Lineární algebra — 7. přednáška: Bilineární formy, determinanty

Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

http://homel.vsb.cz/~luk76/LA1

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

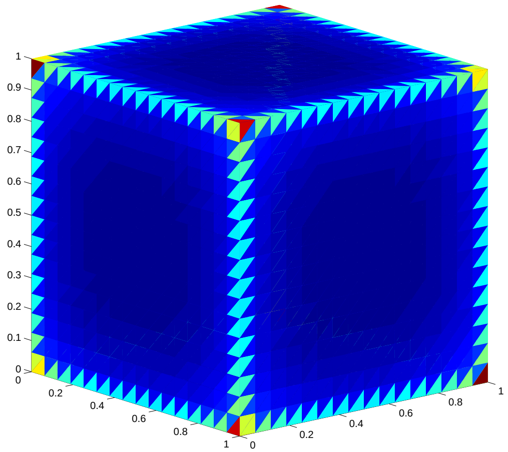
Motivace: Bilineární forma má blízko ke kvadratické

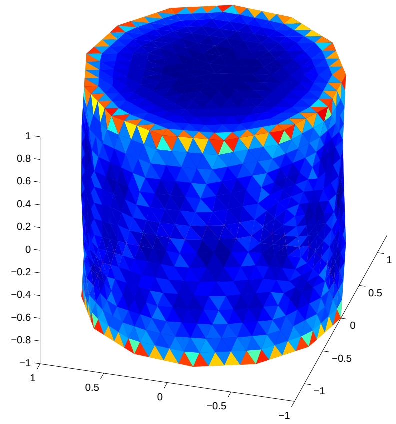
Kvadratické formy popisují potenciální energie systémů

Mějme elektrodu nabitou jednotkovým nábojem. Hledáme (po trojúhelnících konstantní) hustotu povrchového náboje $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, která minimalizuje potenciální energii

$$\min \left\{ E(\mathbf{q}) := \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{q} \right\} \quad \text{vzhledem k } \sum_{i=1}^{n} q_i = 1/\text{„Obsah } \triangle\text{"},$$

kde $(\mathbf{A})_{i,j} \approx \frac{1}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}$ vychází z Coulombovské síly mezi náboji umístěnými v $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$.





Determinanty jsou multi-lineární formy

Determinant prvního řádu je lineární zobrazení (forma) na $\mathbb{R}$

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad A(x) := \det(x) = x$$

Determinant druhého řádu je bilineární forma na $\mathbb{R}^2$

$$A_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad A_1(\mathbf{x}) := \det \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = x_1 a_2 - x_2 a_1 = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x},$$

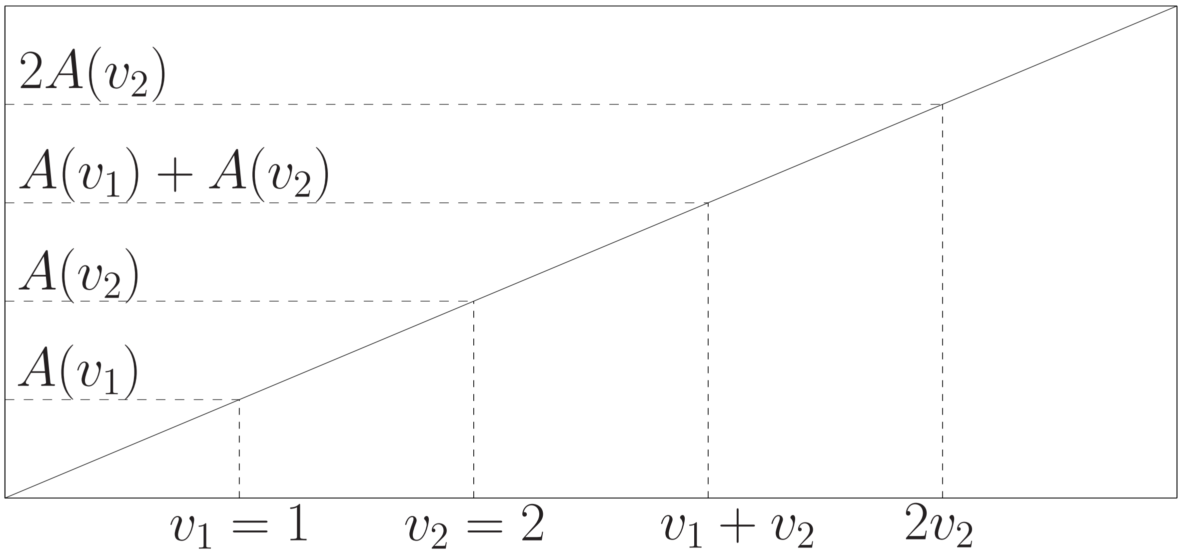
$$A_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad A_2(\mathbf{x}) := \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = a_1 x_2 - a_2 x_1 = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}.$$

Determinant třetího řádu je trilineární forma na $\mathbb{R}^3$

$$A_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad A_1(\mathbf{x}) := \det \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_3 a_1 \\ a_3 b_1 - b_3 a_1 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}, \ldots$$

Lineární zobrazení

Princip superpozice



Lineární zobrazení

Mějme vektorové prostory $\mathcal{V}, \mathcal{U}$. **Zobrazení** $A : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ je **lineární**, pokud

1. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}: \; A(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = A(\mathbf{v}_1) + A(\mathbf{v}_2)$,
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \; \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}: \; A(\alpha \mathbf{v}) = \alpha A(\mathbf{v})$.

Lineární zobrazení = matice

Každou matici lze chápat jako lineární zobrazení.

Mějme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, pak následující zobrazení $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární

$$A(\mathbf{x}) := \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}.$$

Matice lineárního zobrazení

Mějme lineární zobrazení $A : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, bázi $E := (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathcal{V}$ a bázi $F := (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m)$ prostoru $\mathcal{U}$. Vezměme $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ a jeho souřadnice $[\mathbf{v}]_E = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ v bázi E, tj.

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n.$$

Vyjádřeme obraz $A(\mathbf{v}) \in \mathcal{U}$ v bázi F

$$\begin{aligned}[A(\mathbf{v})]_F &= [A(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n)]_F = [\alpha_1 A(\mathbf{e}_1) + \cdots + \alpha_n A(\mathbf{e}_n)]_F \\ &= \underbrace{([A(\mathbf{e}_1)]_F, \ldots, [A(\mathbf{e}_n)]_F)}_{=:\mathbf{A}_{E,F}} \cdot [\mathbf{v}]_E,\end{aligned}$$

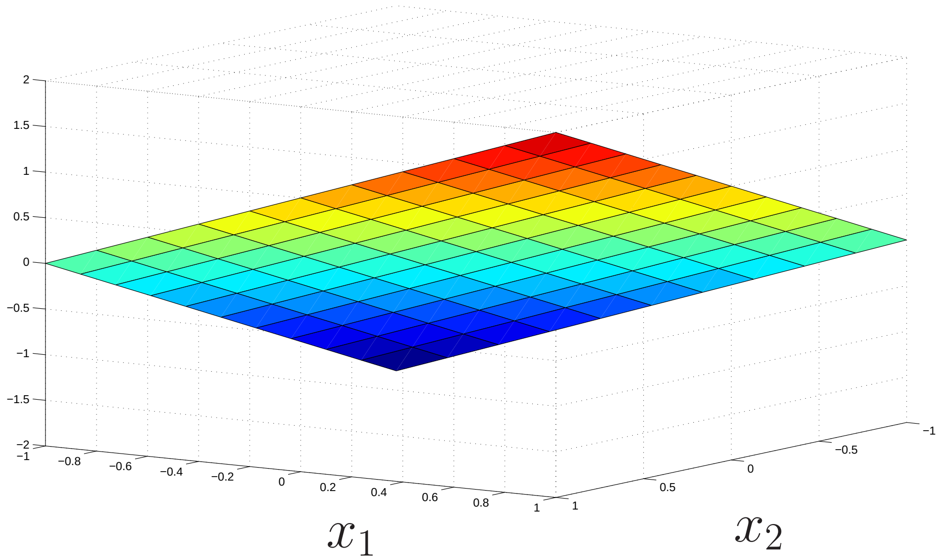
kde $\mathbf{A}_{E,F} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je **matice lineárního zobrazení vzhledem k bázím** E a F.

Lineární formy

Definice

Mějme vektorové prostory $\mathcal{V}$ a $\mathcal{U}$. Lineární zobrazení $A : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ je **lineární forma**, pokud $\mathcal{U} = \mathbb{R}$.

Příklad: $A(\mathbf{x}) := \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = a_1 x_1 + a_2 x_2$ **je lineární forma na** $\mathbb{R}^2$.



Každý aritmetický vektor lze chápat jako lineární formu.

Lineární formy = aritmetické vektory

Každý aritmetický vektor lze chápat jako lineární formu.

Mějme vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, pak následující zobrazení $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lineární

$$A(\mathbf{x}) := \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Vektor lineární formy

Mějme lineární formu $A : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ a bázi $E := (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathcal{V}$. Vezměme $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ a jeho souřadnice $[\mathbf{v}]_E = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ v bázi E, tj.

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n.$$

Vyjádřeme obraz $A(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} A(\mathbf{v}) &= A(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n) = \alpha_1 A(\mathbf{e}_1) + \cdots + \alpha_n A(\mathbf{e}_n) \\ &= \underbrace{(A(\mathbf{e}_1), \ldots, A(\mathbf{e}_n))}_{=:\mathbf{a}_E} \cdot [\mathbf{v}]_E, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{a}_E \in \mathbb{R}^n$ je **vektor lineární formy vzhledem k bázi** E.

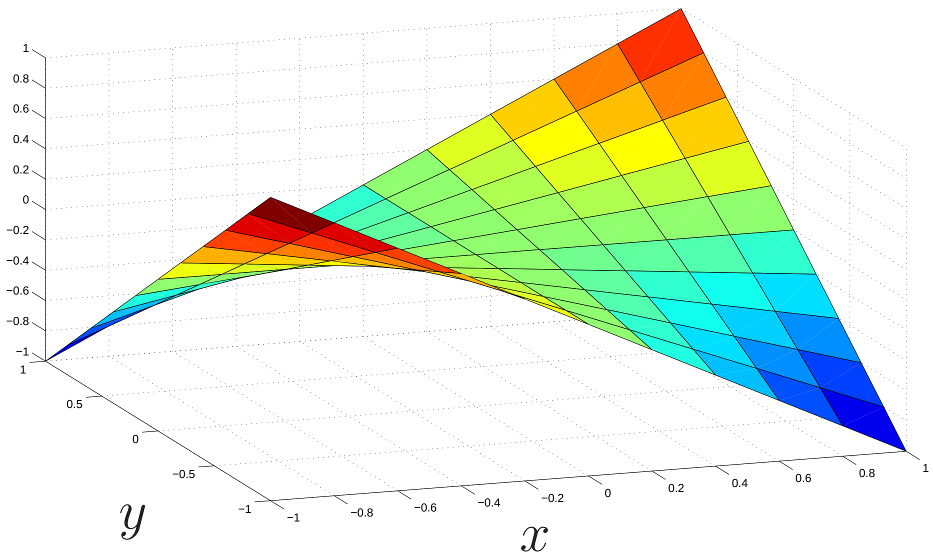
Bilineární formy

Definice

Mějme vektorový prostor $\mathcal{V}$. Zobrazení $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ je **bilineární forma**, pokud pro libovolné $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$

1. $B_1(\mathbf{v}) := B(\mathbf{v}, \mathbf{a})$ je lineární forma na $\mathcal{V}$ a
2. $B_2(\mathbf{v}) := B(\mathbf{a}, \mathbf{v})$ je lineární forma na $\mathcal{V}$.

Příklad: $B(x, y) := xy$ **je bilineární forma na** $\mathbb{R}$**.**



Bilineární formy

Příklad: Skalární součin $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := u_1 v_1 + u_2 v_2$ je bilineární forma na $\mathbb{R}^2$.

Vezměme libovolné $\mathbf{a} := (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

Ad 1. $B_1(\mathbf{u}) := B(\mathbf{u}, \mathbf{a}) = u_1 a_1 + u_2 a_2 = (a_1, a_2) \cdot \mathbf{u}$ je lineární forma na $\mathbb{R}^2$ a

Ad 2. $B_2(\mathbf{v}) := B(\mathbf{a}, \mathbf{v}) = a_1 v_1 + a_2 v_2 = (a_1, a_2) \cdot \mathbf{v}$ je také lineární forma na $\mathbb{R}^2$.

Příklad: $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}$, kde $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, je bilineární forma na $\mathbb{R}^n$.

Vezměme libovolné $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

Ad 1. $B_1(\mathbf{u}) := B(\mathbf{u}, \mathbf{a}) = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = \left(\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}\right)^T = \left(\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{B}^T\right) \cdot \mathbf{u} =: \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}$, kde $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, je lineární forma na $\mathbb{R}^n$ a

Ad 2. $B_2(\mathbf{v}) := B(\mathbf{a}, \mathbf{v}) = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = \left(\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{B}\right) \cdot \mathbf{v} =: \mathbf{c} \cdot \mathbf{v}$, kde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, je lineární forma na $\mathbb{R}^n$.

Každou čtvercovou matici lze chápat jako bilineární formu.

Bilineární formy = čtvercové matice

Každou čtvercovou matici lze chápat jako bilineární formu.

Mějme matici $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pak následující zobrazení $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je bilin. forma

$$B(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{B})_{ij}\, v_j.$$

Matice bilineární formy

Mějme bilineární formu $B : \mathcal{V}\times\mathcal{V} \to \mathbb{R}$ a bázi $E := (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathcal{V}$. Vezměme $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ a jejich souřadnice $[\mathbf{u}]_E = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $[\mathbf{v}]_E = (\beta_1,\ldots,\beta_n) \in \mathbb{R}^n$, tj.

$$\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{v} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{e}_n.$$

$$B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = B(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n, \mathbf{v}) \overset{1.}{=} \alpha_1 B(\mathbf{e}_1,\mathbf{v}) + \cdots + \alpha_n B(\mathbf{e}_n,\mathbf{v})$$

$$\overset{2.}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j B(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = [\mathbf{u}]_E^T \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} B(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) & \ldots & B(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_1) & \ldots & B(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_n) \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{B}_E} \cdot [\mathbf{v}]_E,$$

kde $\mathbf{B}_E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je **matice bilineární formy vzhledem k bázi** E.

Bilineární formy = čtvercové matice

Příklad: Vypočtěte matici $B(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ na $\mathbb{R}^n$ v kanonické bázi.

$$B(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{B}_E = \mathbf{I}$$

Příklad: Vypočtěte matici $B(\mathbf{u},\mathbf{v}) := 2u_1v_1 - u_1v_2 + u_2v_2$ na $\mathbb{R}^2$ v kan. bázi.

$$\begin{aligned} B(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) &= B((1,0),(1,0)) = 2\cdot1\cdot1 - 1\cdot0 + 0\cdot0 = 2, \\ B(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) &= B((1,0),(0,1)) = 2\cdot1\cdot0 - 1\cdot1 + 0\cdot1 = -1, \\ B(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1) &= B((0,1),(1,0)) = 2\cdot0\cdot1 - 0\cdot0 + 1\cdot0 = 0, \\ B(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2) &= B((0,1),(0,1)) = 2\cdot0\cdot0 - 0\cdot1 + 1\cdot1 = 1. \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{B}_E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

To není překvapení:

$$B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 2u_1v_1 - 1u_1v_2 + 0u_2v_1 + 1u_2v_1 = (u_1,u_2)\cdot\begin{pmatrix} 2v_1 - 1v_2 \\ 0v_1 + 1v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{u}^T\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{v}.$$

Bilineární formy = čtvercové matice

Příklad: Vypočtěte matici $B(\mathbf{u},\mathbf{v}) := u_1v_1 - 2u_1v_2 + 3u_2v_2 + u_2v_3 - u_3v_1 + 3u_3v_2$ **na** $\mathbb{R}^3$ **v kan. bázi.**

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= 1u_1v_1 - 2u_1v_2 + 0u_1v_3 + 0u_2v_1 + 3u_2v_2 + u_2v_3 - 1u_3v_1 + 3u_3v_2 + 0u_3v_3 = \\ &= u_1(1v_1 - 2v_2 + 0v_3) + u_2(0v_1 + 3v_2 + 1v_3) + u_3(-1v_1 + 3v_2 + 0v_3) = \\ &= (u_1, u_2, u_3) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{B}_E} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Příklad: Vypočtěte matici $B(p,q) := p(0)\,q(1)$ **na** $\mathcal{P}_1$ **v bázi** $E := (1, x)$**.**

$$\left.\begin{aligned} B(e_1(x), e_1(x)) &= B(1,1) = 1|_{x=0} \cdot 1|_{x=1} = 1 \cdot 1 = 1, \\ B(e_1(x), e_2(x)) &= B(1,x) = 1|_{x=0} \cdot x|_{x=1} = 1 \cdot 1 = 1, \\ B(e_2(x), e_1(x)) &= B(x,1) = x|_{x=0} \cdot 1|_{x=1} = 0 \cdot 1 = 0, \\ B(e_2(x), e_2(x)) &= B(x,x) = x|_{x=0} \cdot x|_{x=1} = 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}\right. \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B}_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B(1+x, 1-x) = [1+x]_E^T \cdot \mathbf{B}_E \cdot [1-x]_E = (1,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 = (1+x)|_{x=0} \cdot (1-x)_{x=1}.$$

Bilineární formy = čtvercové matice

Příklad: Vypočtěte matici $B(p,q) := \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx$ **na** $\mathcal{P}_1$ **v kan. bázi.**

$$
\begin{aligned}
B(e_1(x), e_1(x)) &= B(0x+1, 0x+1) = \textstyle\int_0^1 1\cdot 1\,dx = [x]_{x:=0}^{x:=1} = 1-0 = 1,\\
B(e_1(x), e_2(x)) &= B(0x+1, 1x+0) = \textstyle\int_0^1 1\cdot x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x:=0}^{x:=1} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2},\\
B(e_2(x), e_1(x)) &= B(1x+0, 0x+1) = \textstyle\int_0^1 x\cdot 1\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x:=0}^{x:=1} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2},\\
B(e_2(x), e_2(x)) &= B(1x+0, 1x+0) = \textstyle\int_0^1 x\cdot x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x:=0}^{x:=1} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3},
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{B}_E := \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.
$$

„Zkouška":

$$
B(1+x, 1-x) = [1+x]_E^T \cdot \mathbf{B}_E \cdot [1-x]_E = (1,1)\cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3},
$$

$$
B(1+x, 1-x) = \int_0^1 (1-x)(1+x)\,dx = \int_0^1 (1-x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{x:=0}^{x:=1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{2}{3}.
$$

Bilineární formy = čtvercové matice

Klasifikace

$B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ je **symetrická bilineární forma**, pokud

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \ B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

Symetrická bilineární forma má v každé bázi **symetrickou matici**, tj.

$$\mathbf{B}_E = \mathbf{B}_E^T.$$

$B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ je **antisymetrická bilineární forma**, pokud

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \ B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -B(\mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

Antisymetrická bilineární forma má v každé bázi **antisymetrickou matici**, tj.

$$\mathbf{B}_E = -\mathbf{B}_E^T.$$

Bilineární formy = čtvercové matice

Rozklad

Každá bilin. forma $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ lze rozložit na symetrickou část $B^{\mathrm{S}} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ a antisymetrickou část $B^{\mathrm{A}} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{u})\right)}_{=:B^{\mathrm{S}}(\mathbf{u},\mathbf{v})} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - B(\mathbf{v}, \mathbf{u})\right)}_{=:B^{\mathrm{A}}(\mathbf{u},\mathbf{v})}.$$

Analogicky lze každou čtvercovou matici (bilin. formy v bázi E) $\mathbf{B}_E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rozložit na symetrickou $\mathbf{B}_E^{\mathrm{S}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a antisymetrickou část $\mathbf{B}_E^{\mathrm{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\mathbf{B}_E = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{B}_E + \mathbf{B}_E^T\right)}_{=:\mathbf{B}_E^{\mathrm{S}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{B}_E - \mathbf{B}_E^T\right)}_{=:\mathbf{B}_E^{\mathrm{A}}}.$$

Bilineární formy = čtvercové matice

Příklad: Zapište matici $B(\mathbf{u},\mathbf{v}) := 3u_1v_1 - u_2v_3 + u_3v_1 + u_3v_2$ na $\mathbb{R}^3$ v kan. bázi a rozložte ji na symetrickou a antisymetrickou část.

$$B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 3u_1v_1 + 0u_1v_2 + 0u_1v_3 + 0u_2v_1 + 0u_2v_2 - 1u_2v_3 + 1u_3v_1 + 1u_3v_2 + 0u_3v_3 =$$

$$= (u_1, u_2, u_3) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{B}_E} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_E^{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{0+1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1+1}{2} \\ \frac{1+0}{2} & \frac{1-1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_E^{\mathrm{A}} = \mathbf{B}_E - \mathbf{B}_E^{\mathrm{S}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bilineární formy = čtvercové matice

Kongruentní matice

Mějme vektorový prostor $\mathcal{V}$ a jeho báze $E := (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ a $F := (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$. Uvažujme identické zobrazení $I : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ a jeho matici vzhledem k bázím E a F označme $\mathbf{T} := \mathbf{I}_{E,F}$. Ta realizuje přechod mezi bázemi

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \; [\mathbf{v}]_F = \mathbf{T} \cdot [\mathbf{v}]_E.$$

Mějme dále bilineární formu $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$. Pak její **matice** $\mathbf{B}_E$ a $\mathbf{B}_F$ se nazývají **kongruentní** a splňují

$$\mathbf{B}_E = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{B}_F \cdot \mathbf{T},$$

neboť

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= [\mathbf{u}]_F^T \cdot \mathbf{B}_F \cdot [\mathbf{v}]_F = (\mathbf{T} \cdot [\mathbf{u}]_E)^T \cdot \mathbf{B}_F \cdot (\mathbf{T} \cdot [\mathbf{v}]_E) = \\ &= [\mathbf{u}]_E^T \cdot \underbrace{(\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{B}_F \cdot \mathbf{T})}_{=\mathbf{B}_E} \cdot [\mathbf{v}]_E. \end{aligned}$$

Determinanty jsou antisymetrické multi-lineární formy

Determinant prvního řádu je lineární zobrazení (forma) na $\mathbb{R}$

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad A(x) := \det(x) = x$$

Determinant druhého řádu je antisymetrická bilineární forma na $\mathbb{R}^2$

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1 = (u_1, u_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

je zjevně bilineární forma, která je i antisymetrická, viz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T .$$

Determinant je antisymetrická multi-lineární forma

Výpočtářská definice determinantu ($\rightsquigarrow$ Gauss–Jordanova metoda)

Mějme čtvercovou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pak číslo $|\mathbf{A}| := \det \mathbf{A} \in \mathbb{R}$ je jednoznačně určeno následujícími vlastnostmi:

0. $\det \mathbf{I} = 1$,
1. *(linearita)*

$$\det(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)^T = \alpha \det(\mathbf{u}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)^T + \beta \det(\mathbf{v}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)^T,$$

2. *(antisymetrie)*

$$\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n)^T = -\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n)^T.$$

Příklad: Vypočtěte $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{r}_2:=-3\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{1.}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \boxed{-2} \end{vmatrix} \overset{\mathbf{r}_1:=\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -2|\mathbf{I}| \overset{0.}{=} -2 \cdot 1 = -2.$$

Determinant je antisymetrická multi-lineární forma

Ještě výpočtářštější definice ($\rightsquigarrow$ Gaussova eliminace)

Mějme čtvercovou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\alpha \neq 0$, pak

1. $|\mathbf{A}| = a_{11} \ldots a_{nn}$, pokud $\mathbf{A}$ je horní nebo dolní trojúhelníková,
2. $\mathbf{A} \xrightarrow{\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j} \mathbf{B} : \; |\mathbf{A}| = -|\mathbf{B}|$,
3. $\mathbf{A} \xrightarrow{\mathbf{r}_i := \sum_{i=1}^{n} \alpha_j \mathbf{r}_j} \mathbf{B} : \; |\mathbf{A}| = \frac{1}{\alpha_i} |\mathbf{B}|$ pro $\alpha_i \neq 0$.

Příklad: Vypočtěte $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\mathbf{r}_3 := -2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3}{\overset{\mathbf{r}_2 := -\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{3} & -2 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} \underset{\mathbf{r}_3 := -\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \overset{1.}{=} 1 \cdot 3 \cdot (-3) = -9$$

Determinant je antisymetrická multi-lineární forma

Příklady: Vypočtěte následující determinanty.

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \underset{\mathbf{r}_3:=-7\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3}{\overset{\mathbf{r}_2:=-4\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \underset{\mathbf{r}_3:=-2\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{1.}{=} 1 \cdot (-3) \cdot 0 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{-1} & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{\mathbf{r}_3:=3\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_4 \\ \mathbf{r}_4:=\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3}}{\overset{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{=}} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\mathbf{r}_3:=-2\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_4:=-3\mathbf{r}_2+2\mathbf{r}_4}}{=} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -3 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \end{vmatrix} \underset{\mathbf{r}_4:=-3\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 18 = 54.$$

Determinant je antisymetrická multi-lineární forma

Tradiční definice determinantu

Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $(a) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ libovolné. Definujme $|\mathbf{A}| := \det \mathbf{A}$ takto

$$|(a)| := a, \quad |\mathbf{A}| := \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}|,$$

kde $\mathbf{A}_{ij}$ je čtvercová matice, která vznikne z $\mathbf{A}$ vyškrtnutím i–tého řádku a j–tého sloupce.

Příklad: Spočtěte použitím tradiční definice.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{2+4} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \ldots$$

Determinant je antisymetrická multi-lineární forma

Sarrusovo pravidlo pro matici řádu 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}|(a_{22})| - a_{12}|(a_{21})| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Sarrusovo pravidlo pro matici řádu 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Cramerovo pravidlo pro $n > 3$ nebudeme používat!

Inverzní matice pomocí determinantů

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, pak

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \underbrace{\begin{pmatrix} |\mathbf{A}_{11}| & -|\mathbf{A}_{21}| & \dots & (-1)^{n+1}|\mathbf{A}_{n1}| \\ -|\mathbf{A}_{12}| & |\mathbf{A}_{22}| & \dots & (-1)^{2+n}|\mathbf{A}_{n2}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n}|\mathbf{A}_{1n}| & (-1)^{2+n}|\mathbf{A}_{2n}| & \dots & |\mathbf{A}_{nn}| \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{C}},$$

neboť

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{j+k}|\mathbf{A}_{jk}| = \begin{cases} |\mathbf{A}|, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Důsledek: Cramerovo pravidlo

Mějme $\mathbf{A} := (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Pak

$$x_i = \frac{|\mathbf{A}_i|}{|\mathbf{A}|}, \text{ kde } \mathbf{A}_i := (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n).$$

$\mathbf{A}$ je singulární, právě když $|\mathbf{A}| = 0$.

Cramerovo pravidlo pro $n > 3$ nebudeme používat!

Řešte soustavu Cramerovým pravidlem.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\mathbf{r}_3:=-\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3}{\overset{\mathbf{r}_2:=-2\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{-5} & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} \underset{\mathbf{r}_3:=-3\mathbf{r}_2+5\mathbf{r}_3}{=} \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot (-5) \cdot 4 = -4,$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\mathbf{r}_3:=-\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3}{\overset{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} \underset{\mathbf{r}_3:=3\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1,$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\mathbf{r}_3:=-\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3}{\overset{\mathbf{r}_2:=-2\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 2 = -6,$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\mathbf{r}_3:=-\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3}{\overset{\mathbf{r}_2:=-2\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{-5} & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} \underset{\mathbf{r}_3:=-3\mathbf{r}_2+5\mathbf{r}_3}{=} \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot (-5) \cdot 9 = -9,$$

$$x_1 = |\mathbf{A}_1|/|\mathbf{A}| = 1/4, \quad x_2 = |\mathbf{A}_2|/|\mathbf{A}| = 3/2, \quad x_3 = |\mathbf{A}_3|/|\mathbf{A}| = 9/4,$$

Cramerovo pravidlo pro $n > 3$ nebudeme používat!

Řešte soustavu Gaussovou eliminací.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=-\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3]{\mathbf{r}_2:=-2\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-5} & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=-3\mathbf{r}_2+5\mathbf{r}_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \end{array}\right)$$

$$x_3 = 9/4, \quad x_2 = \frac{-3 - 2x_3}{-3} = 3/2, \quad x_1 = 1 - 2x_2 + x_3 = 1/4.$$

K čemu tedy jsou determinanty?

Obsah rovnoběžníku

Obsah 2d rovnoběžníku, jehož přilehlé strany jsou tvořeny vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, je

$$S = \left| \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \right| = |a_1 b_2 - a_2 b_1| \,.$$

Obsah 3d rovnoběžníku, jehož přilehlé strany jsou tvořeny vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, je

$$S = \left| \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ (1,1,1) \end{pmatrix} \right| = |a_1(b_2 - b_3) + a_2(b_3 - b_1) + a_3(b_1 - b_2)| \,.$$

Objem rovnoběžnostěnu

Objem 3d rovnoběžnostěnu, jehož přilehlé strany jsou tvořeny vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, je

$$V = \left| \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} \right| = |a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)| \,.$$