

Lineární algebra — 5. přednáška: Báze a řešitelnost soustav



Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

<http://homel.vsb.cz/~luk76/LA1>



Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



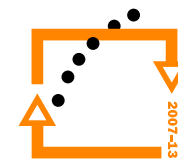
evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



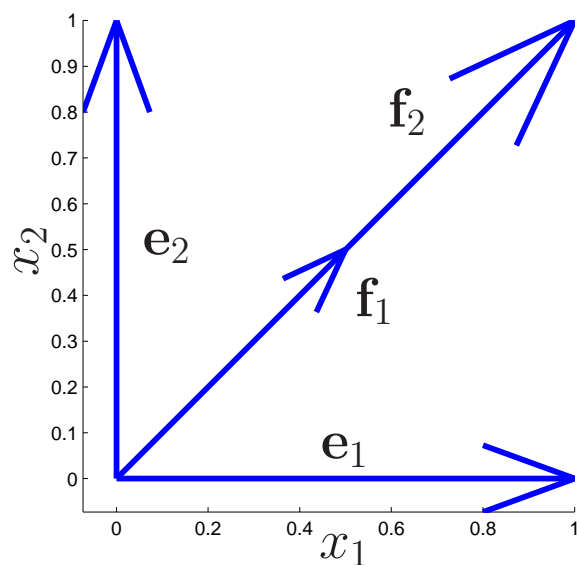
OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Báze vektorového prostoru

Báze

je uspořádaná množina vektorů generující jednoznačně celý prostor.



- $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ tvoří bázi \mathbb{R}^2 , a tedy generují \mathbb{R}^2 jednoznačně:

$$\forall \mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2.$$

- $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ netvoří bázi \mathbb{R}^2 , nesplňují 2. ani 3.

- $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_2$ netvoří bázi \mathbb{R}^2 , nejsou lin. nezávislé:

$$\forall \mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 = (x_1 - x_2) \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{f}_2.$$

- $\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2$ tvoří bázi \mathbb{R}^2 , a tedy generují \mathbb{R}^2 jednoznačně:

$$\forall \mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = (x_1 - x_2) \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{f}_2.$$

Báze vektorového prostoru

Báze

Mějme vektorový prostor \mathcal{V} . Uspořádaná množina nenulových vektorů $F := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$ tvoří **bázi vektorového prostoru** \mathcal{V} , pokud

1. $F \subset \mathcal{V}$,
2. $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ jsou lineárně nezávislé,
3. libovolný vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ je lineární kombinací $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$, tj.

$$\alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{f}_n = \mathbf{v}.$$

Souřadnice vektoru v bázi, dimenze

Platí, že lineární kombinace je pro bázi vždy jednoznačná. Výsledné koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nazýváme **souřadnice vektoru \mathbf{v} v bázi F** a značíme $[\mathbf{v}]_F := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Platí, že počet bázevých vektorů n vektorového prostoru \mathcal{V} je vždy stejný, říkáme mu **dimenze** \mathcal{V} a značíme $\dim \mathcal{V} := n$.

Báze vektorového prostoru

Jednoznačnost souřadnic

Mějme bázi $F := (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ vektorového prostoru \mathcal{V} a buď $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Souřadnicový vektor $[\mathbf{v}]_F \in \mathbb{R}^n$ je jednoznačný.

Důkaz sporem

Předpokládejme, že existují dva různé souřadnicové vektory $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$, tedy dvě různé lineární kombinace

$$\begin{aligned}\alpha_1 \mathbf{f}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{f}_n &= \mathbf{v}, \\ \beta_1 \mathbf{f}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{f}_n &= \mathbf{v}\end{aligned}$$

Odečtením rovnic dostáváme

$$(\alpha_1 - \beta_1) \mathbf{f}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \mathbf{f}_n = \mathbf{0}.$$

Jelikož vektory báze jsou lineárně nezávislé, poslední rovnice má pouze triviální řešení

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \quad \dots, \quad \alpha_n - \beta_n = 0,$$

což je spor s předpokladem, tudíž souřadnice jsou jednoznačné.

Báze vektorového prostoru

Dimenze je jednoznačná

Mějme báze $E := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ a $F := (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$ vektorového prostoru \mathcal{V} . Pak $m = n$.

Důkaz, jak jinak než sporem

Předpokládejme, že $m > n$ (případ $n > m$ se vyvrátí analogicky). Jelikož E je báze, máme jednoznačné souřadnicové vektory $[\mathbf{f}_i]_E$ tak, že např.

$$\begin{aligned}\alpha_1^1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n^1 \mathbf{e}_n &= \mathbf{f}_1, \\ &\vdots \\ \alpha_1^n \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n^n \mathbf{e}_n &= \mathbf{f}_n, \\ \alpha_1^{n+1} \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n^{n+1} \mathbf{e}_n &= \mathbf{f}_{n+1}.\end{aligned}$$

Ukážeme, že \mathbf{f}_{n+1} je lineární kombinací $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$, tj. že existují β_1, \dots, β_n :

$$\beta_1 \mathbf{f}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{f}_n = \mathbf{f}_{n+1}.$$

Báze vektorového prostoru

Dimenze je jednoznačná

Mějme báze $E := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ a $F := (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$ vektorového prostoru \mathcal{V} . Pak $m = n$.

Pokračování důkazu

Rozepíšeme-li levou i pravou stranu pomocí souřadnic v bázi E , dostáváme

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \sum_{j=1}^n \alpha_j^i \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j^{n+1} \mathbf{e}_j,$$

což díky lineární nezávislosti $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ vede na následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^1 & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{n+1} \\ \vdots \\ \alpha_n^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Matice soustavy je regulární, jinak by sloupce $\boldsymbol{\alpha}^i$ byly lineárně závislé, ale pak by byly lineárně závislé i vektory $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$. Soustava tedy má jednoznačné řešení a \mathbf{f}_{n+1} je lineárně kombinací $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$, tudíž F není báze. Předpoklad $m > n$ byl mylný.

Báze vektorového prostoru

Příklad: Najděte bázi $\mathcal{U} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}$.

Hledáme parametrické vyjádření prostoru \mathcal{U} . Řešíme „soustavu“

$$x_1 + x_2 = 0.$$

Pro vyjádření nekonečně mnoha řešení, zavedeme parametr

$$x_2 := t \in \mathbb{R}$$

a dopočteme

$$x_1 = -x_2 = -t.$$

Zjistili jsme, že

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{x} = (-t, t) : t \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{x} = t(-1, 1) : t \in \mathbb{R}\},$$

a tedy libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ je lineární kombinací jediného bázového vektoru

$$F := (\mathbf{f}_1 := (-1, 1)).$$

Dimenze \mathcal{U} je 1. \mathcal{U} je přímka v \mathbb{R}^2 procházející počátkem.

Báze vektorového prostoru

Příklad: Najděte bázi $\mathcal{U} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

Řešíme soustavu

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Zavedeme parametry

$$x_3 := t \in \mathbb{R}, \quad x_2 := s \in \mathbb{R}$$

a dosadíme

$$x_1 = -x_2 - x_3 = -s - t.$$

Dostáváme parametrické vyjádření prostoru

$$\mathcal{U} := \{\mathbf{x} = (-s - t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{x} = s(-1, 1, 0) + t(-1, 0, 1) : s, t \in \mathbb{R}\},$$

a tedy libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ je lineární kombinací dvou bázevých vektorů

$$F := (\mathbf{f}_1 := (-1, 1, 0), \mathbf{f}_2 := (-1, 0, 1)).$$

Dimenze \mathcal{U} je 2. Jedná se o rovinu v \mathbb{R}^3 procházející počátkem.

Báze vektorového prostoru

Příklad: Najděte bázi $\mathcal{U} := \{p(x) := \sum_{i=0}^2 a_i x^i : a_0 + a_1 = 0, a_0 - a_1 + a_2 = 0\}$.

Řešíme soustavu (nulovou pravou stranu neopisujeme)

$$\begin{array}{rcl} a_0 + a_1 & = & 0, \\ a_0 - a_1 + a_2 & = & 0, \end{array} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zavedeme parametr

$$a_2 := t \in \mathbb{R}$$

a dosadíme

$$a_1 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2}t, \quad a_0 = -a_1 = -\frac{1}{2}t.$$

Dostáváme parametrické vyjádření prostoru

$$\mathcal{U} := \left\{ p(x) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}tx + tx^2 : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ p(x) = t \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + x^2 \right) : t \in \mathbb{R} \right\},$$

a tedy

$$F := \left(f_1(x) := -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + x^2 \right), \quad \dim \mathcal{U} = 1.$$

Báze vektorového prostoru

Příklad: Vypočtěte souřadnice $[(1, 2)]_F$ v bázi $F := ((1, 1), (1, -1))$.

Hledáme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ lineární kombinace

$$\alpha_1(1, 1) + \alpha_2(1, -1) = (1, 2).$$

Řešíme tedy soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{array} \right).$$

Řešení je

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 1 - \alpha_2 = \frac{3}{2},$$

a tedy

$$[(1, 2)]_F = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right).$$

Báze vektorového prostoru

Příklad: Vypočtěte souřadnice $[1 - x + x^2]_F$ v bázi $F := (1 - x - x^2, 1 + x - x^2, -1 + x + 2x^2)$.

Hledáme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ lineární kombinace

$$\forall x \in \mathbb{R} : \alpha_1(1 - x - x^2) + \alpha_2(1 + x - x^2) + \alpha_3(-1 + x + 2x^2) = 1 - x + x^2,$$

tj.

$$\forall x \in \mathbb{R} : 1(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) + x(-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + x^2(-\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3) = 1 + (-1)x + 1x^2.$$

Díky lineární nezávislosti funkcí $1, x, x^2$ stačí porovnat koeficienty u těchto funkcí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Řešení je

$$\alpha_3 = 2, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 = 1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 3, \quad \text{a tedy } [1 - x + x^2]_F = (3, 0, 2).$$

$$\text{Zkouška: } 3(1 - x - x^2) + 0(1 + x - x^2) + 2(-1 + x + 2x^2) = 1 - x + x^2.$$

Báze vektorového prostoru

Báze a souřadnice převádějí úlohy do \mathbb{R}^n

Lineární úloha ve \mathcal{V} $\xrightarrow{\text{báze } \mathcal{V}, \text{ souřadnice}}$ lineární úloha v \mathbb{R}^n .

Příklad: Jsou $1 - x - x^2$, $1 + x + x^2$ a $1 - x + x^2$ lineárně nezávislé?

Vezměme kanonickou bázi $E := (1, x, x^2)$ prostoru \mathcal{P}_2 . Příslušné souřadnicové vektory jsou tyto

$$[1 - x - x^2]_E = (1, -1, -1), \quad [1 + x + x^2]_E = (1, 1, 1), \quad [1 - x + x^2]_E = (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3.$$

Řešíme ekvivalentní úlohu v \mathbb{R}^3 : Jsou $(1, -1, -1)$, $(1, 1, 1)$ a $(1, -1, 1)$ lin. nezávislé?

$$\alpha_1(1, -1, -1) + \alpha_2(1, 1, 1) + \alpha_3(1, -1, 1) = (0, 0, 0),$$
$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jediné řešení je $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, odpověď na obě úlohy (v \mathbb{R}^3 i v \mathcal{P}_2) tedy je

Ano, jsou lineárně nezávislé.

Báze vektorového prostoru

Lineární obal

Mějme vektorový prostor \mathcal{V} . **Lineární obal vektorů** $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathcal{V}$ je množina všech jejich lineárních kombinací, značíme

$$\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle := \{ \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \}.$$

Lineární obal tvoří podprostor \mathcal{V} .

Ekvivalentní definice báze

Mějme vektorový prostor \mathcal{V} . Uspořádaná množina nenulových vektorů $F := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$ tvoří **bázi vektorového prostoru** \mathcal{V} , pokud

1. $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ jsou lineárně nezávislé,
2. $\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n \rangle = \mathcal{V}$.

Báze a řešitelnost soustav lineárních rovnic

Sloupcový prostor matice $\mathcal{S}(\mathbf{A})$

je lineární obal sloupců matice $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1^s, \dots, \mathbf{a}_n^s) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tj.

$$\mathcal{S}(\mathbf{A}) := \{ \alpha_1 \mathbf{a}_1^s + \alpha_2 \mathbf{a}_2^s + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n^s : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \}.$$

To nám umožňuje zkráceně zapsat podmínku řešitelnosti soustavy lin. rovnic

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{b} \in \mathcal{S}(\mathbf{A}).$$

Hodnost matice

je dimenze sloupcového prostoru matice \mathbf{A} , značíme $h(\mathbf{A}) := \dim \mathcal{S}(\mathbf{A})$.

Báze a řešitelnost soustav lineárních rovnic

Příklad: Najděte bázi $\mathcal{S}(\mathbf{A})$,

kde

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Stačí zjistit, které ze sloupců jsou lineárně závislé na ostatních. Řešíme

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

α_2 a α_4 jsou tzv. volné neznámé, báze $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ sestává z pivotovaných sloupců

$$F := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad h(A) = 2.$$

Báze a řešitelnost soustav lineárních rovnic

Řádková hodnost = sloupcová hodnost

Řádková hodnost je dimenze lineárního obalu řádků matice, tj. počet lineárně nezávislých řádků, a platí, že je rovna sloupcové hodnosti. Tedy

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T).$$

Příklad: Vypočtete řádkovou hodnost \mathbf{A} ,

kde

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4 := \mathbf{r}_4 - 2\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & -2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_4 := 2\mathbf{r}_4 - 3\mathbf{r}_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h(\mathbf{A}^T) = 2.$$

Báze a řešitelnost soustav lineárních rovnic

Nulový prostor (jádro) matice \mathbf{A}

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{x} : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Obecné řešení soustavy lineárních rovnic

Uvažujme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ a soustavu

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Máme-li libovolné tzv. **partikulární řešení** \mathbf{x}^P této soustavy, pak obecné řešení se bude lišit od partikulárního právě o vektory z jádra matice \mathbf{A} , tj.

$$\forall \mathbf{x}^H \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) : \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x}^H + \mathbf{x}^P) = \mathbf{b}, \quad \text{kde } \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^P = \mathbf{b}.$$

Vektorům $\mathbf{x}^H \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ říkáme **homogenní řešení**, neboť řeší homogenní (s nulovou pravou stranou) soustavu

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^H = \mathbf{0}.$$

Báze a řešitelnost soustav lineárních rovnic

Výpočet báze jádra matice — Gaussova eliminace s parametrizací

Najděme nějakou bázi $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, kde

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - 3\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Za nepivotované proměnné zavedeme parametry

$$\alpha_4 = t \in \mathbb{R}, \quad \alpha_2 = s \in \mathbb{R},$$

zpětně dosadíme a dostáváme

$$\alpha_3 = -2\alpha_4 = -2t, \quad \alpha_1 = -2\alpha_2 - 2\alpha_3 - 2\alpha_4 = -6t - 2s.$$

Nulový prostor má tedy tvar

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} = (-6t - 2s, s, -2t, t) : t, s \in \mathbb{R}\} = \langle (-6, 0, -2, 1), (-2, 1, 0, 0) \rangle$$

a jeho báze je

$$\mathbf{N} := (\mathbf{n}_1 := (-6, 0, -2, 1), \mathbf{n}_2 := (-2, 1, 0, 0)).$$

Lineární nezávislost \mathbf{N} bychom ještě raději měli ověřit z definice.

Báze a řešitelnost soustav lineárních rovnic

Výpočet báze $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ — Gauss–Jordanova metoda s „nulovými pivoty“

Najdeme nějakou bázi $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, kde

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - 3\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pokračujeme dále Jordanovou metodou pro pivotované sloupce 1 a 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_1 := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_2 := (1/2)\mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

což je redukovaná matice soustavy s pivot. sloupci 1 a 3 a volnými sloupci 2 a 4.

Báze a řešitelnost soustav lineárních rovnic

Výpočet báze $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ — Gauss–Jordanova metoda s „nulovými pivoty“

Máme redukovanou matici soustavy s pivot. sloupci 1 a 3 a volnými sloupci 2 a 4

$$\mathbf{R} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =: (\mathbf{R}).$$

Permutujme sloupce

$$\tilde{\mathbf{R}} := (\mathbf{I} \ \mathbf{F}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nyní najdeme bázi $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ pomocí matice $\tilde{\mathbf{N}}$:

$$\tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a po zpětné permutaci} \quad \mathbf{N} := \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Báze $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ je $((-2, 1, 0, 0), (2, 0, -2, 1))$. Zkouška: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0}$.

Báze a řešitelnost soustav lineárních rovnic

Podmínka řešitelnosti

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{b} \in \mathcal{S}(\mathbf{A}).$$

Obecné řešení soustavy lineárních rovnic

Uvažujme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Označme hodnost matice

$$h := h(\mathbf{A}).$$

Pak máme r pivotovaných sloupců/neznámých a $n - h$ volných sloupců/proměnných. Za volné proměnné dosazujeme $n - h$ parametrů.

Báze a řešitelnost soustav lineárních rovnic

Obecná Gauss–Jordanova metoda pro 0, 1 i ∞ řešení

1. $(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \xrightarrow{\text{Gaussova (dopředná) eliminace}} (\mathbf{U}|\mathbf{c})$

2. Pokud $\mathbf{c} \notin \mathcal{S}(\mathbf{U})$ soustava nemá řešení, jinak

$$(\mathbf{U}|\mathbf{c}) \xrightarrow{\text{Jordanova (zpětná) eliminace}} \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{x}^P \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right).$$

3. Pokud $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, pak \mathbf{x}^P je jediným řešením, jinak

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\text{záměna sloupců}} \tilde{\mathbf{R}} = (\mathbf{I} \ \mathbf{F}), \quad \tilde{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{záměna řádků}} \mathbf{N}.$$

4. Soustava má ∞ řešení ve tvaru

$$\mathbf{x} := \mathbf{x}^P + \underbrace{\mathbf{N} \cdot \mathbf{t}}_{=\mathbf{x}^H},$$

kde $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n-h}$ je vektor parametrů.

Báze a řešitelnost soustav lineárních rovnic

Frobeniova věta

Uvažujme soustavu lin. rovnic

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Označme hodnost matice $h := h(\mathbf{A})$.

- Pokud $\mathbf{b} \notin \mathcal{S}(\mathbf{A})$, pak **soustava nemá řešení**.
- Pokud $\mathbf{b} \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$ a $h = n \leq m$ pak redukovaná matice soustavy

$$\mathbf{R} = \mathbf{I}$$

a **soustava má právě jedno řešení**.

- Pokud $\mathbf{b} \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$ a $h \leq m$ a $h < n$, pak

$$\tilde{\mathbf{R}} = (\mathbf{I} \ \mathbf{F})$$

a **soustava má ∞ řešení**, zavádíme $n - h$ parametrů.