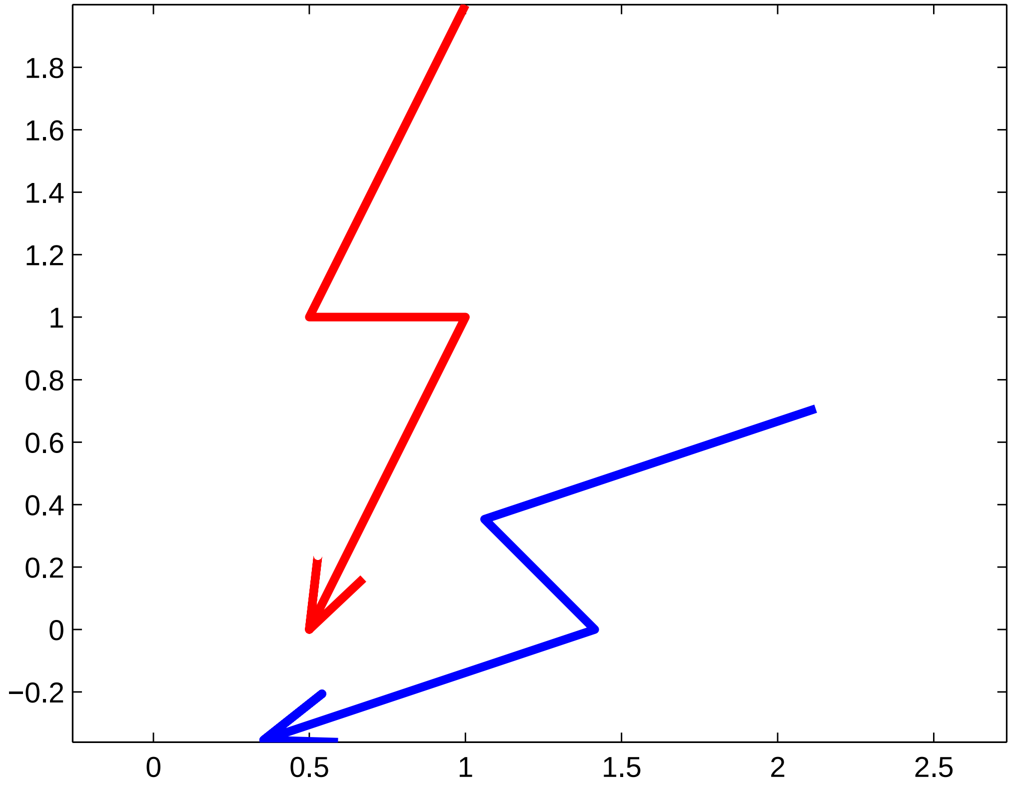
Každou ortogonální matici lze rozložit na konečný součin

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_n\cdots\mathbf{Q}_1,$$

kde jednotlivé faktory jsou buď matice rovinné rotace, nebo matice zrcadlení.

Ortogonální transformace

Příklad: Matice rovinné rotace je ortogonální.

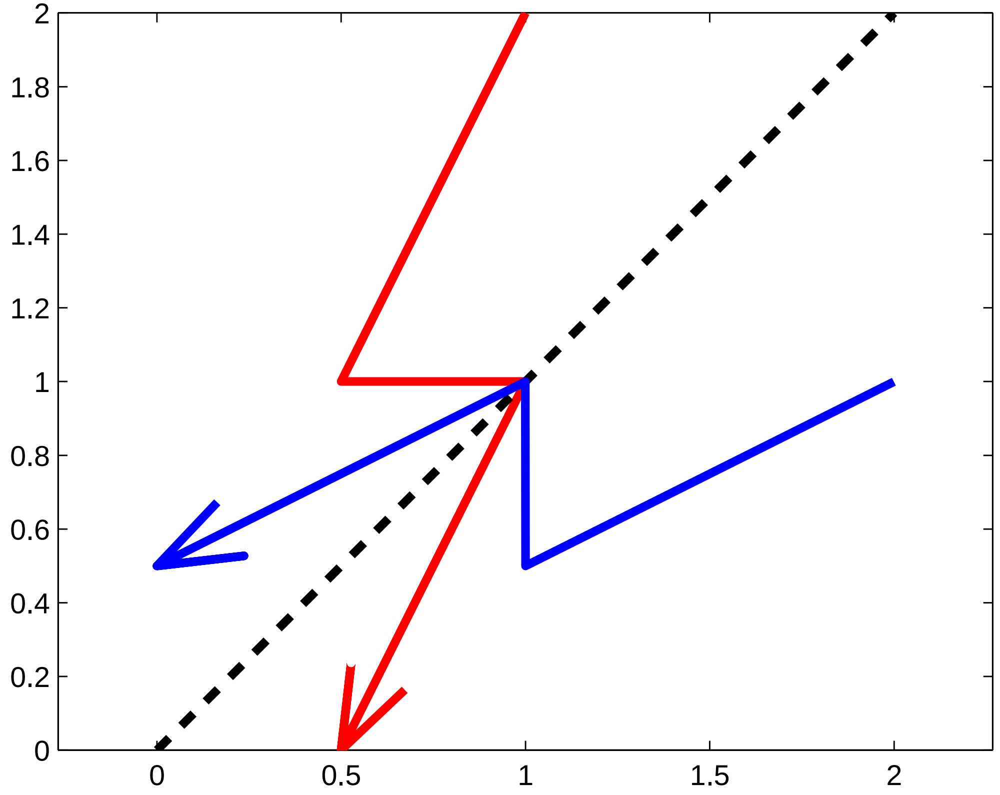


$$\mathbf{y} := \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

Ortogonální transformace

Příklad: Matice zrcadlení podle přímky (roviny) je ortogonální.



$$\mathbf{y} := \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} := \left(\mathbf{I} - 2 \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T}{\|\mathbf{n}\|^2} \right) \cdot \mathbf{x},$$

kde $\mathbf{n}$ je normála k přímce (rovině).

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \left(\mathbf{I} - 2 \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T}{\|\mathbf{n}\|^2} \right)^T \cdot \left(\mathbf{I} - 2 \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T}{\|\mathbf{n}\|^2} \right) = \mathbf{I} - 4 \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T}{\|\mathbf{n}\|^2} + 4 \frac{\mathbf{n} \cdot \overbrace{(\mathbf{n}^T \cdot \mathbf{n})}^{\|\mathbf{n}\|^2} \cdot \mathbf{n}^T}{\|\mathbf{n}\|^4} = \mathbf{I}.$$

Ortogonální transformace

„Exploze” zaokrouhlovací chyby v Gaussově eliminaci

Proveďme Gaussovu eliminaci (LU rozklad) na následující matici

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}) := \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Nyní zaveďme chybu 0.1 do prvku $\mathbf{A}_{11}$. Chyba se při eliminaci takto zvětšuje:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1.1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1.1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & -1.1 & 0 & 0 & 1 & 1.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 & -1.2 & 0 & 1 & 1.1 & 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.4 & -1.3 & 1 & 1.1 & 1.2 & 1.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 1 & 1.1 & 1.2 & 1.3 & 1.4 \end{array}\right).$$

Ortogonální transformace

Householderův eliminační krok

Pro vektor (část pivotovaného sloupce) $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ hledáme matici zrcadlení $\mathbf{Q_v}$ tak, že

$$\mathbf{Q_v} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{v}\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{např. } \mathbf{n_v} := \begin{pmatrix} v_1 - \|\mathbf{v}\| \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q_v} := \mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{n_v} \cdot \mathbf{n_v}^T}{\|\mathbf{n_v}\|^2}.$$

Stabilní Gauss–Householderova eliminace

Místo Gaussových eliminačních kroků, které (bez permutací) vedou na dolní trojúhelníkovou matici, provádíme Householderovy zrcadlení

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{v}:=(2,-1,0)^T]{\mathbf{Q_v}} \begin{pmatrix} 2.24 & -1.79 & 0.45 \\ 0 & -1.34 & 0.89 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{v}:=(-1.34,-1)^T]{\mathbf{Q_v}} \begin{pmatrix} 2.24 & -1.79 & 0.45 \\ 0 & 1.67 & -1.91 \\ 0 & 0 & 1.07 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme výpočetně náročnější, avšak stabilní variantu Gaussovy eliminace.

Ortogonální transformace

Zaokrouhlovací chyba v Gauss–Householderově eliminaci „neexploduje".

Proveďme Gauss–Householderovu eliminaci (QU rozklad) na následující matici

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1.41 & -2.12 & 0.71 & 0 & 0 \\ 0 & 1.22 & -2.04 & 0.82 & 0 \\ 0 & 0 & 1.15 & -2.02 & 0.87 \\ 0 & 0 & 0 & 1.12 & -2.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.45 \end{pmatrix}.$$

Nyní zaveďme chybu 0.1 do prvku $\mathbf{A}_{11}$. Chyba se při eliminaci nezvětšuje:

$$\begin{pmatrix} 1.1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1.49 & -2.09 & 0.67 & 0 & 0 \\ 0 & 1.29 & -2.02 & 0.78 & 0 \\ 0 & 0 & 1.21 & -2.01 & 0.83 \\ 0 & 0 & 0 & 1.17 & -2.00 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.56 \end{pmatrix}.$$