

Lineární algebra — 4. přednáška: Vektorové prostory



Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

<http://homel.vsb.cz/~luk76/LA1>



Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



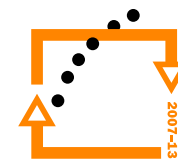
evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

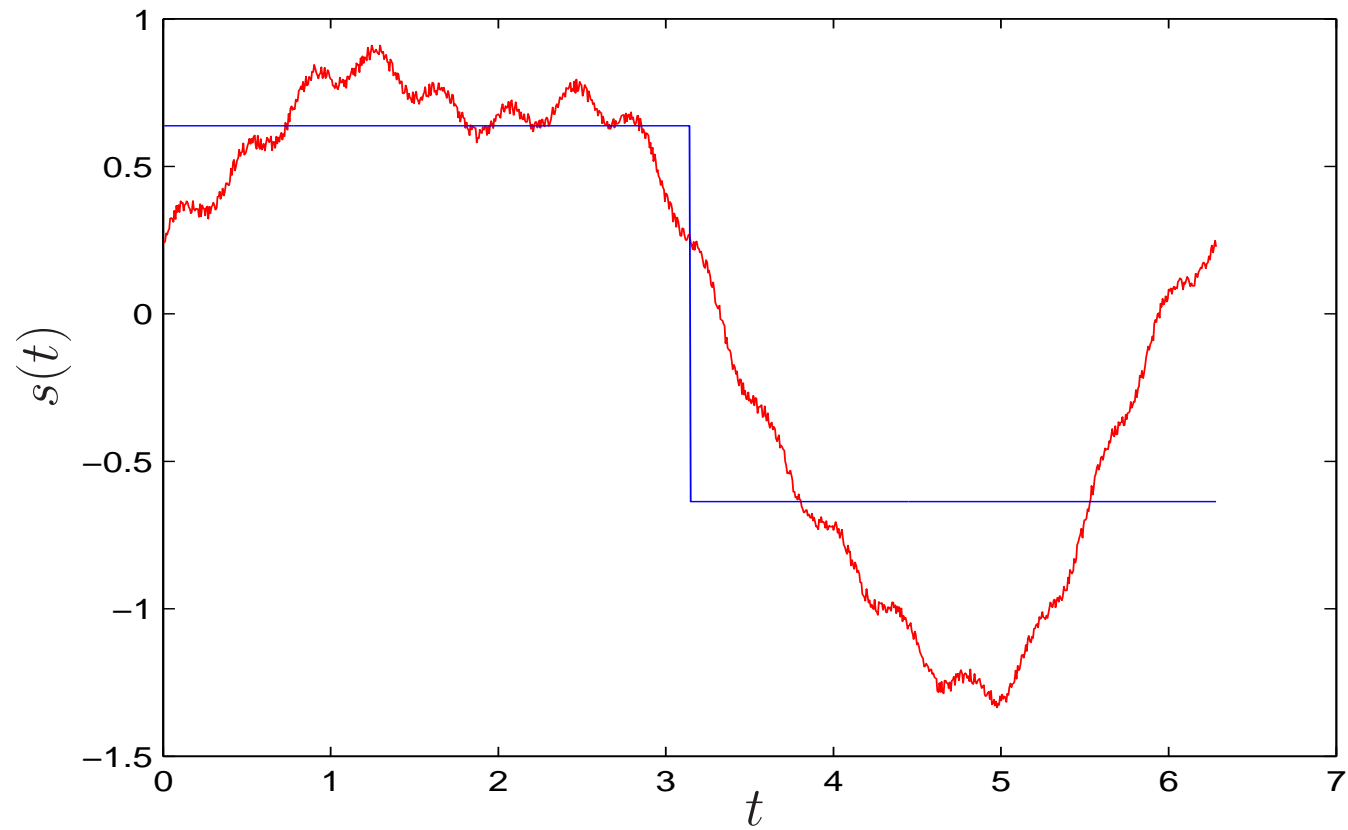


OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

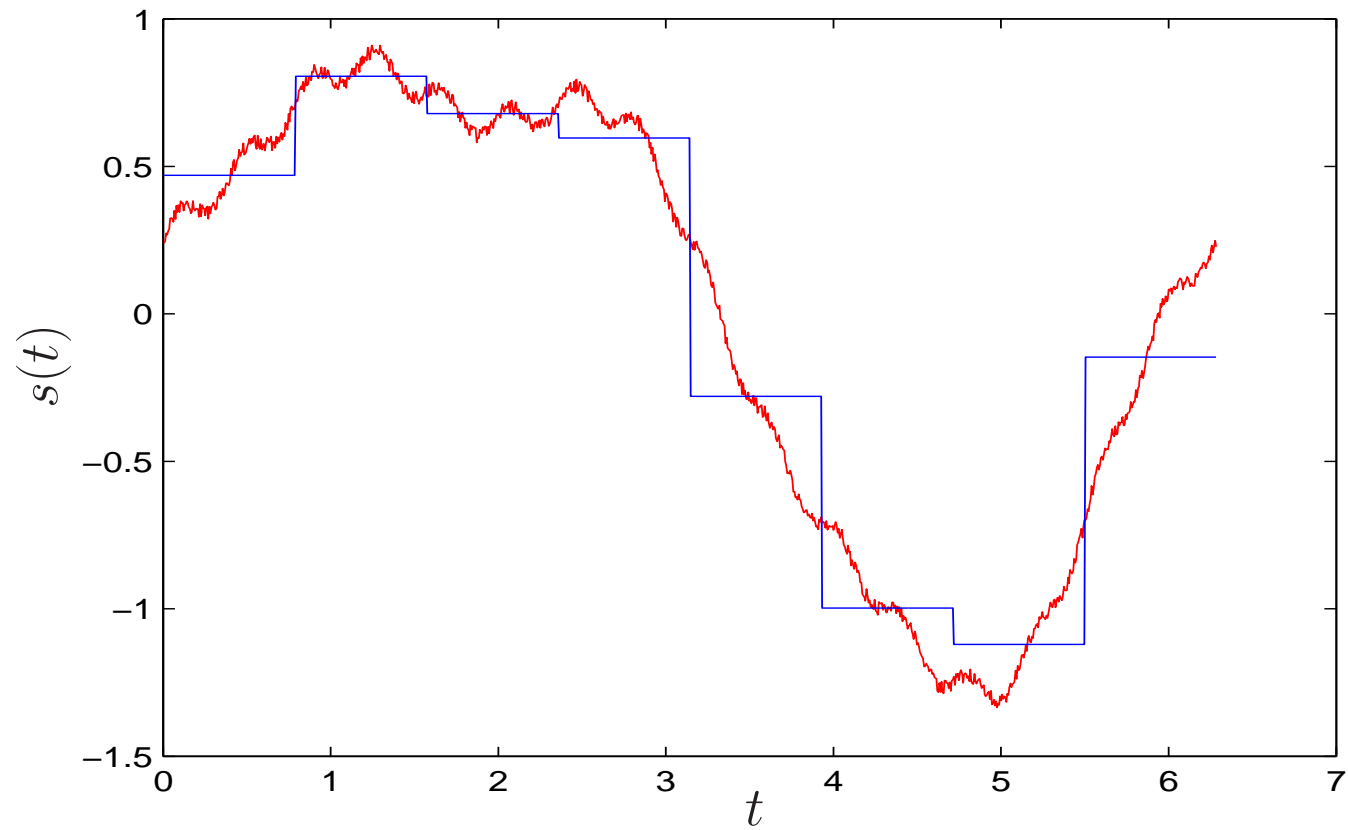
Motivace

Kompresi signálu $s(t)$ Haarovou (waveletovou) bází: 0.2%



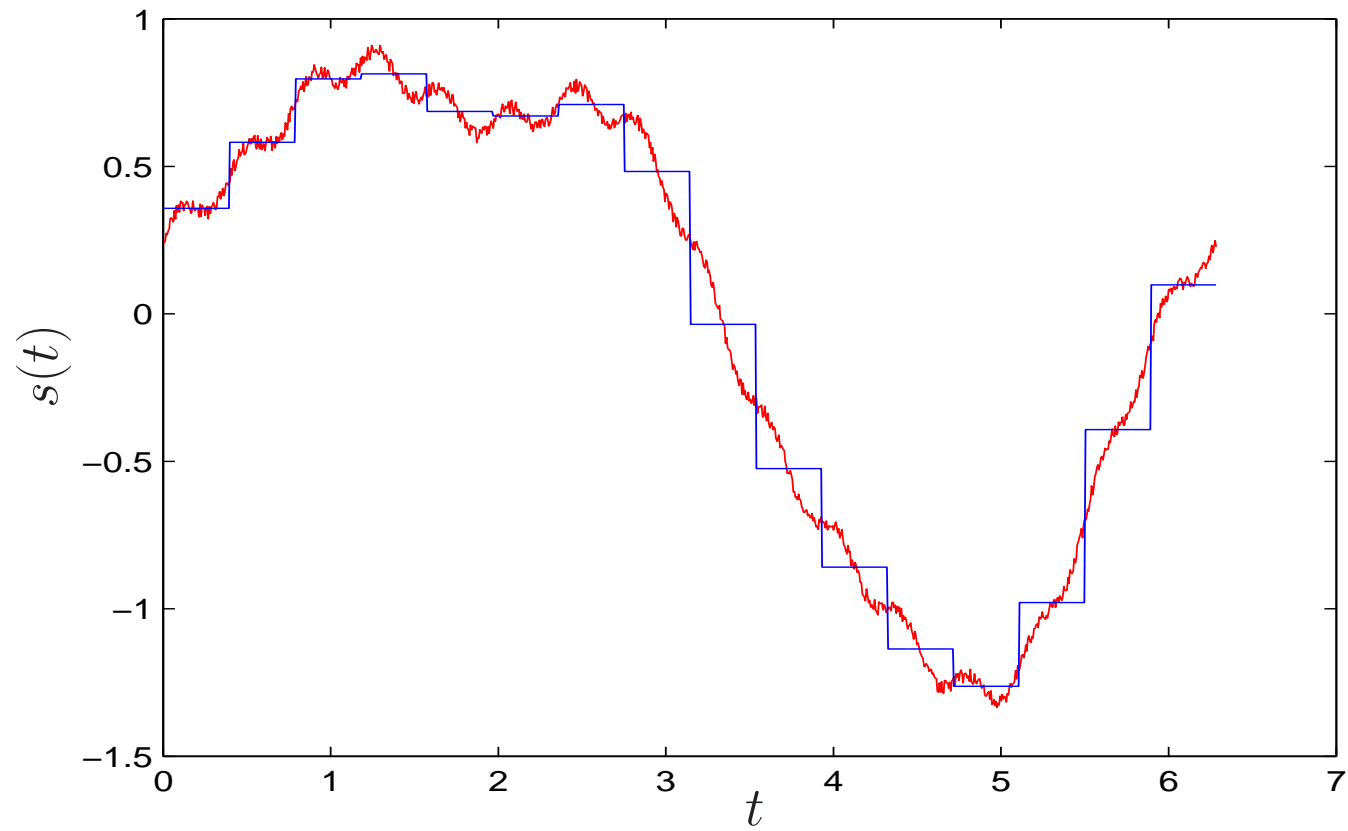
Motivace

Kompresi signálu $s(t)$ Haarovou (waveletovou) bází: 0.8%



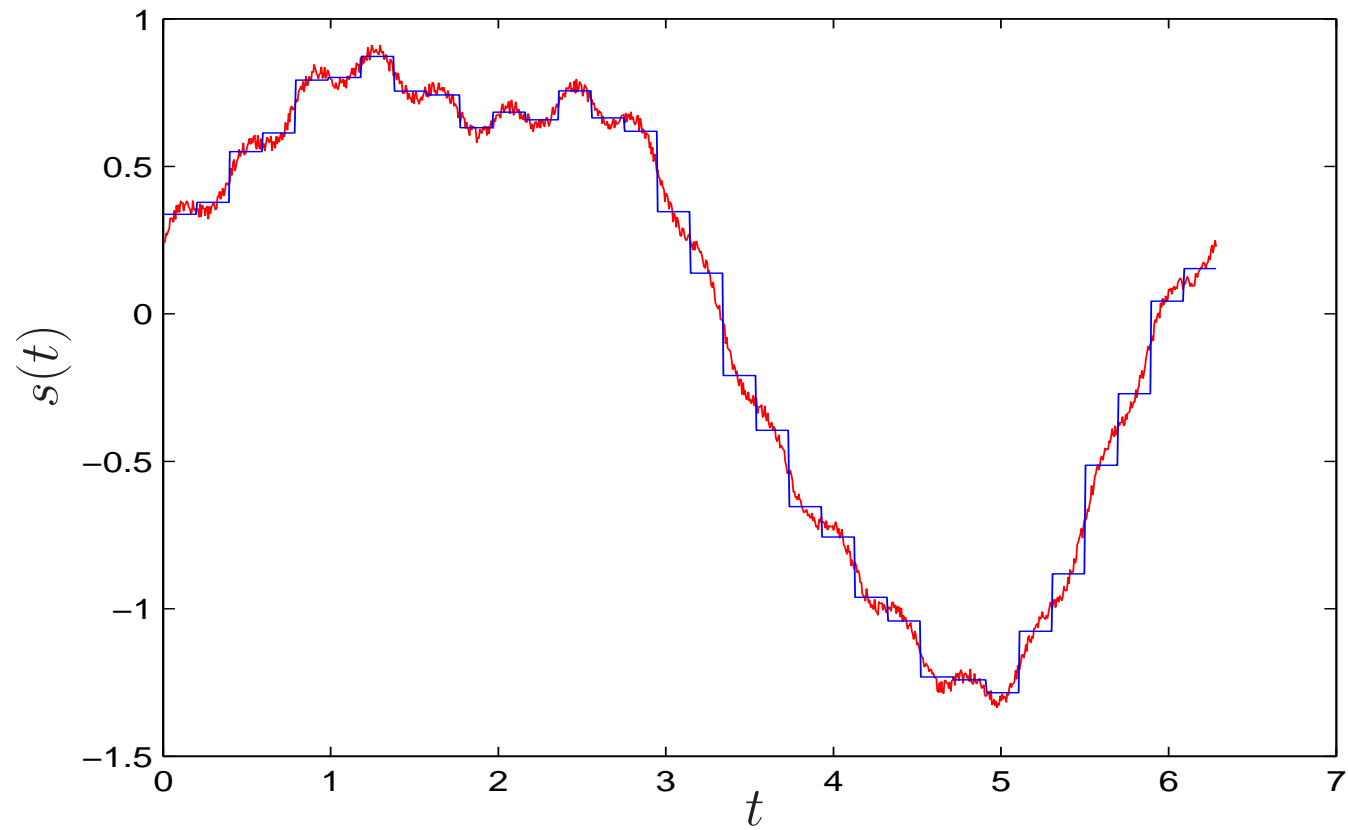
Motivace

Kompresi signálu $s(t)$ Haarovou (waveletovou) bází: 1.6%



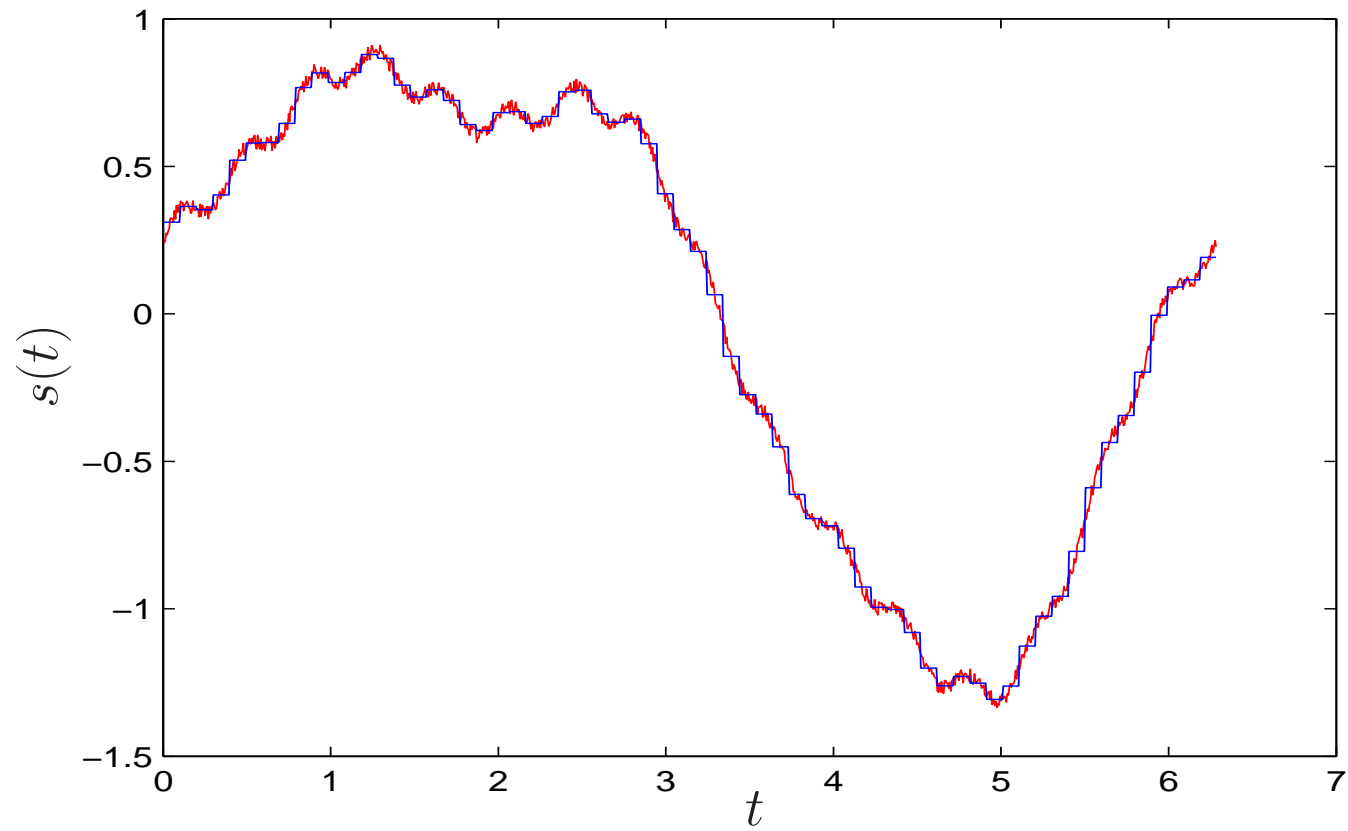
Motivace

Kompresi signálu $s(t)$ Haarovou (waveletovou) bází: 3.1%



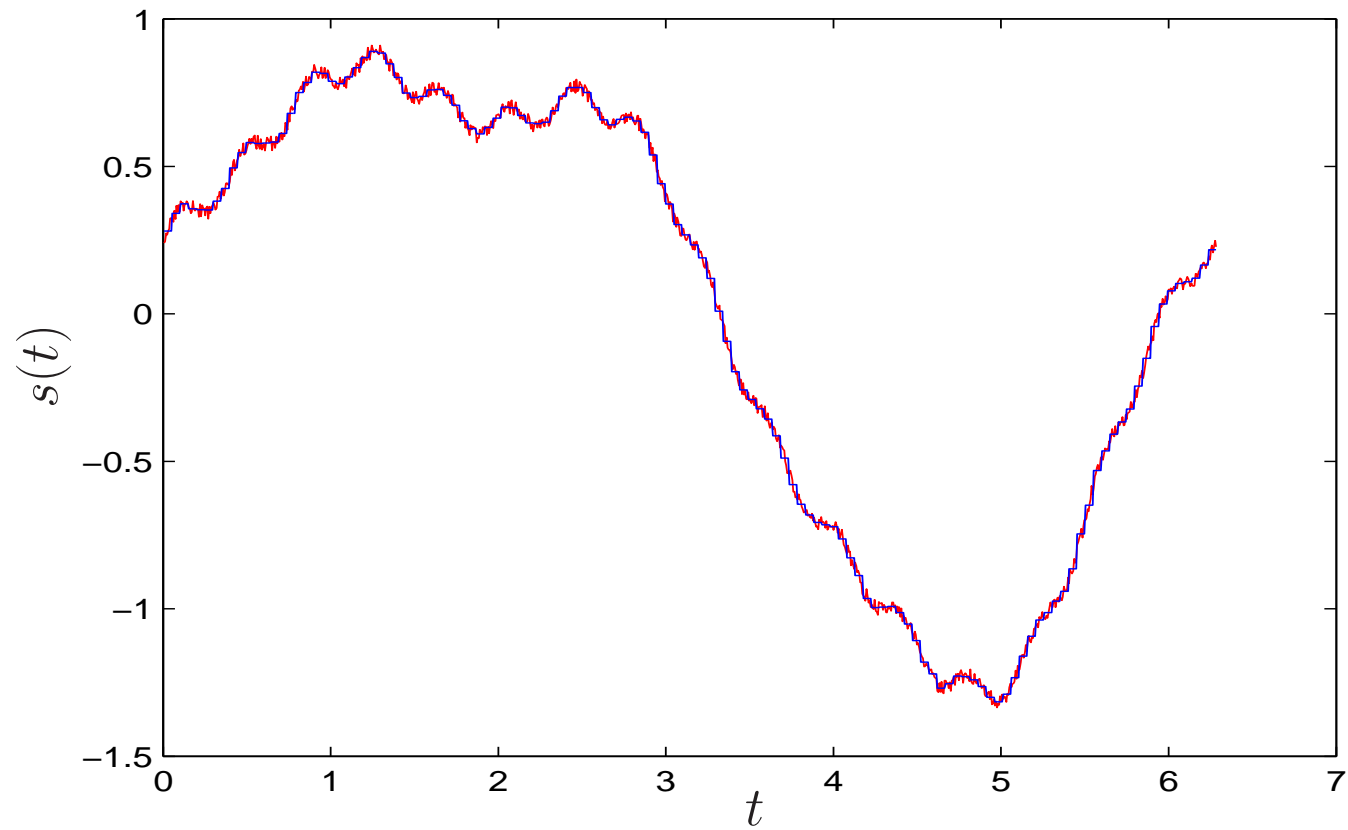
Motivace

Kompresi signálu $s(t)$ Haarovou (waveletovou) bází: 6.3%



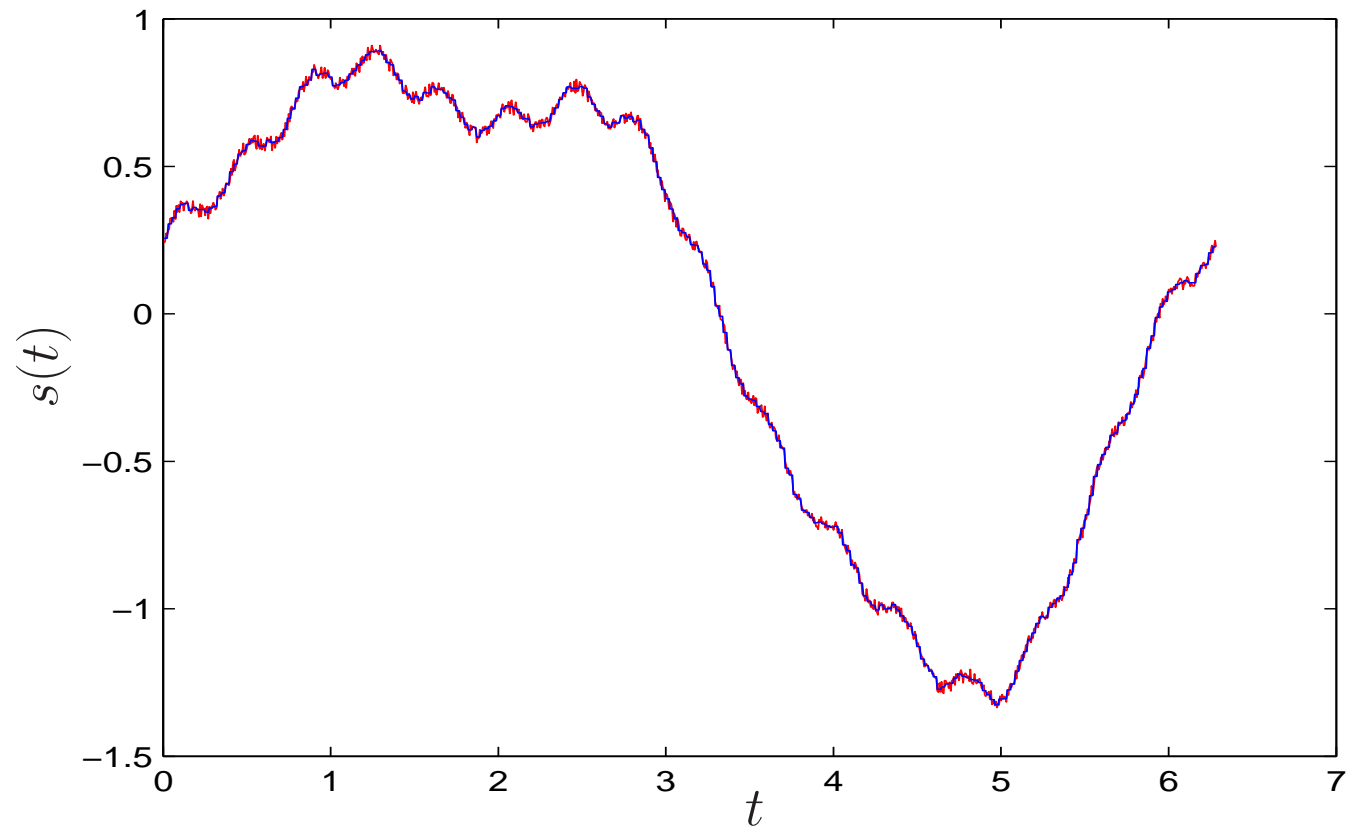
Motivace

Kompresi signálu $s(t)$ Haarovou (waveletovou) bází: 12.5%



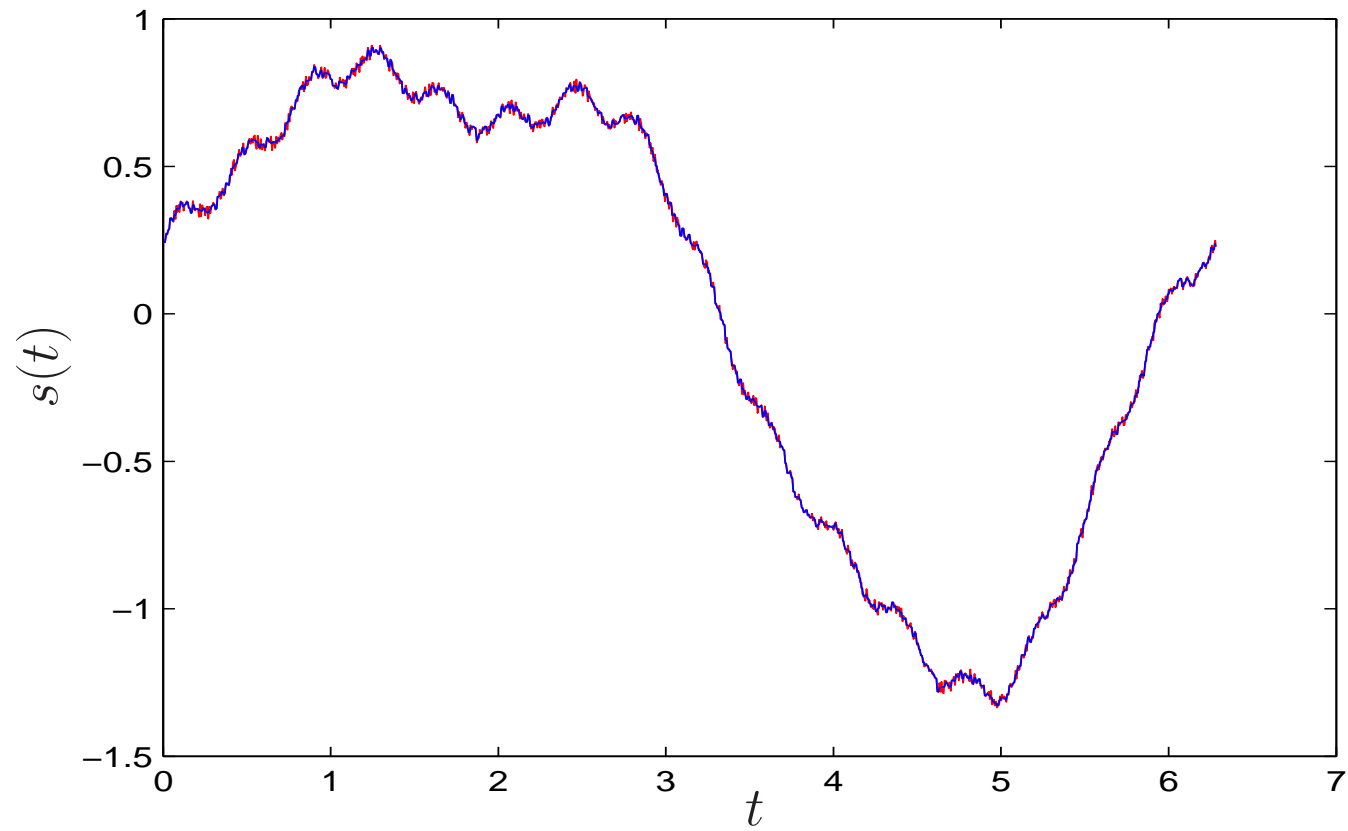
Motivace

Kompresi signálu $s(t)$ Haarovou (waveletovou) bází: 25%



Motivace

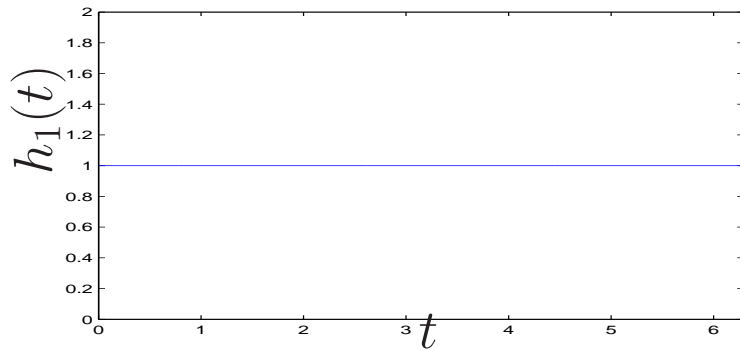
Kompresi signálu $s(t)$ Haarovou (waveletovou) bází: 50%



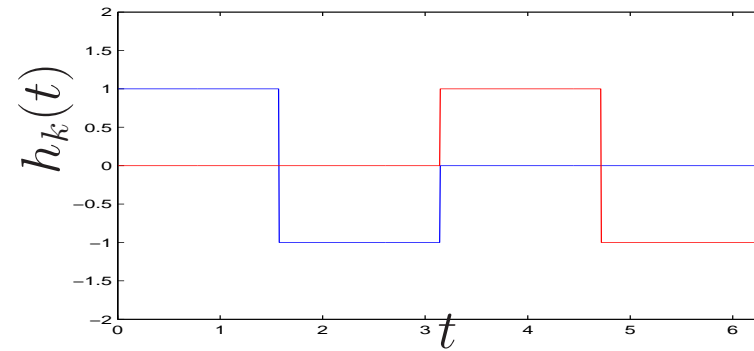
Motivace

Haarova (waveletová) báze: $h_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$

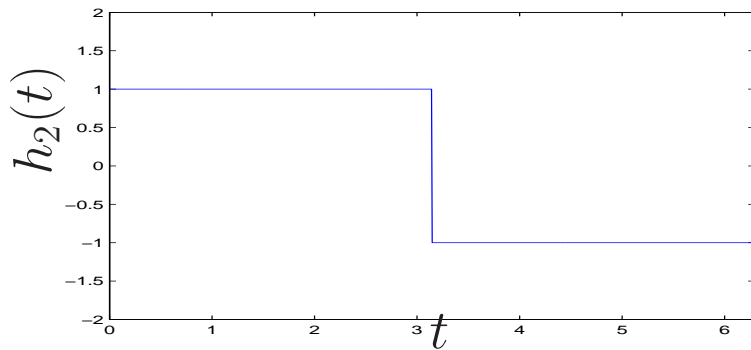
$k = 1$:



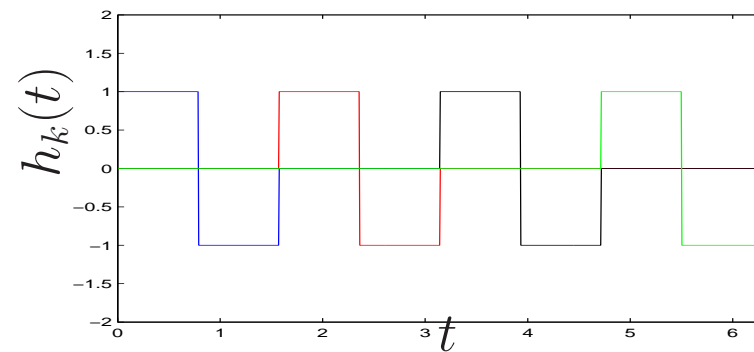
$k = 3, 4$:



$k = 2$:



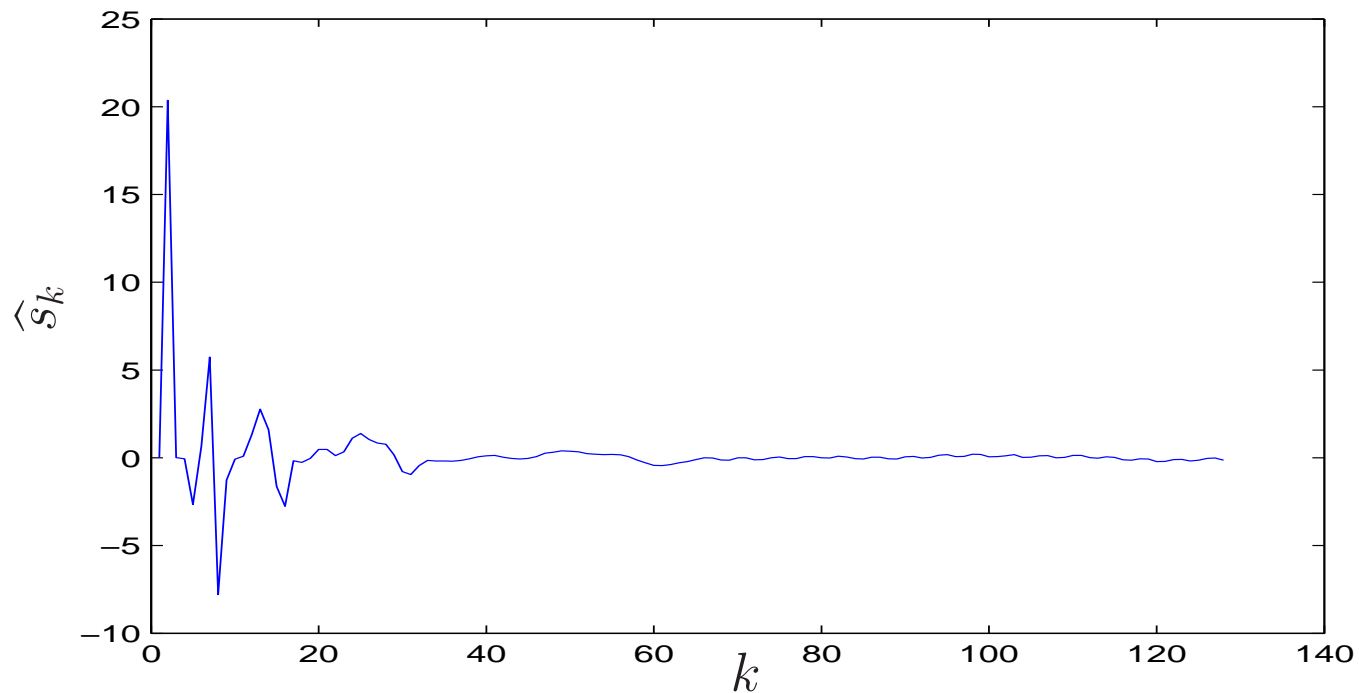
$k = 5, 6, 7, 8$:



Motivace

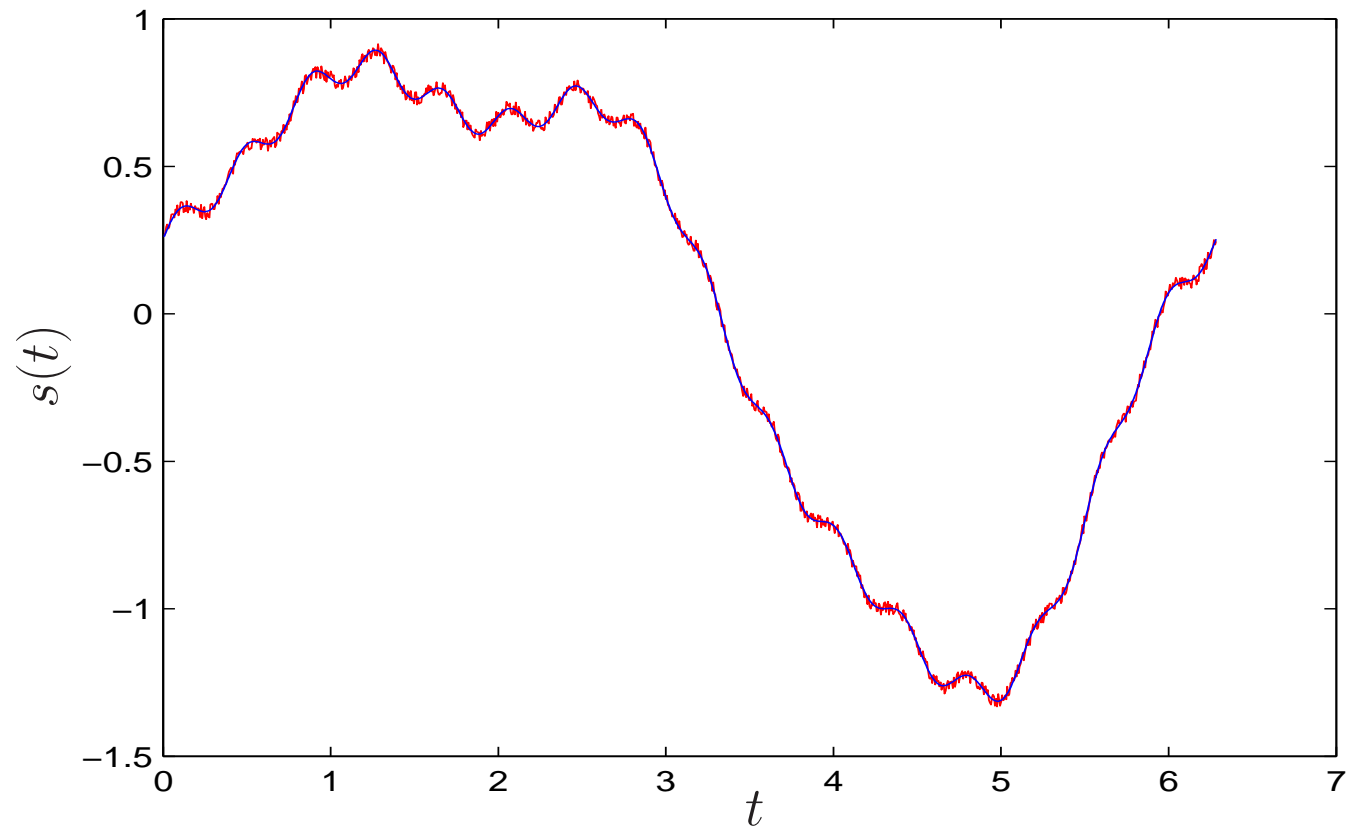
Reprezentace signálu Haarovými (waveletovými) souřadnicemi \hat{w}_k

$$s(t) = \sum_{k=1}^n \hat{w}_k h_k(t)$$



Motivace

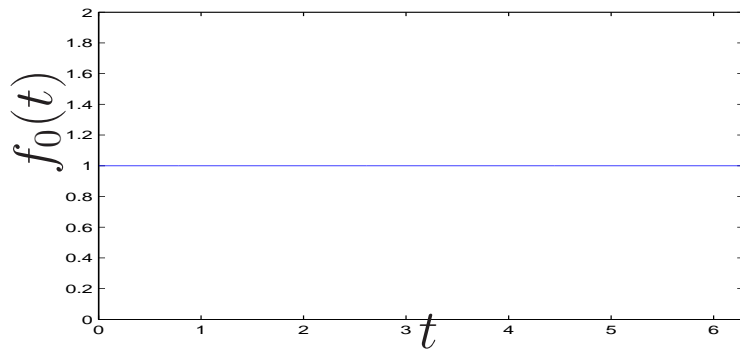
Kompresce signálu $s(t)$ Fourierovou bází (jpeg): 3%



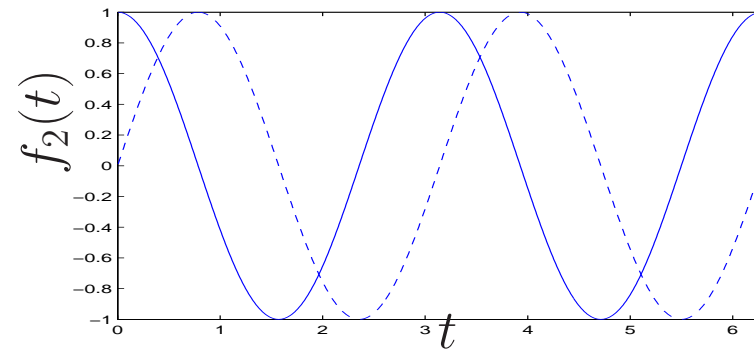
Motivace

Fourierova báze: $f_k(t) := e^{ik\omega t}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

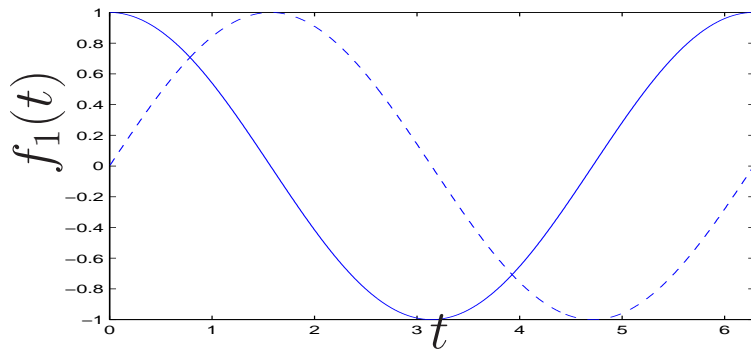
$k = 0$:



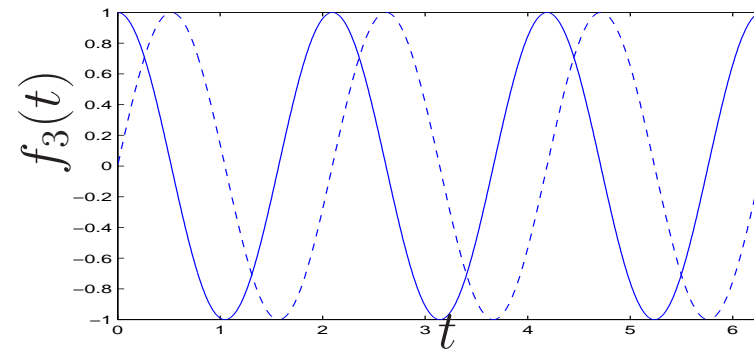
$k = 2$:



$k = 1$:



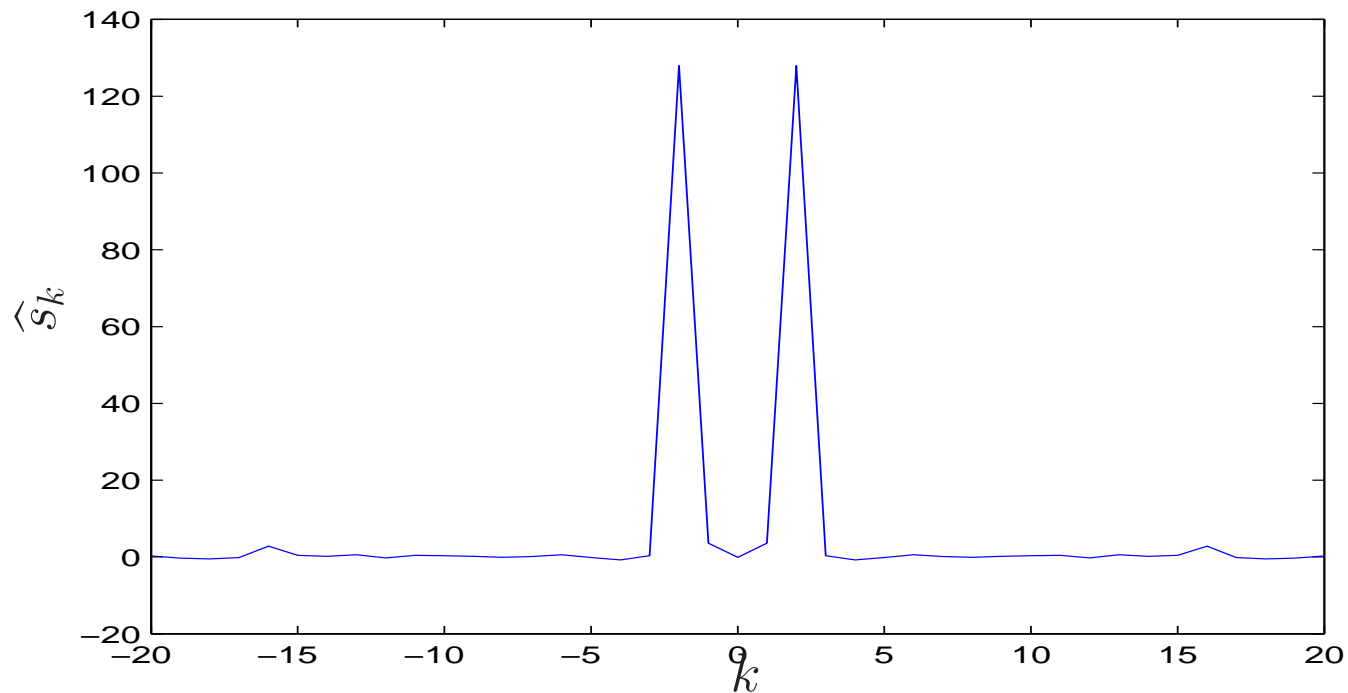
$k = 3$:



Motivace

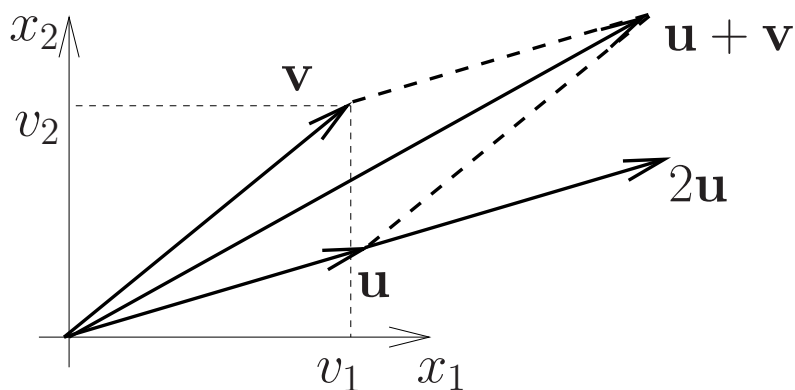
Reprezentace signálu Fourierovými souřadnicemi \hat{s}_k

$$s(t) = \mathcal{R} \left\{ \sum_{k=-n/2}^{n/2} \hat{s}_k \exp(ik\omega t) \right\}, \text{ kde } \omega := 2\pi/n$$



Vektorové prostory

Zobecnění 2d geometrických vektorů na aritmetické



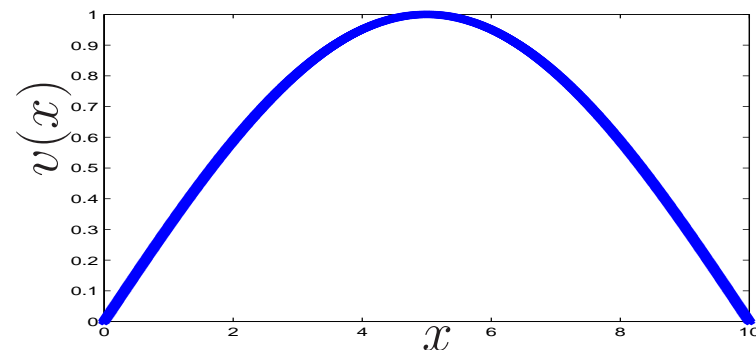
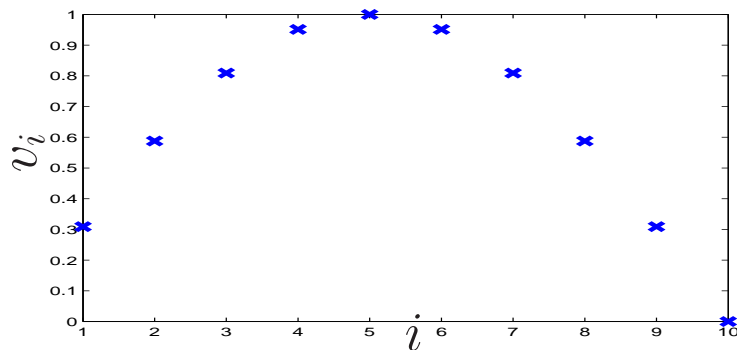
$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})_i := u_i + v_i$$

$$(\alpha \mathbf{u})_i := \alpha u_i$$

Zobecnění aritmetických vektorů na funkce

$$v_i := \sin(i\pi/10), \quad i \in \{1, 2, \dots, 10\},$$

$$v(x) := \sin(x\pi), \quad x \in \langle 0, 10 \rangle$$



Vektorové prostory

Zobecnění aritmetických vektorů na funkce

Sčítání vektorů $+$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a násobení skalárem \cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsme definovali pomocí číselného sčítání $+$ a násobení \cdot takto:

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} : \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : (\mathbf{u} + \mathbf{v})_i := u_i + v_i, (\alpha \cdot \mathbf{v})_i := \alpha \cdot v_i.$$

Definici lze analogicky rozšířit i pro funkce

$$\mathcal{F} := \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}\},$$

a to $+$: $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, \cdot : $\mathbb{R} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$,

$$f, g \in \mathcal{F}, \alpha \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : (f + g)(x) := f(x) + g(x), (\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x).$$

Pojem vektorového prostoru

Oba případy (a nejen tyto) lze shrnout do abstraktního pojmu vektorový prostor.

Vektorové prostory

Pojem vektorového prostoru

Reálný vektorový (též lineární) prostor je množina \mathcal{V} s operacemi $+$: $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ a \cdot : $\mathbb{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, které splňují následující axiomy:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V} : \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}, \quad (\text{asociativita sčítání})$$

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \quad (\text{komutativita sčítání})$$

$$\exists \mathbf{o} \in \mathcal{V} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \mathbf{v} + \mathbf{o} = \mathbf{v}, \quad (\text{existence nulového vektoru})$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad \exists (-\mathbf{v}) \in \mathcal{V} : \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{o}, \quad (\text{existence záporných vektorů})$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v},$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{v},$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{v}) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{v},$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

Prvky z \mathcal{V} se nazývají **vektory**, prvky z \mathbb{R} jsou **skaláry** (mohou být i komplexní).

Konvence: $\alpha \mathbf{v} := \alpha \cdot \mathbf{v}$.

Vektorové prostory

Další vlastnosti

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \quad 0\mathbf{v} = \mathbf{o}, \quad \alpha\mathbf{o} = \mathbf{o}, \quad (-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}.$$

Příklady vektorových prostorů

- \mathbb{R}^n (nebo \mathbb{C}^n) reálné (nebo komplexní) aritmetické vektory,
- $\mathbb{R}^{m \times n}$ (nebo $\mathbb{C}^{m \times n}$) reálné (nebo komplexní) matice,
- \mathcal{F} reálné funkce jedné reálné proměnné s operacemi

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\alpha \cdot f)(x) := \alpha f(x),$$

- \mathcal{S} reálné posloupnosti s operacemi

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} + (b_n)_{n=1}^{\infty} := (a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \alpha \cdot (a_n)_{n=1}^{\infty} := (\alpha a_n)_{n=1}^{\infty}.$$

- Jejich libovolný vektorový podprostor, viz dále.

Vektorové prostory

Pojem vektorový podprostor

Mějme vektorový prostor \mathcal{V} . Řekneme, že \mathcal{U} je **vektorový podprostor** \mathcal{V} (a zároveň dalším vektorovým prostorem), pokud

0. $\emptyset \neq \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ (\mathcal{U} je neprázdná podmnožina \mathcal{V}),
1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U} : \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ (\mathcal{U} je uzavřená vůči sčítání),
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U} : \alpha \mathbf{u} \in \mathcal{U}$ (\mathcal{U} je uzavřená vůči násobení skalárem).

Příklad: přímka v \mathbb{R}^2 procházející počátkem je vekt. prostor

$\mathcal{U} := \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 : u_1 + u_2 = 0 \}$ je vektorovým podprostorem $\mathcal{V} := \mathbb{R}^2$.

Ad 0. $\mathcal{U} \neq \emptyset$, neboť $\mathbf{u} := \mathbf{o} = (0, 0) \in \mathcal{U}$, viz $u_1 + u_2 = 0 + 0 = 0$. $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, viz zadání.

Ad 1. Mějme $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$, tj. $u_1 + u_2 = 0$ a $v_1 + v_2 = 0$. Pak $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$, neboť $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = 0 + 0 = 0$.

Ad 2. Mějme $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, tj. $u_1 + u_2 = 0$. Pak $\alpha \mathbf{u} \in \mathcal{U}$, neboť $\alpha u_1 + \alpha u_2 = \alpha(u_1 + u_2) = \alpha \cdot 0 = 0$.

Vektorové prostory

Příklad: přímka v \mathbb{R}^2 neprocházející počátkem není vekt. prostor

$\mathcal{U} := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 : u_1 + u_2 = 1\}$ není vektorovým podprostorem $\mathcal{V} := \mathbb{R}^2$.

Např. \mathcal{U} nemá nulový prvek, viz $\mathbf{u} := \mathbf{o} \notin \mathcal{U}$, neboť $u_1 + u_2 = 0 + 0 = 0 \neq 1$.

Podprostory \mathbb{R}^2

- triviální podprostory

$$\mathcal{U} := \{\mathbf{o}\}, \quad \mathcal{U} := \mathbb{R}^2,$$

- přímky procházející počátkem

$$\mathcal{U} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = 0, \text{ kde } a_1 \neq 0 \text{ nebo } a_2 \neq 0\}.$$

Vektorové prostory

Podprostory \mathbb{R}^3

- triviální podprostory $\mathcal{U} := \{\mathbf{o}\}$, $\mathcal{U} := \mathbb{R}^3$,
- roviny procházející počátkem

$$\mathcal{U} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}, \text{ kde } \mathbf{o} \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3\},$$

- přímky procházející počátkem

$$\mathcal{U} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}, \text{ kde } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, \mathbf{A} \text{ má hodnost } 2\}.$$

Vektorové prostory

Prostor mnohočlenů \mathcal{P}_n

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$

$$\mathcal{P}_n := \{p(x) := a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathcal{F} : a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

je vektorový podprostor \mathcal{F} .

Ad 0. $\mathcal{P}_n \neq \emptyset$, neboť $o(x) := 0 \in \mathcal{P}_n$. $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{F}$, neboť mnohočleny jsou funkce.

Ad 1. Mějme $p, q \in \mathcal{P}_n$, tj. $p(x) := \sum_{i=0}^n a_i x^i$ a $q(x) := \sum_{i=0}^n b_i x^i$. Pak $p + q \in \mathcal{P}_n$, neboť $(p + q)(x) = p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i$, kde $a_i + b_i \in \mathbb{R}$.

Ad 2. Mějme $\alpha \in \mathbb{R}$ a $p \in \mathcal{P}_n$, tj. $p(x) := \sum_{i=0}^n a_i x^i$. Pak $\alpha p \in \mathcal{P}_n$, neboť $(\alpha p)(x) = \alpha p(x) = \sum_{i=0}^n (\alpha a_i) x^i$, kde $\alpha a_i \in \mathbb{R}$.

Vektorové prostory

Příklady vektorových prostorů

- Nulový prostor matice

$$\mathcal{U} := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}, \text{ kde } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \}$$

- $\mathcal{U} := \{ p(x) := \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathcal{P}_n : \mathbf{A} \cdot (a_0, a_1, \dots, a_n)^T = \mathbf{o}, \text{ kde } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)} \}$
je podprostor \mathcal{P}_n .

- Sloupcový prostor matice

$$\mathcal{U} := \{ \mathbf{x} := \mathbf{A}\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \text{ kde } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ a } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \}$$

- Lineární obal

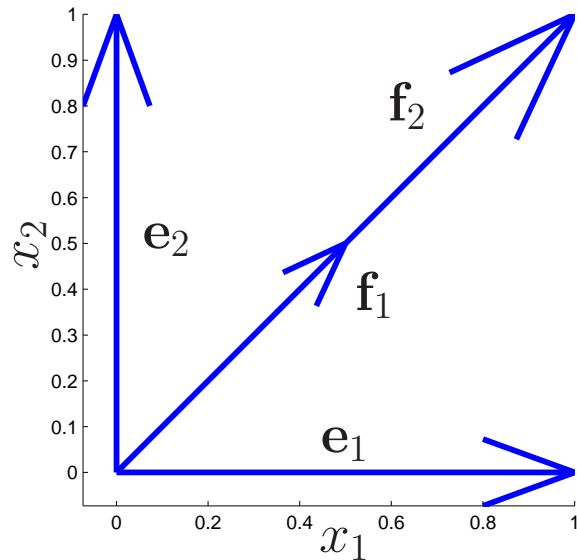
$$\mathcal{U} := \left\{ p(x) := \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i(x) \in \mathcal{P}_m : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ a } p_1(x), \dots, p_n(x) \in \mathcal{P}_m \right\}$$

je podprostor \mathcal{P}_m .

Vektorové prostory

Hledá se reprezentace vektorů — tzv. báze

generující jednoznačně celý prostor \mathcal{V} , a tedy žádný z vektorů není zbytečný.



- $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ jsou fajn, neboť jsou nenulové a generují \mathbb{R}^2 jednoznačně:

$$\forall \mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2.$$

- $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ nejsou fajn, neboť negenerují \mathbb{R}^2 .
- $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_2$ nejsou fajn, neboť generují \mathbb{R}^2 nejednoznačně (jeden z nich je zbytečný):

$$\forall \mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 = (x_1 - x_2) \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{f}_2.$$

- $\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2$ jsou fajn, neboť jsou nenulové a generují \mathbb{R}^2 jednoznačně:

$$\forall \mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = (x_1 - x_2) \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{f}_2.$$

Lineární nezávislost

Lineární nezávislost — žádný vektor není zbytečný

Mějme vektorový prostor \mathcal{V} . Nenulové **vektory** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathcal{V}$ jsou **lineárně nezávislé**, pokud rovnice

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

má pouze triviální řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Jinak má soustava nekonečně mnoho řešení a **vektory** jsou **lineárně závislé**.

Příklad: $\mathbf{e}_1 := (1, 0)$ a $\mathbf{f}_2 := (1, 1)$ jsou lineárně nezávislé

$$\text{Hledáme } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : \quad \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2 = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 (1, 0) + \alpha_2 (1, 1) = (0, 0).$$

To vede na soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 1\alpha_1 + 1\alpha_2 &= 0, \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 &= 0, \end{aligned}$$

která má pouze triviální řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Lineární nezávislost

$1, x, x^2$ jsou lineárně nezávislé

Hledáme $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\forall x \in \mathbb{R} : \alpha 1 + \beta x + \gamma x^2 = 0.$$

Speciálně pro $x \in \{-1, 0, 1\}$ dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\alpha - \beta + \gamma &= 0, \\ \alpha &= 0, \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0,\end{aligned}$$

která má pouze triviální řešení $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

To je ale zároveň řešením původní úlohy, a tedy musí být jejím jediným řešením.

Lineární nezávislost

Příklad: $1 - x + x^2$, $2 + x - 2x^2$ a $1 + 2x - 3x^2$ jsou lineárně závislé

Hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\forall x \in \mathbb{R} : \alpha_1(1 - x + x^2) + \alpha_2(2 + x - 2x^2) + \alpha_3(1 + 2x - 3x^2) = 0,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : 1(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) + x(-\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3) + x^2(\alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3) = 0.$$

Díky lineární nezávislosti 1, x a x^2 dostáváme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Soustava je homogenní, tj. má nulovou pravou stranu, kterou při řešení neopisujeme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := -\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_3 := 4\mathbf{r}_2 + 3\mathbf{r}_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení je nekonečně mnoho.

Lineární kombinace

Lineární kombinace — nový vektor by byl zbytečný

Mějme vektorový prostor \mathcal{V} a nenulové vektory $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathcal{V}$. Řekneme, že \mathbf{v} je lineární kombinací $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, pokud existuje alespoň jedno řešení $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$ rovnice

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{v}.$$

Příklad: $\mathbf{v} := (1, 1)$ je lineární kombinací $\mathbf{v}_1 := (1, -2)$ a $\mathbf{v}_2 := (2, 1)$

Hledáme $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1(1, -2) + \alpha_2(2, 1) = (1, 1)$$

To vede na soustavu

$$\begin{array}{r} 1\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \\ -2\alpha_1 + 1\alpha_2 = 1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2 := 2\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{array} \right)$$

která má řešení $\alpha_1 = -1/5$, $\alpha_2 = 3/5$.

Lineární kombinace

Příklad: $(1, 2, -1)$ je lineární kombinací $(1, 1, 1)$ a $(0, 1, -2)$ a $(2, 1, 4)$

Hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 + 2\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Dostáváme nekonečně mnoho řešení.

Lineární kombinace

Příklad: $1 - x$ není lineární kombinací $1 + x$ a $2 + 2x$

Hledáme $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\forall x \in \mathbb{R} : \alpha_1(1 + x) + \alpha_2(2 + 2x) = 1 - x.$$

Díky lineární nezávislosti 1 a x stačí řešit soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right),$$

která však nemá řešení.

Báze vektorového prostoru

Báze — reprezentace vektorů je fajn

Mějme vektorový prostor \mathcal{V} . Uspořádaná množina nenulových vektorů $F := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$ tvoří **bázi vektorového prostoru** \mathcal{V} , pokud

1. $\mathcal{F} \subset \mathcal{V}$,
2. $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ jsou lineárně nezávislé,
3. libovolný vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ je lineární kombinací $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$, tj.

$$\alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{f}_n = \mathbf{v}.$$

Souřadnice vektoru v bázi, dimenze

Platí, že lineární kombinace je pro bázi vždy jednoznačná. Výsledné koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nazýváme **souřadnice vektoru \mathbf{v} v bázi F** a značíme $[\mathbf{v}]_F := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Platí, že počet bázevých vektorů n vektorového prostoru \mathcal{V} je vždy stejný, říkáme mu **dimenze** \mathcal{V} a značíme $\dim \mathcal{V} := n$.

Báze vektorového prostoru

Kanonické báze

- Sloupce/řádky jednotkové matice \mathbf{I}_n tvoří **kanonickou bázi** \mathbb{R}^n , tj.

$$E := \{\mathbf{e}_1 := (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 := (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n := (0, \dots, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^n.$$

\mathbb{R}^n má dimenzi n , tj. $\dim \mathbb{R}^n = n$.

- Monomiály x^k , $k \in \mathbb{N}_0$, tvoří kanonickou bázi \mathcal{P}_n , tj.

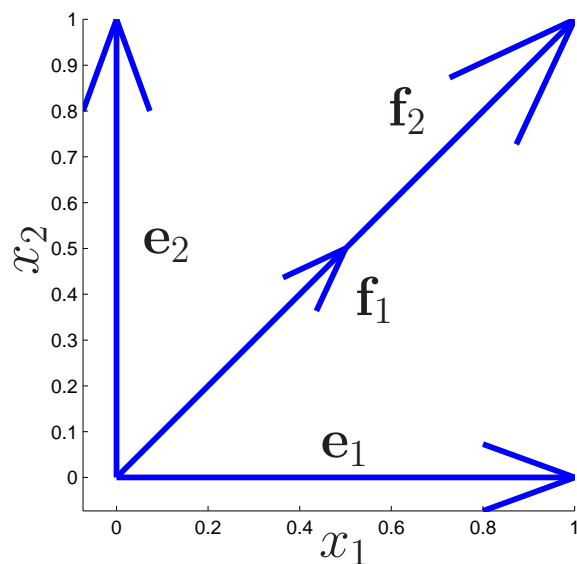
$$E := \{e_1(x) := 1, e_2(x) := x, e_3(x) := x^2, \dots, e_{n+1}(x) := x^n\}.$$

\mathcal{P}_n má dimenzi $n + 1$, tj. $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$.

Báze vektorového prostoru

Hledá se reprezentace vektorů — tzv. báze

generující jednoznačně celý prostor \mathcal{V} , a tedy žádný z vektorů není zbytečný.



- $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ tvoří bázi \mathbb{R}^2 , a tedy generují \mathbb{R}^2 jednoznačně:

$$\forall \mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2.$$

- $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ netvoří bázi \mathbb{R}^2 , nesplňují 2. ani 3.
- $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_2$ netvoří bázi \mathbb{R}^2 , nejsou lin. nezávislé:

$$\forall \mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 = (x_1 - x_2) \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{f}_2.$$

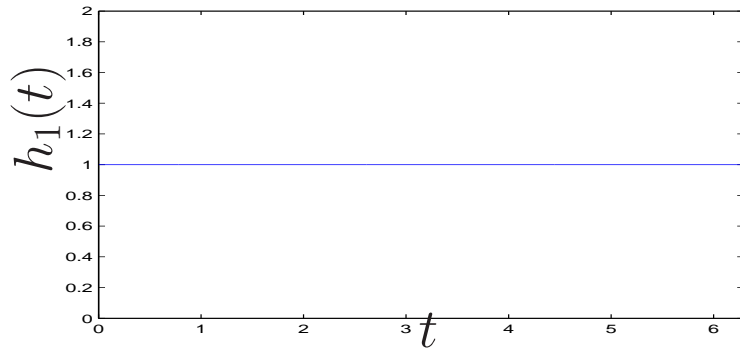
- $\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2$ tvoří bázi \mathbb{R}^2 , a tedy generují \mathbb{R}^2 jednoznačně:

$$\forall \mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = (x_1 - x_2) \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{f}_2.$$

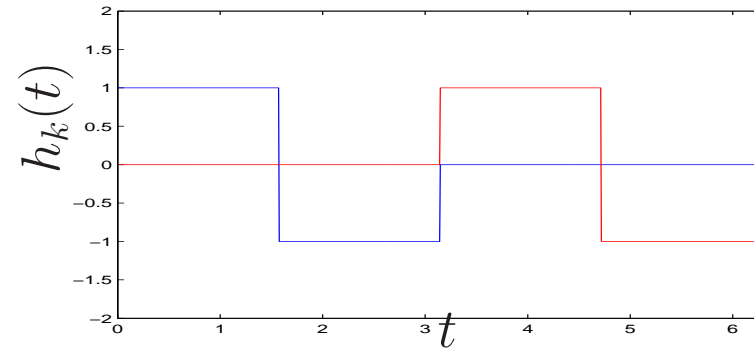
Zpět k motivaci

Haarova (waveletová) báze prostoru \mathcal{F} : $h_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$

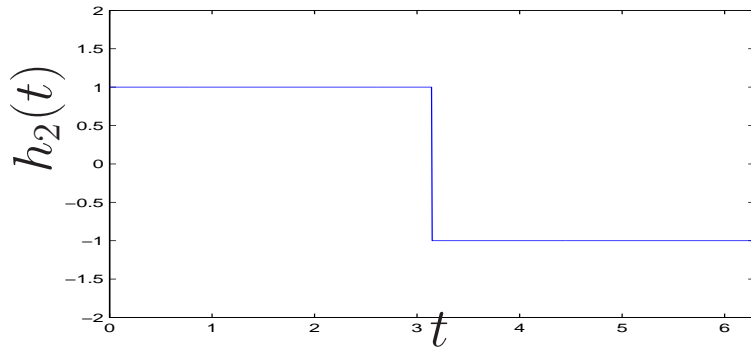
$k = 1$:



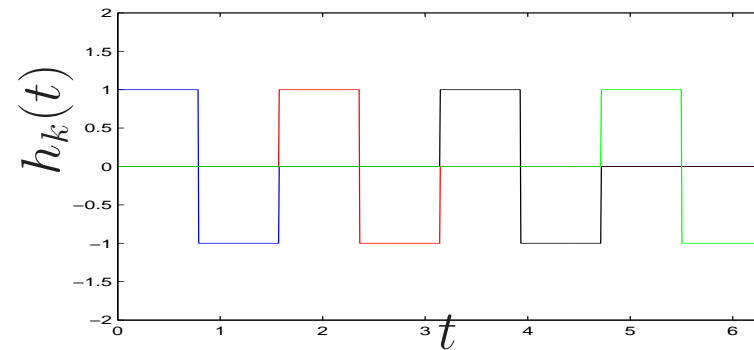
$k = 3, 4$:



$k = 2$:



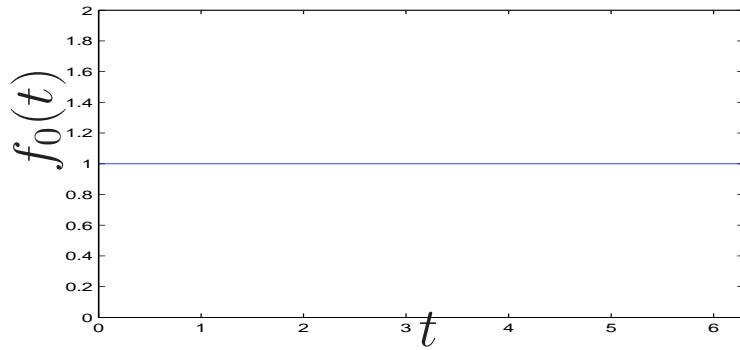
$k = 5, 6, 7, 8$:



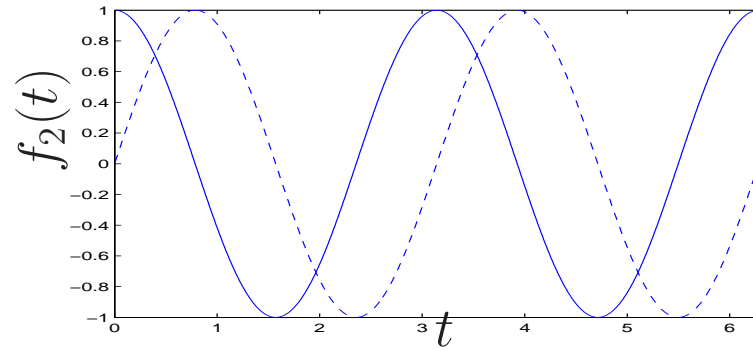
Zpět k motivaci

Fourierova báze prostoru \mathcal{F} : $f_k(t) := e^{ik\omega t}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

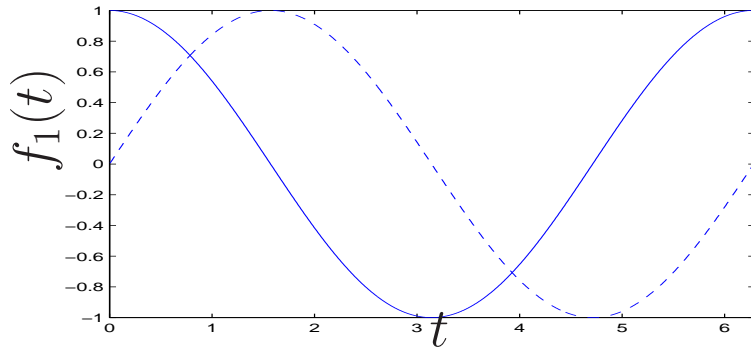
$k = 0$:



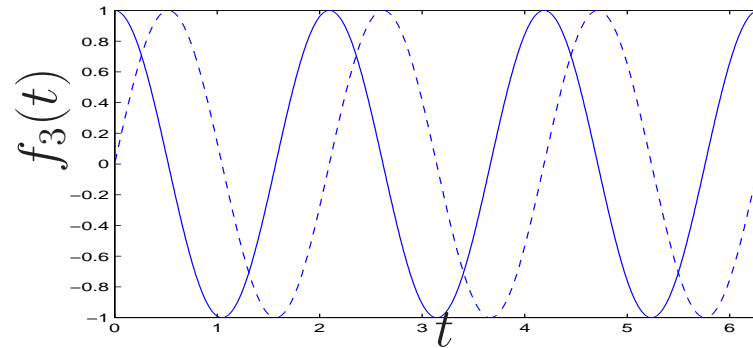
$k = 2$:



$k = 1$:



$k = 3$:



Zpět k motivaci

Reprezentace signálu $s(t) \in \mathcal{F}$ Fourierovými souřadnicemi \hat{s}_k

$$\hat{\mathbf{s}} := [s(t)]_F$$

