# Lineární algebra — 6. přednáška: Lineární zobrazení

**Dalibor Lukáš**

Katedra aplikované matematiky
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

http://homel.vsb.cz/~luk76/LA1

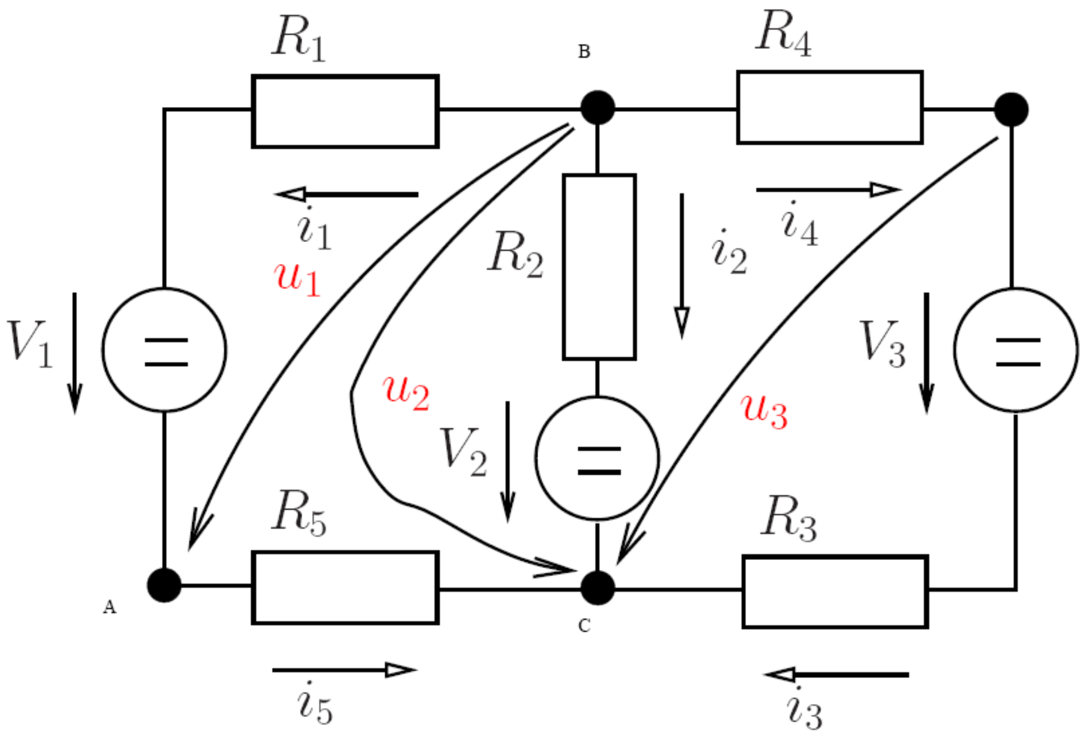
Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Princip superpozice

## Stejnosměrný obvod




## Ohmův a Kirchhoffovy zákony

$$i_1 = \frac{u_1 - V_1}{R_1},\ i_2 = \frac{u_2 - V_2}{R_2},\ i_3 = \frac{u_3 - V_3}{R_3},\ i_4 = \frac{u_2 - u_3}{R_4}, i_5 = \frac{u_2 - u_1}{R_5},$$

uzel A: $i_1 - i_5 = 0$, uzel B: $-i_1 - i_2 - i_4 = 0$, uzel C: $i_2 + i_3 + i_5 = 0$.

# Princip superpozice

## Stejnosměrný obvod — soustava lineárních rovnic

$R_1 = \cdots = R_5 = 1$

$$\begin{array}{rcl} \frac{u_1-V_1}{R_1} - \frac{u_2-u_1}{R_5} & = & 0 \\ -\frac{u_1-V_1}{R_1} - \frac{u_2-V_2}{R_2} - \frac{u_2-u_3}{R_4} & = & 0 \\ \frac{u_2-V_2}{R_2} + \frac{u_3-V_3}{R_3} + \frac{u_2-u_1}{R_5} & = & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcl} 2u_1 & - & u_2 & & & = & V_1 \\ -u_1 & - & 2u_2 & + & u_3 & = & -V_1 - V_2 \\ -u_1 & + & 2u_2 & + & u_3 & = & V_2 + V_3 \end{array}$$

**a)** $V_1 = 1$, $V_2 = V_3 = 0$; **b)** $V_2 = 1$, $V_1 = V_3 = 0$; **c)** $V_3 = 1$, $V_1 = V_2 = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_1+2\mathbf{r}_3]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_1+2\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-5} & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=3\mathbf{r}_2+5\mathbf{r}_3]{}$$

$$\xrightarrow[\mathbf{r}_3:=3\mathbf{r}_2+5\mathbf{r}_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 2 & 4 & 10 \end{array}\right) \to \mathbf{u}^{\mathrm{a}} = \begin{pmatrix} 5/8 \\ 1/4 \\ 1/8 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}^{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}^{\mathrm{c}} = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/4 \\ 5/8 \end{pmatrix}.$$

# Principip superpozice

## Stejnosměrný obvod — soustava lineárních rovnic

$R_1 = \cdots = R_5 = 1$

$$\begin{array}{rcl} \frac{u_1-V_1}{R_1} - \frac{u_2-u_1}{R_5} & = & 0 \\ -\frac{u_1-V_1}{R_1} - \frac{u_2-V_2}{R_2} - \frac{u_2-u_3}{R_4} & = & 0 \\ \frac{u_2-V_2}{R_2} + \frac{u_3-V_3}{R_3} + \frac{u_2-u_1}{R_5} & = & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcl} 2u_1 & - & u_2 & & & = & V_1 \\ -u_1 & - & 2u_2 & + & u_3 & = & -V_1 - V_2 \\ -u_1 & + & 2u_2 & + & u_3 & = & V_2 + V_3 \end{array}$$

**d)** $V_1 = 1$**,** $V_2 = 2$**,** $V_3 = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_1+2\mathbf{r}_3]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_1+2\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-5} & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=3\mathbf{r}_2+5\mathbf{r}_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 16 & 40 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathbf{u}^{\mathrm{d}} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 5/2 \end{pmatrix}.$$

# Princip superpozice

## Stejnosměrný obvod — soustava lineárních rovnic

$R_1 = \cdots = R_5 = 1$

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{u_1-V_1}{R_1} - \frac{u_2-u_1}{R_5} & = & 0 \\
-\frac{u_1-V_1}{R_1} - \frac{u_2-V_2}{R_2} - \frac{u_2-u_3}{R_4} & = & 0 \\
\frac{u_2-V_2}{R_2} + \frac{u_3-V_3}{R_3} + \frac{u_2-u_1}{R_5} & = & 0
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{rcrcrcl}
2u_1 & - & u_2 & & & = & V_1 \\
-u_1 & - & 2u_2 & + & u_3 & = & -V_1 - V_2 \\
-u_1 & + & 2u_2 & + & u_3 & = & V_2 + V_3
\end{array}
$$

**a)** $V_1 = 1$**,** $V_2 = V_3 = 0$**;** **b)** $V_2 = 1$**,** $V_1 = V_3 = 0$**;** **c)** $V_3 = 1$**,** $V_1 = V_2 = 0$**,**
**d)** $V_1 = 1$**,** $V_2 = 2$**,** $V_3 = 3$

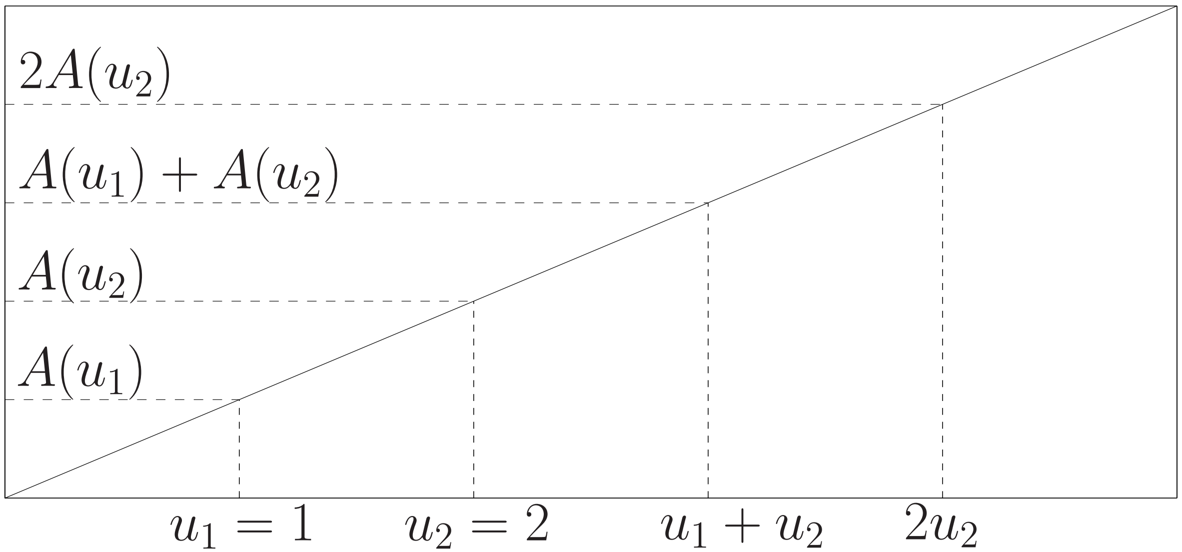
$$
\mathbf{u}^{\mathrm{a}} = \begin{pmatrix} 5/8 \\ 1/4 \\ 1/8 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}^{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}^{\mathrm{c}} = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/4 \\ 5/8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^{\mathrm{d}} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 5/2 \end{pmatrix}.
$$

## Princip superpozice

$$
1\mathbf{u}^{\mathrm{a}} + 2\mathbf{u}^{\mathrm{b}} + 3\mathbf{u}^{\mathrm{c}} = 1 \begin{pmatrix} 5/8 \\ 1/4 \\ 1/8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/4 \\ 5/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 5/2 \end{pmatrix} = \mathbf{u}^{\mathrm{d}}.
$$

# Princip superpozice = lineární zobrazení

## Princip superpozice




## Lineární zobrazení

Mějme vektorové prostory $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$. **Zobrazení** $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ je **lineární**, pokud

1. $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{U} : \; A(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = A(\mathbf{u}_1) + A(\mathbf{u}_2)$,
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \; \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U} : \; A(\alpha \mathbf{u}) = \alpha A(\mathbf{u})$.

# Lineární zobrazení

**Příklad:** $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A(\mathbf{x}) := x_1 - x_2$ **je lineární zobrazení.**

Ad 1. Vezměme libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, pak

$$A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A(x_1+y_1, x_2+y_2) = (x_1+y_1)-(x_2+y_2) = (x_1 - x_2)+(y_1 - y_2) = A(\mathbf{x})+A(\mathbf{y}).$$

Ad 2. Vezměme libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, pak

$$A(\alpha\mathbf{x}) = A(\alpha x_1, \alpha x_2) = \alpha x_1 - \alpha x_2 = \alpha(x_1 - x_2) = \alpha A(\mathbf{x}).$$

**Příklad:** $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A(x) := x + 1$ **není lineární zobrazení.**

Ad 1. Vezměme libovolné $x, y \in \mathbb{R}$, pak

$$A(x + y) = (x + y) + 1 = (x + 1) + y = A(x) + y \neq A(x) + A(y).$$

**Příklad:** $A : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_0$, $A(a + bx) := \frac{d(a+bx)}{dx} = b$ **je lineární zobrazení.**

Ad 1. $A(p+q) = A((a+c)+(b+d)x) = b+d = A(a + bx)+A(c + dx) = A(p)+A(q)$.
Ad 2. $A(\alpha p) = A(\alpha a + \alpha bx) = \alpha b = \alpha A(a + bx) = \alpha A(p)$.

# Lineární zobrazení

**Příklad: $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A(\mathbf{x}) := \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, je lineární zobrazení.**

Ad 1. Vezměme libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, pak

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}).$$

Ad 2. Vezměme libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pak

$$A(\alpha\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot (\alpha\mathbf{x}) = \alpha\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = \alpha A(\mathbf{x}).$$

Každou matici lze chápat jako lineární zobrazení.

## Každou soustavu rovnic lze chápat jako lineární úlohu

Pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ lze soustavu

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

chápat jako úlohu: Hledáme $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$

$$\text{Hledáme } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \quad A(\mathbf{x}) = \mathbf{b},$$

kde $A(\mathbf{x}) := \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ je lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

# Lineární zobrazení

## Princip superpozice

Mějme lineární zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, vektory $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathcal{V}$ a řešení $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{U}$ lineárních úloh

$$A(\mathbf{x}_1) = \mathbf{b}_1, \quad A(\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_2.$$

Vezměme lineární kombinaci pravých stran s $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, pak

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 \quad \text{je řešením úlohy} \quad A(\mathbf{x}) = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2.$$

## Příklad: Stejnosměrný obvod

$R_1 = \cdots = R_5 = 1$

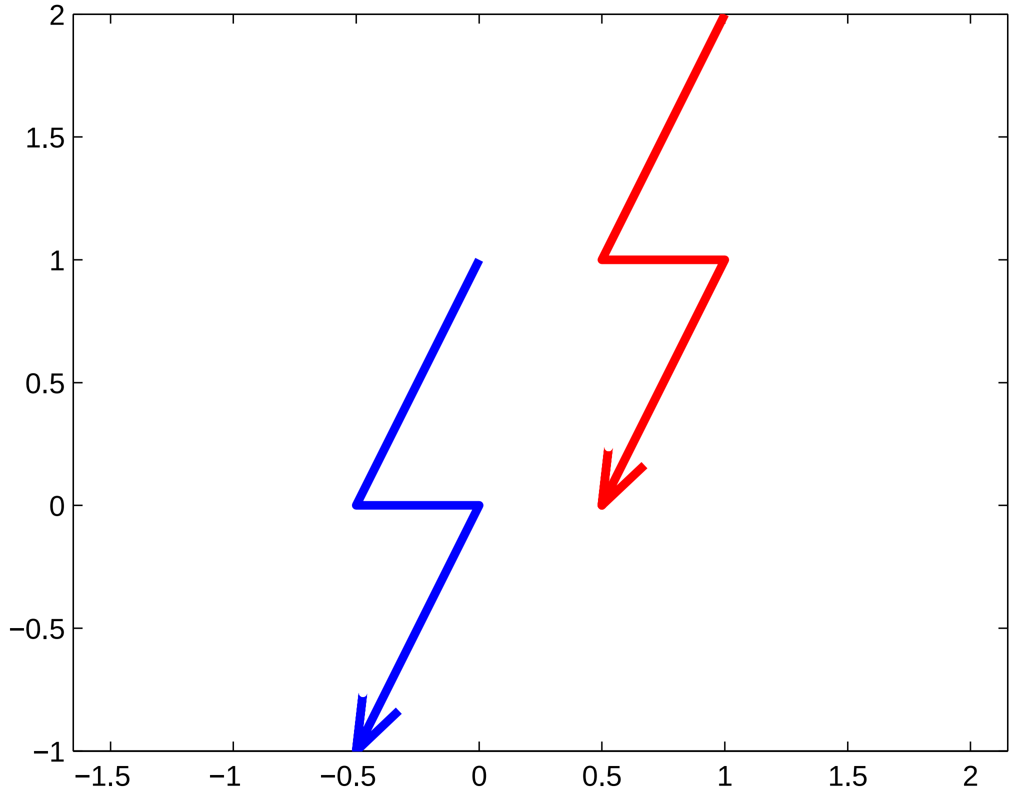
$$\begin{array}{rl} \frac{u_1 - V_1}{R_1} - \frac{u_2 - u_1}{R_5} & = 0 \\ -\frac{u_1 - V_1}{R_1} - \frac{u_2 - V_2}{R_2} - \frac{u_2 - u_3}{R_4} & = 0 \\ \frac{u_2 - V_2}{R_2} + \frac{u_3 - V_3}{R_3} + \frac{u_2 - u_1}{R_5} & = 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcl} 2u_1 & - & u_2 & & & = & V_1 \\ -u_1 & - & 2u_2 & + & u_3 & = & -V_1 - V_2 \\ -u_1 & + & 2u_2 & + & u_3 & = & V_2 + V_3 \end{array}$$

$$A(\mathbf{u}) := \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}, \quad \text{kde } \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} := V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + V_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + V_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

# Lineární zobrazení

## Nenulové posunutí není lineární zobrazení

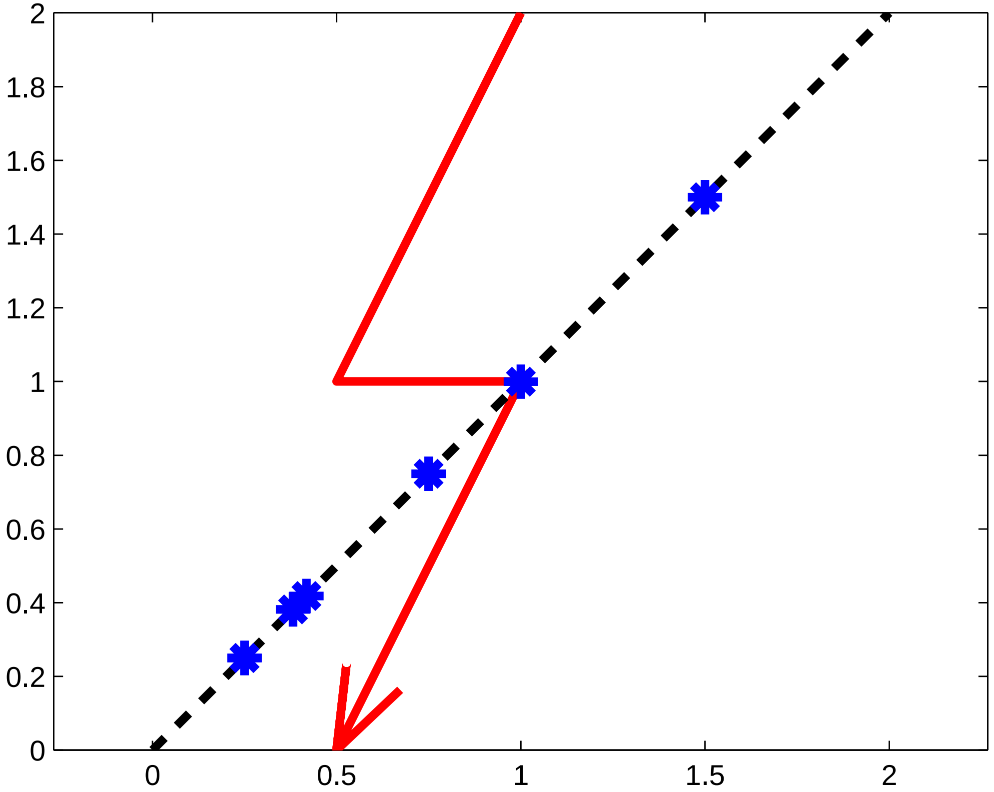
$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{y} := A(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{p},\ \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$$



# Lineární zobrazení

## Projekce na přímku procházející počátkem je lineární zobrazení

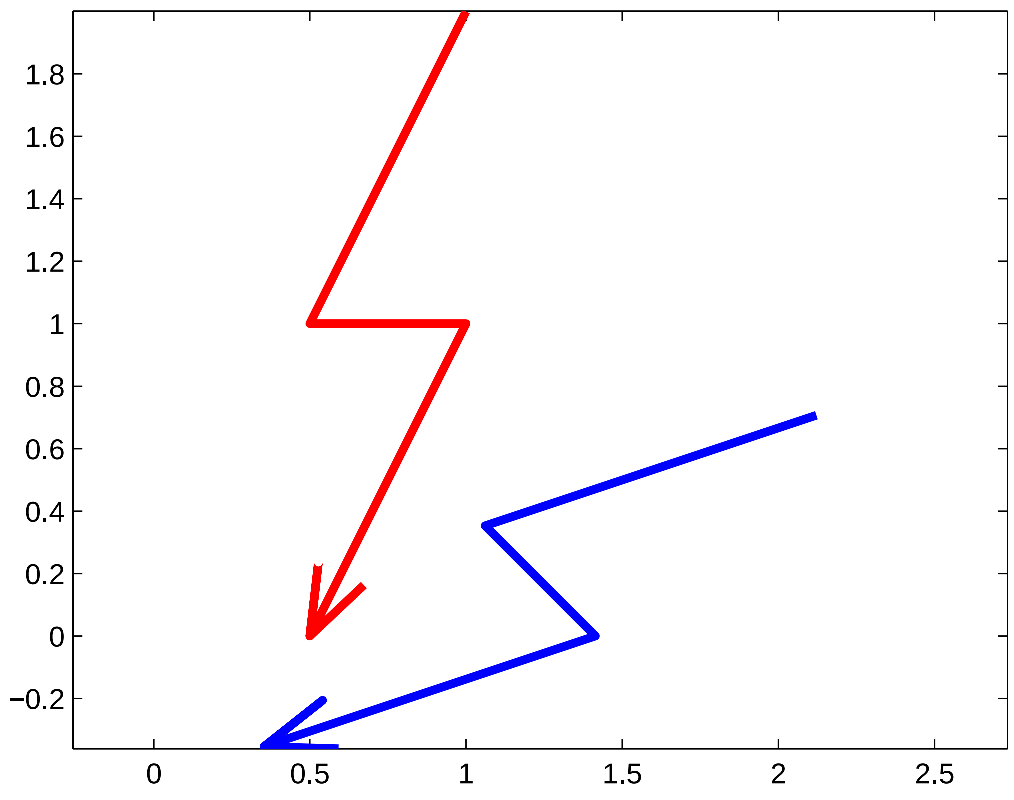
$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{y} := A(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \left( \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \cdot \mathbf{x} \right), \quad \mathbf{a} \text{ je směrnice přímky}$$



# Lineární zobrazení

## Rotace podle počátku je lineární zobrazení

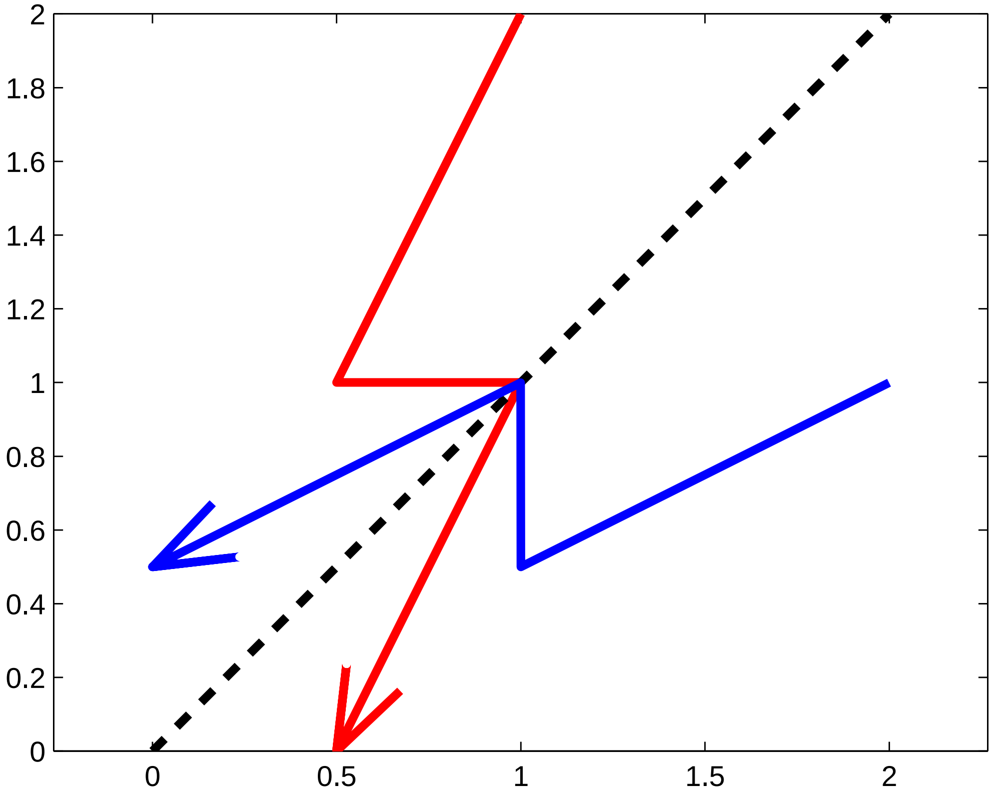
$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{y} := A(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}$$



# Lineární zobrazení

## Zrcadlení podle přímky procházející počátkem je lineární zobrazení

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{y} := A(\mathbf{x}) := \left(\mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}^T}{\|\mathbf{n}\|^2}\right)\cdot\mathbf{x}, \quad \mathbf{n} \text{ je normála k přímce}$$



# Lineární zobrazení

## Vlastnosti

Je-li $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ lineární zobrazení, pak platí

$$A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad A(-\mathbf{u}) = -A(\mathbf{u}).$$

Důkaz: $A(\mathbf{0}) = A(0\mathbf{u}) \overset{2.}{=} 0A(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad A(-\mathbf{u}) \overset{2.}{=} (-1)A(\mathbf{u}) = -A(\mathbf{u}).$

## Ekvivalentní definice lineárního zobrazení

Mějme vektorové prostory $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$. Zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ je lineární, právě když obraz lineární kombinace je lineární kombinace obrazů, tj.

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\ \forall \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathcal{U} : \quad \boxed{A(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n) = \alpha_1 A(\mathbf{u}_1) + \cdots + \alpha_n A(\mathbf{u}_n)}.$$

Důkaz: $A(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n) \overset{1.,2.}{=} \alpha_1 A(\mathbf{u}_1) + A(\alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n) \overset{1.,2.}{=} \ldots .$

# Lineární zobrazení

## Lineární zobrazení je určeno obrazy bázových vektorů

Mějme vektorové prostory $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, nechť $E := (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ je báze $\mathcal{U}$ a nechť lineární zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ je zadáno obrazy bázových vektorů, tj. známe $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n \in \mathcal{V}$:

$$\mathbf{f}_1 = A(\mathbf{e}_1), \quad \ldots, \quad \mathbf{f}_n = A(\mathbf{e}_n).$$

Vezměme libovolný $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, pak

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n,$$

kde $[\mathbf{u}]_E = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ jsou souřadnice $\mathbf{u}$ v bázi $E$. Obraz této lineární kombinace je lineární kombinace známých obrazů

$$A(\mathbf{u}) = A(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n) = \alpha_1 A(\mathbf{e}_1) + \cdots + \alpha_n A(\mathbf{e}_n) = \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{f}_n.$$

# Lineární zobrazení

**Příklad: Je dáno $A(1,1) = 1$, $A(1,-1) = 0$. Spočtěte $A(2,3)$.**

Vektor $\mathbf{u} := (2,3)$ vyjádříme v bázi $E := (\mathbf{e}_1 := (1,1), \mathbf{e}_2 := (1,-1))$, tj. hledáme $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1) = (2,3)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \alpha_2 = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{5}{2}.$$

Obraz $A(\mathbf{u})$ je lineární kombinace obrazů bázových vektorů

$$A(\mathbf{u}) = \alpha_1 A(\mathbf{e}_1) + \alpha_2 A(\mathbf{e}_2) = \frac{5}{2}(1) - \frac{1}{2}(0) = \frac{5}{2}$$

# Lineární zobrazení

**Příklad: Je dáno $A(1-x+x^2)=(1,1)$, $A(1+x-x^2)=(1,0)$, $A(-1+x+x^2)=(0,1)$. Spočtěte $A(1)$.**

Funkci $p(x) := 1$ vyjádříme v bázi $E := \big(1-x+x^2, 1+x-x^2, -1+x+x^2\big)$, tj. hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ \alpha_1(1-x+x^2)+\alpha_2(1+x-x^2)+\alpha_3(-1+x+x^2) = 1+0x+0x^2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obraz $A(1)$ je lineární kombinace obrazů bázových funkcí

$$\begin{aligned} A(1) &= \alpha_1 A(1-x+x^2)+\alpha_2 A(1+x-x^2)+\alpha_3 A(-1+x+x^2) = \\ &= \frac{1}{2}(1,1)+\frac{1}{2}(1,0)+0(0,1) = \\ &= (1, 1/2). \end{aligned}$$

# Lineární zobrazení

**Příklad:** $A(1,1)=1$**,** $A(1,-1)=-1$**. Najděte všechna** $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$**:** $A(\mathbf{x})=1$**.**

Najděme všechny lineární kombinace $v_1 := 1$ a $v_2 := -1$, které dávají $v := 1$, tj. hledáme $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1 1 + \alpha_2(-1) = 1 \to \alpha_1 = 1+t,\ \alpha_2 = t,\ t\in\mathbb{R}.$$

Vzorem $\mathbf{x} : A(\mathbf{x}) = v$ jsou stejné lineární kombinace vzorů bázových vektorů $(1,1)$ a $(1,-1)$

$$\mathbf{x} = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1) = (1+t)(1,1) + t(1,-1) = (1,1) + t(2,0), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Výsledky tvoří přímku v $\mathbb{R}^2$.

# Lineární zobrazení

**Příklad: Je dáno** $A(1-x+x^2)=(1,1)$**,** $A(1+x-x^2)=(1,0)$**,** $A(-1+x+x^2)=(0,1)$**. Najděte všechny** $p(x)\in\mathcal{P}_2$**:** $A(p)=(0,0)$**.**

Najděme všechny lineární kombinace $(1,1)$, $(1,0)$ a $(0,1)$, které dávají $(0,0)$, tj. hledáme $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$:

$$\alpha_1(1,1)+\alpha_2(1,0)+\alpha_3(0,1)=(0,0)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \alpha_3=t,\ \alpha_2=t,\ \alpha_1=-t,\ t\in\mathbb{R}.$$

Vzorem $p(x):A(p(x))=(0,0)$ jsou stejné lineární kombinace vzorů bázových funkcí $1-x+x^2$, $1+x-x^2$ a $-1+x+x^2$

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha_1(1-x+x^2)+\alpha_2(1+x-x^2)+\alpha_3(-1+x+x^2)= \\ &= -t(1-x+x^2)+t(1+x-x^2)+t(-1+x+x^2)= \\ &= t(-1+3x-x^2),\ t\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

# Lineární zobrazení

Mějme lineární zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$.

## Nulový prostor

$$\mathcal{N}(A) := \{\mathbf{u} \in \mathcal{U} : \; A(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$$

je podprostor $\mathcal{U}$.

## Obor hodnot

$$\mathcal{H}(A) := \{A(\mathbf{u}) \in \mathcal{V} : \; \mathbf{u} \in \mathcal{U}\} \, .$$

je podprostor $\mathcal{V}$.

## „Zákon zachování dimenze"

$$\underbrace{\dim \mathcal{N}(A)}_{=:d(A)} + \underbrace{\dim \mathcal{H}(A)}_{=:h(A)} = \dim \mathcal{U},$$

kde $d(A)$ se nazývá **defekt** a $h(A)$ se nazývá **hodnost** zobrazení $A$.

# Lineární zobrazení

Mějme matici $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, které definuje zobrazení $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, kde $A(\mathbf{x}) := \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$.

## Nulový prostor matice = nulový prostor lineárního zobrazení

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = \mathcal{N}(A)$$

a $d(\mathbf{A}) := d(A) = \dim \mathcal{N}(A)$ nazýváme také **defekt matice**.

## Sloupcový prostor matice = obor hodnot lineárního zobrazení

$$\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \{A(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m : \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \mathcal{H}(A)$$

a $h(\mathbf{A}) = h(A) = \dim \mathcal{H}(A)$ jsme minule definovali jako **hodnost matice**.

## „Zákon zachování dimenze" pro matice

$$d(\mathbf{A}) + h(\mathbf{A}) = n.$$

# Lineární zobrazení

**Příklad: Je dáno lin. zobr.** $A(1,1,-1)=(1,1)$**,** $A(1,-1,0)=(-2,0)$**,** $A(1,1,1)=(0,1)$**. Vypočtěte** $\mathcal{N}(A)$**,** $d(A)$**,** $\mathcal{H}(A)$**,** $h(A)$**.**

Pro výpočet nulového prostoru vyjádřeme $(0,0)$ jako lin. kombinaci obrazů báze, tj. hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1(1,1)+\alpha_2(-2,0)+\alpha_3(0,1)=(0,0),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \alpha_3=t,\ \alpha_2=-\frac{1}{2}t,\ \alpha_1=-t,\ t\in\mathbb{R}.$$

Nulový prostor obsahuje stejné lineární kombinace vzorů

$$\mathcal{N}(A)=\left\{-t(1,1,-1)-\frac{1}{2}t(1,-1,0)+t(1,1,1):\ t\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right)\right\rangle,\ d(A)=1.$$

Ze zákona zachování dimenze víme, že

$$h(A)=n-d(A)=\dim\mathbb{R}^3-d(A)=3-1=2.$$

Zároveň je obor hodnot podprostorem $\mathbb{R}^2$, musí tedy platit

$$\mathcal{H}(A)=\mathbb{R}^2.$$

# Lineární zobrazení

**Příklad: Je dáno lin. zobr. $A : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^3$ obrazy báze $A(1-x) = (1,-1,1)$, $A(1+x) = (0,1,2)$. Vypočtěte $\mathcal{N}(A)$, $d(A)$, $\mathcal{H}(A)$, $h(A)$.**

Pro výpočet nulového prostoru vyjádřeme $(0,0,0)$ jako lin. kombinaci obrazů báze, tj. hledáme $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1(1,-1,1) + \alpha_2(0,1,2) = (0,0,0),$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3-2\mathbf{r}_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Nulový prostor obsahuje stejné lineární kombinace vzorů

$$\mathcal{N}(A) = \{0(1-x) + 0(1+x) \in \mathcal{P}_1\} = \{0\}.$$

Ze zákona zachování dimenze víme, že

$$h(A) = n - d(A) = \dim \mathcal{P}_1 - d(A) = 2 - 0 = 2.$$

Zároveň je obor hodnot prostorem $\langle(1,-1,1),(0,1,2)\rangle$, a máme tedy i bázi $\mathcal{H}(A)$:

$$F := ((1,-1,1),(0,1,2)).$$

# Lineární zobrazení

## Každou matici lze chápat jako lineární zobrazení.

Mějme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pak následující zobrazení $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární

$$A(\mathbf{x}) := \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}.$$

## Matice lineárního zobrazení

Mějme lineární zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, bázi $E := (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathcal{U}$ a bázi $F := (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m)$ prostoru $\mathcal{V}$. Vezměme $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ a jeho souřadnice $[\mathbf{u}]_E = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ v bázi $E$, tj.

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n.$$

Vyjádřeme obraz $A(\mathbf{u}) \in \mathcal{V}$ v bázi $F$

$$\begin{aligned}
[A(\mathbf{u})]_F &= [A(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n)]_F = [\alpha_1 A(\mathbf{e}_1) + \cdots + \alpha_n A(\mathbf{e}_n)]_F \\
&= \underbrace{([A(\mathbf{e}_1)]_F, \ldots, [A(\mathbf{e}_n)]_F)}_{=:\mathbf{A}_{E,F}} \cdot [\mathbf{u}]_E,
\end{aligned}$$

kde $\mathbf{A}_{E,F} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je **matice lineárního zobrazení vzhledem k bázím** $E$ a $F$.

# Matice lineárního zobrazení

## Každou matici lze chápat jako lineární zobrazení.

Mějme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pak následující zobrazení $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární

$$A(\mathbf{x}) := \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}.$$

## Každé lineární zobrazení lze vyjádřit maticí

Mějme lineární zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, bázi $E := (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathcal{U}$ a bázi $F := (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m)$ prostoru $\mathcal{V}$. Vezměme $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ a jeho souřadnice $[\mathbf{u}]_E = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ v bázi $E$. Obraz $A(\mathbf{u}) \in \mathcal{V}$ v bázi $F$ je

$$[A(\mathbf{u})]_F = \mathbf{A}_{E,F} \cdot [\mathbf{u}]_E,$$

kde $\mathbf{A}_{E,F} := ([A(\mathbf{e}_1)]_F, \ldots, [\mathbf{A}(\mathbf{e}_n)]_F) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je **matice lineárního zobrazení vzhledem k bázím** $E$ a $F$.

# Matice lineárního zobrazení

**Příklad: Je dáno lineární zobrazení obrazy báze $E$: $A(1,-1,1) = (1,2)$, $A(1,1,-1) = (1,-1)$, $A(-1,1,1) = (0,1)$. Vypočtěte $\mathbf{A}_{E,F}$ v bázích $E$ a kanonické bázi $F$.**

$$E := (\mathbf{e}_1 := (1,-1,1), \mathbf{e}_2 := (1,1,-1), \mathbf{e}_3 := (-1,1,1))\,, \quad F := (\mathbf{f}_1 := (1,0), \mathbf{f}_2 := (0,1))\,.$$

Souřadnice obrazů v bázi $F$ už vlastně máme

$$[A(\mathbf{e}_1)]_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [A(\mathbf{e}_2)]_F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [A(\mathbf{e}_3)]_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a tedy i matici lineárního zobrazení

$$[\mathbf{A}]_{E,F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Matice lineárního zobrazení

**Příklad: Je dáno lineární zobrazení obrazy báze $A(1,-1,1) = (1,2)$, $A(1,1,-1) = (1,-1)$, $A(-1,1,1) = (0,1)$. Vypočtěte $\mathbf{A}_{E,F}$ v kanonických bázích $E$ a $F$.**

$$E := (\mathbf{e}_1 := (1,0,0), \mathbf{e}_2 := (0,1,0), \mathbf{e}_3 := (0,0,1)), \quad F := (\mathbf{f}_1 := (1,0), \mathbf{f}_2 := (0,1)).$$

Spočtěme souřadnice bázových vektorů $E$ v bázi, v níž je zadáno $A$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathbf{r}_1 := 2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_1 := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_i := (1/2)\mathbf{r}_i} \left(\begin{array}{c|ccc} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \mathbf{I} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Matice lineárního zobrazení v bázích $E$, $F$ je pak tato

$$\mathbf{A}_{E,F} = ([A(\mathbf{e}_1)]_F, [A(\mathbf{e}_2)]_F, [A(\mathbf{e}_3)]_F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

# Matice lineárního zobrazení

## Podobné matice

Mějme lineární zobrazení $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, tzv. **lineární transformace**, a báze $E$, $F$ prostoru $\mathcal{V}$. Pak

$$\mathbf{A}_{F,F} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{E,E} \cdot \mathbf{T},$$

kde $\mathbf{T}$ je matice přechodu od báze $E$ do báze $F$ a $\mathbf{A}_{E,E}$, $\mathbf{A}_{F,F}$ se nazývají **podobné matice**.

## Matice složeného zobrazení

Mějme lineární zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, $B : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ a báze $E$, $F$, $G$, respektive, vektorových prostorů $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$. Definujme složené zobrazení $C : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$, $C(\mathbf{u}) := B(A(\mathbf{u}))$. Pak $C$ je opět lineární a

$$\mathbf{C}_{E,G} = \mathbf{B}_{F,G} \cdot \mathbf{A}_{E,F}.$$