Lineární algebra — 3. přednáška: Maticový počet, inverzní matice

Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

http://homel.vsb.cz/~luk76/LA1

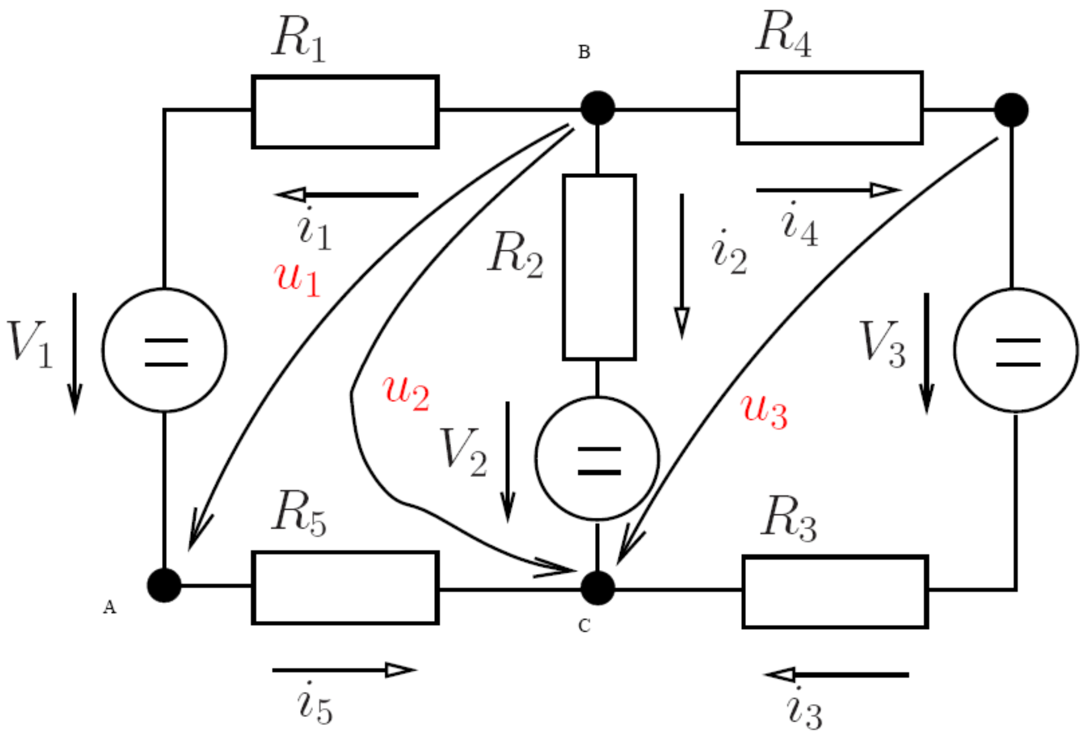
Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Soustavy lin. rovnic s více pravými stranami

Stejnosměrný obvod



Ohmův a Kirchhoffovy zákony

$$i_1 = \frac{u_1 - V_1}{R_1},\ i_2 = \frac{u_2 - V_2}{R_2},\ i_3 = \frac{u_3 - V_3}{R_3},\ i_4 = \frac{u_2 - u_3}{R_4}, i_5 = \frac{u_2 - u_1}{R_5},$$

$$\text{uzel A: } i_1 - i_5 = 0, \quad \text{uzel B: } -i_1 - i_2 - i_4 = 0, \quad \text{uzel C: } i_2 + i_3 + i_5 = 0.$$

Soustavy lin. rovnic s více pravými stranami

Soustava lineárních rovnic

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{u_1-V_1}{R_1} - \frac{u_2-u_1}{R_5} & = & 0 \\
-\frac{u_1-V_1}{R_1} - \frac{u_2-V_2}{R_2} - \frac{u_2-u_3}{R_4} & = & 0 \\
\frac{u_2-V_2}{R_2} + \frac{u_3-V_3}{R_3} + \frac{u_2-u_1}{R_5} & = & 0
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{rcrcrcl}
\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_5}\right)u_1 & - & \frac{1}{R_5}u_2 & & & = & \frac{V_1}{R_1} \\
-\frac{1}{R_1}u_1 & - & \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}\right)u_2 & + & \frac{1}{R_4}u_3 & = & -\frac{V_1}{R_1}-\frac{V_2}{R_2} \\
-\frac{1}{R_5}u_1 & + & \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_5}\right)u_2 & + & \frac{1}{R_3}u_3 & = & \frac{V_2}{R_2}+\frac{V_3}{R_3}
\end{array}
$$

Řešení Gauss–Jordanovou metodou

Gaussova dopředá eliminace + Jordanova zpětná eliminace

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \xrightarrow{\text{Gaussova metoda}} (\mathbf{U}|\mathbf{c}) \xrightarrow{\text{Jordanova metoda}} (\mathbf{I}|\mathbf{x}),$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice (má pouze jedničky na diagonále) a $\mathbf{x}$ je řešení $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$.

Soustavy lin. rovnic s více pravými stranami

a) $R_1 = \cdots = R_5 = 1$, $V_1 = V_2 = V_3 = 1$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u_1 & - & u_2 & & & = & 1 \\ -u_1 & - & 2u_2 & + & u_3 & = & -2 \\ -u_1 & + & 2u_2 & + & u_3 & = & 2 \end{array}$$

Řešení Gauss–Jordanovou metodou

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_1+2\mathbf{r}_3]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_1+2\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-5} & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=3\mathbf{r}_2+5\mathbf{r}_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{16} & 16 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2:=-8\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{r}_2:=-8\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{40} & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 16 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_1:=40\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 80 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 40 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 16 & 16 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$u_1 = u_2 = u_3 = 1$$

Soustavy lin. rovnic s více pravými stranami

b) $R_1 = \cdots = R_5 = 1$**,** $V_1 = 1$**,** $V_2 = V_3 = 0$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2v_1 & - & v_2 & & & = & 1 \\ -v_1 & - & 2v_2 & + & v_3 & = & -1 \\ -v_1 & + & 2v_2 & + & v_3 & = & 0 \end{array}$$

Řešení Gauss–Jordanovou metodou

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_1+2\mathbf{r}_3]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_1+2\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-5} & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=3\mathbf{r}_2+5\mathbf{r}_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{16} & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2:=-8\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{r}_2:=-8\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{40} & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_1:=40\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 80 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 40 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 \end{array}\right)$$

$$v_1 = 5/8,\ v_2 = 1/4,\ v_3 = 1/8$$

Soustavy lin. rovnic s více pravými stranami

a) + b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u_1 & - & u_2 & & & = & 1 \\ -u_1 & - & 2u_2 & + & u_3 & = & -2 \\ -u_1 & + & 2u_2 & + & u_3 & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} 2v_1 & - & v_2 & & & = & 1 \\ -v_1 & - & 2v_2 & + & v_3 & = & -1 \\ -v_1 & + & 2v_2 & + & v_3 & = & 0 \end{array}$$

Řešení Gauss–Jordanovou metodou

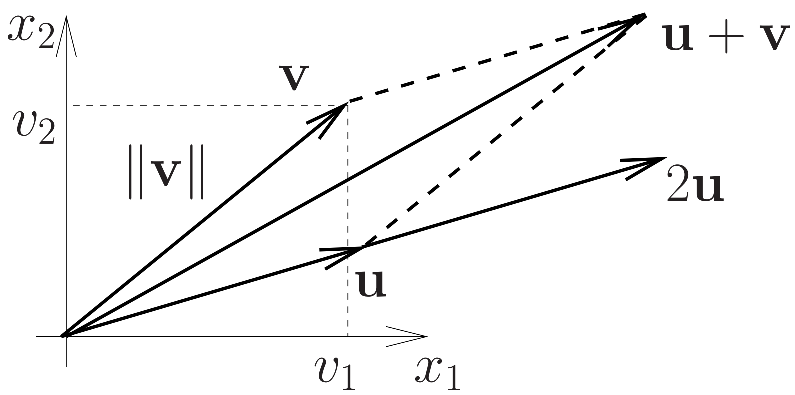
$$\left(\begin{array}{ccc|cc} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_1+2\mathbf{r}_3]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_1+2\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-5} & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=3\mathbf{r}_2+5\mathbf{r}_3]{} \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{16} & 16 & 2 \end{array}\right)$$

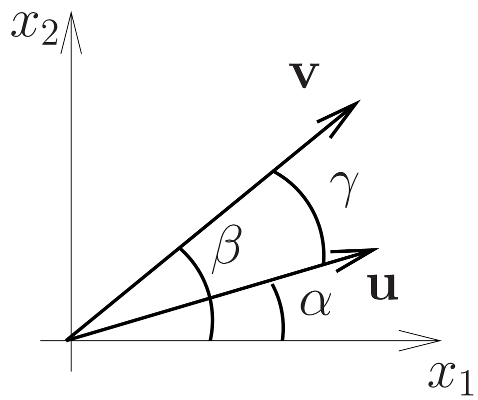
$$\xrightarrow{\mathbf{r}_2:=-8\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{40} & 0 & 40 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & 16 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_1:=40\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 80 & 0 & 0 & 80 & 50 \\ 0 & 40 & 0 & 40 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & 16 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 5/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/8 \end{array}\right)$$

$$u_1 = u_2 = u_3 = 1, \quad v_1 = 5/8,\ v_2 = 1/4,\ v_3 = 1/8$$

Vektorový počet

2d geometrické vektory





Sčítání vektorů

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1, u_2)+(v_1, v_2) := (u_1+v_1, u_2+v_2)$$

Násobení vektoru skalárem

$$\alpha\mathbf{u} := (\alpha u_1, \alpha u_2)$$

Velikost (norma) vektoru

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$$

Úhel mezi dvěma vektory

$$\cos\gamma = \cos(\beta - \alpha) =$$
$$= \cos\beta\cos(-\alpha) - \sin\beta\sin(-\alpha) =$$
$$= \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}\frac{u_1}{\|\mathbf{u}\|} + \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}\frac{u_2}{\|\mathbf{u}\|}$$

Skalární součin

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} := v_1u_1 + v_2u_2$$

Vektorový počet

Zobecnění 2d geometrických vektorů do nd

Mějme $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ a definujme: sčítání vektorů, násobení vektoru skalárem

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} := (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n), \quad \alpha\mathbf{u} := (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n),$$

skalární součin vektorů

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n,$$

normu vektoru

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + \cdots + (v_n)^2}$$

a kosinus úhlu mezi dvěma vektory

$$\cos\gamma := \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}.$$

Vektorový počet

Vlastnosti vektorových operací

Pro $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí např.

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w},$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u},$$

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}, \quad (\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u},$$

$$\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$$

$$0\mathbf{u} = \mathbf{o} := (0, 0, \ldots, 0), \quad 1\mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

Pro skalární součin platí

$$(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \beta\mathbf{v} \cdot \mathbf{w},$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}.$$

Maticový počet

Zobecnění vektorů na matice

Mějme $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Prvek matice označme $(\mathbf{A})_{ij}$.

Definujme sčítání matic

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n} : \ (\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} := (\mathbf{A})_{ij} + (\mathbf{B})_{ij}$$

a násobení matice skalárem

$$\alpha \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} : \ (\alpha \mathbf{A})_{ij} := \alpha (\mathbf{A})_{ij}.$$

Řádkový vektor (řádek) je matice typu $1 \times n$.

Sloupcový vektor (sloupec) je matice typu $m \times 1$.

Maticový počet

Vlastnosti sčítání a násobení skalárem

Pro $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí např.

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C},$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A},$$

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}, \quad (\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A},$$

$$\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A},$$

$$0\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad 1\mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Maticový počet

Násobení řádek krát matice

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathrm{r}} \\ \mathbf{a}_2^{\mathrm{r}} \\ \dots \\ \mathbf{a}_m^{\mathrm{r}} \end{pmatrix} :=$$

$$:= \underbrace{v_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \end{pmatrix} + \cdots + v_m \begin{pmatrix} a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}}_{\text{lineární kombinace řádků}}$$

Maticový kalkul

Násobení řádek krát matice

se hodí ke zkrácenému zápisu elementárních úprav.

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) := \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_1:=\mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right) =: (\widetilde{\mathbf{A}}|\widetilde{\mathbf{b}})$$

$$\mathbf{r}_1 := 1\,\mathbf{r}_1 + 0\,\mathbf{r}_2 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = 1\,\left(1 \;\; 1 \,|\, 1\right) + 0\,\left(1 \;\; -1 \,|\, 0\right) = \left(1 \;\; 1 \,|\, 1\right)$$

$$\mathbf{r}_2 := -1\,\mathbf{r}_1 + 1\,\mathbf{r}_2 : \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = -1\,\left(1 \;\; 1 \,|\, 1\right) + 1\,\left(1 \;\; -1 \,|\, 0\right) = \left(0 \;\; -2 \,|\, -1\right)$$

Což lze (zatím pouze formálně) zapsat do matice

$$\mathbf{E}_{21} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad \text{Nuluje prvek } a_{21}.$$

Maticový počet

Násobení matic — lineární kombinace řádků pravé matice

Násobení matic motivujme Gaussovou eliminací

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{E}_{21}} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)}_{=(\mathbf{A}|\mathbf{b})} = \begin{pmatrix} 1\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\end{array}\right) + 0\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\end{array}\right) \\ -1\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\end{array}\right) + 1\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\end{array}\right) \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right)}_{=(\widetilde{\mathbf{A}}|\widetilde{\mathbf{b}})}$$

Násobení $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ lze tedy definovat takto:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^{\mathrm{r}} \\ \mathbf{b}_2^{\mathrm{r}} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n^{\mathrm{r}} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{b}_1^{\mathrm{r}} + a_{12}\mathbf{b}_2^{\mathrm{r}} + \dots + a_{1n}\mathbf{b}_n^{\mathrm{r}} \\ a_{21}\mathbf{b}_1^{\mathrm{r}} + a_{22}\mathbf{b}_2^{\mathrm{r}} + \dots + a_{2n}\mathbf{b}_n^{\mathrm{r}} \\ \vdots \\ a_{m1}\mathbf{b}_1^{\mathrm{r}} + a_{m2}\mathbf{b}_2^{\mathrm{r}} + \dots + a_{mn}\mathbf{b}_n^{\mathrm{r}} \end{pmatrix}$$

Maticový počet

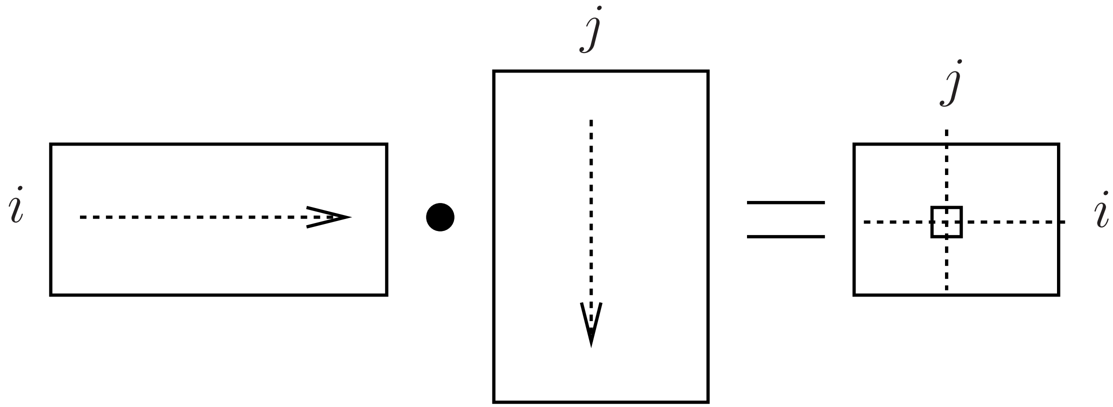
Násobení matic — výpočet pomocí skalárního součinu

Násobení matic $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ počítáme takto:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathrm{r}} \\ \mathbf{a}_2^{\mathrm{r}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^{\mathrm{r}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^{\mathrm{s}} & \mathbf{b}_2^{\mathrm{s}} & \dots & \mathbf{b}_p^{\mathrm{s}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathrm{r}}\cdot\mathbf{b}_1^{\mathrm{s}} & \mathbf{a}_1^{\mathrm{r}}\cdot\mathbf{b}_2^{\mathrm{s}} & \dots & \mathbf{a}_1^{\mathrm{r}}\cdot\mathbf{b}_p^{\mathrm{s}} \\ \mathbf{a}_2^{\mathrm{r}}\cdot\mathbf{b}_1^{\mathrm{s}} & \mathbf{a}_2^{\mathrm{r}}\cdot\mathbf{b}_2^{\mathrm{s}} & \dots & \mathbf{a}_2^{\mathrm{r}}\cdot\mathbf{b}_p^{\mathrm{s}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_m^{\mathrm{r}}\cdot\mathbf{b}_1^{\mathrm{s}} & \mathbf{a}_m^{\mathrm{r}}\cdot\mathbf{b}_2^{\mathrm{s}} & \dots & \mathbf{a}_m^{\mathrm{r}}\cdot\mathbf{b}_p^{\mathrm{s}} \end{pmatrix}$$

Tedy

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})_{ij} = \mathbf{a}_i^{\mathrm{r}}\cdot\mathbf{b}_j^{\mathrm{s}}.$$



Maticový počet

Příklad násobení matic

Po řádcích

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1(1,2,3)+2(4,5,6)\\3(1,2,3)+4(4,5,6)\\5(1,2,3)+6(4,5,6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1,2,3)+(8,10,12)\\(3,6,9)+(16,20,24)\\(5,10,15)+(24,30,36)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&12&15\\19&26&33\\29&40&51\end{pmatrix}$$

nebo po prvcích

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1,2)\cdot(1,4)&(1,2)\cdot(2,5)&(1,2)\cdot(3,6)\\(3,4)\cdot(1,4)&(3,4)\cdot(2,5)&(3,4)\cdot(3,6)\\(5,6)\cdot(1,4)&(5,6)\cdot(2,5)&(5,6)\cdot(3,6)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+8&2+10&3+12\\3+16&6+20&9+24\\5+24&10+30&15+36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&12&15\\19&26&33\\29&40&51\end{pmatrix}$$

Maticový počet

Asociativita násobení — nezáleží na uzávorkování

Pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ a $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p\times s}$:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}.$$

Násobení není komutativní — na pořadí záleží

Pro matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, kde $m \neq p$, není $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ ani definováno.

Pro většinu ostatních matic:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A},$$

např.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 7 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Maticový počet

Transponovaná matice

vznikne záměnou řádků a sloupců, tedy $(\mathbf{A}^T)_{ij} := \mathbf{A}_{ji}$, tedy

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Platí

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T.$$

Maticový počet

Jednotková matice

je čtvercová matice $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definovaná jako $(\mathbf{I}_n)_{ii} := 1$, a pro $i \neq j$: $(\mathbf{I}_n)_{ij} := 0$, tedy

$$\mathbf{I}_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Jednotková matice je maticová analogie čísla 1, tedy pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\mathbf{I}_m \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n = \mathbf{A}.$$

Inverzní matice

Matice Gaussových transformací

Gaussově úpravě

$$\mathbf{r}_i := \sum_{j=i}^{n} \alpha_j \mathbf{r}_j, \text{ kde } \alpha_j \neq 0,$$

odpovídá matice

$$\mathbf{E} := \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{i-1} & \mathbf{o} & \mathbf{0} \\ \mathbf{o} & \alpha_i & (\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \\ \mathbf{0} & \mathbf{o} & \mathbf{I}_{n-i} \end{pmatrix}$$

tak, že

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \xrightarrow{\mathbf{r}_i := \sum_{j=i}^{n} \alpha_j \mathbf{r}_j} (\widetilde{\mathbf{A}}|\widetilde{\mathbf{b}})$$

lze zapsat pomocí maticového násobení takto:

$$\mathbf{E} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = (\widetilde{\mathbf{A}}|\widetilde{\mathbf{b}}).$$

Inverzní matice

Matice inverzní Gaussovy transformace

Ke Gaussově úpravě $\mathbf{r}_i := \sum_{j=i}^{n} \alpha_j \mathbf{r}_j$ kde $\alpha_j \neq 0$, vytvořme inverzní úpravu

$$\mathbf{r}_i := \frac{1}{\alpha_i}\mathbf{r}_i - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\mathbf{r}_j.$$

tak, že

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \xleftarrow{\mathbf{r}_i := (1/\alpha_i)\mathbf{r}_i - \sum_{j=i+1}^{n}(\alpha_j/\alpha_i)\mathbf{r}_j} (\widetilde{\mathbf{A}}|\widetilde{\mathbf{b}}).$$

Tomu odpovídá matice

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{i-1} & \mathbf{o} & \mathbf{0} \\ \mathbf{o} & \frac{1}{\alpha_i} & \left(-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}, \ldots, -\frac{\alpha_n}{\alpha_i}\right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{o} & \mathbf{I}_{n-i} \end{pmatrix}$$

tak, že

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \mathbf{M} \cdot (\widetilde{\mathbf{A}}|\widetilde{\mathbf{b}}).$$

Inverzní matice

Matice inverzní Gaussovy transformace

Platí tedy

$$\mathbf{E} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = (\widetilde{\mathbf{A}}|\widetilde{\mathbf{b}}) \quad \text{a} \quad (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \mathbf{M} \cdot (\widetilde{\mathbf{A}}|\widetilde{\mathbf{b}}).$$

Vynásobme první rovnost zleva maticí $\mathbf{M}$ a na pravé straně použijme druhou rovnost

$$\mathbf{M} \cdot (\mathbf{E} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{b})) = \mathbf{M} \cdot (\widetilde{\mathbf{A}}|\widetilde{\mathbf{b}}) = (\mathbf{A}|\mathbf{b}).$$

Použijme asociativitu násobení vlevo a vlastnost jednotkové matice vpravo

$$(\mathbf{M} \cdot \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \mathbf{I} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{b}).$$

Jelikož tato rovnost platí pro libovolnou volbu $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, musí též platit

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{I}.$$

Takovou matici $\mathbf{M}$ nazveme inverzní maticí k $\mathbf{E}$ a budeme značit

$$\mathbf{E}^{-1} := \mathbf{M}.$$

Inverzní matice

Jiná motivace

Trojčlenka

$$ax = b, \;\; a \neq 0$$
$$x = a^{-1}b$$

Soustava lineárních rovnic

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \;\; \mathbf{A} \text{ regulární}$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

Definice

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Existuje-li matice $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taková, že

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n,$$

pak $\mathbf{X}$ nazýváme maticí inverzní k $\mathbf{A}$, značíme ji $\mathbf{A}^{-1} := \mathbf{X}$ a říkáme, že $\mathbf{A}$ je regulární. Jinak je $\mathbf{A}$ singulární.

Inverzní matice

Výpočet Gauss–Jordanovou metodou — složitost $O(n^4)$

Je-li $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, pak platí

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n.$$

Hledáme matici $\mathbf{X} := (\mathbf{x}_1^{\mathrm{s}}, \mathbf{x}_2^{\mathrm{s}}, \ldots, \mathbf{x}_n^{\mathrm{s}}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tak, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x}_1^{\mathrm{s}}, \mathbf{x}_2^{\mathrm{s}}, \ldots, \mathbf{x}_n^{\mathrm{s}}) = (\mathbf{i}_1^{\mathrm{s}}, \mathbf{i}_2^{\mathrm{s}}, \ldots, \mathbf{i}_n^{\mathrm{s}}) = \mathbf{I}_n.$$

To je ale soustava s n pravými stranami

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1^{\mathrm{s}} = \mathbf{i}_1^{\mathrm{s}}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_2^{\mathrm{s}} = \mathbf{i}_2^{\mathrm{s}}, \quad \ldots, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_n^{\mathrm{s}} = \mathbf{i}_n^{\mathrm{s}}.$$

Soustavu vyřešíme Gauss–Jordanovou metodou

$$(\mathbf{A}|\mathbf{i}_1^{\mathrm{s}}, \mathbf{i}_2^{\mathrm{s}}, \ldots, \mathbf{i}_n^{\mathrm{s}}) = (\mathbf{A}|\mathbf{I}_n) \xrightarrow{\text{Gaussova metoda}} \left(\mathbf{U}|\widetilde{\mathbf{X}}\right) \xrightarrow{\text{Jordanova metoda}} (\mathbf{I}_n|\mathbf{X})\,.$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X}$$

Inverzní matice

Příklad inverze matice elektrického obvodu

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_1+2\mathbf{r}_3]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_1+2\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-5} & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=3\mathbf{r}_2+5\mathbf{r}_3]{}$$

$$\xrightarrow[\mathbf{r}_3:=3\mathbf{r}_2+5\mathbf{r}_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{16} & 8 & 6 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2:=-8\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{40} & 0 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & 8 & 6 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_1:=40\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{r}_1:=40\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 80 & 0 & 0 & 40 & -10 & 10 \\ 0 & 40 & 0 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & 8 & 6 & 10 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 3/8 & 5/8 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 & 1/8 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice

Příklad inverze matice elektrického obvodu

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2u_1 & - & u_2 & & & = & 1 \\ -u_1 & - & 2u_2 & + & u_3 & = & -2 \\ -u_1 & + & 2u_2 & + & u_3 & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcl} 2v_1 & - & v_2 & & & = & 1 \\ -v_1 & - & 2v_2 & + & v_3 & = & -1 \\ -v_1 & + & 2v_2 & + & v_3 & = & 0 \end{array}$$

Při znalosti inverzní matice lze řešení soustavy lin. rovnic spočítat

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b},$$

Obě řešení lze tedy spočítat součinem dvou matic

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 & 1/8 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 3/8 & 5/8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5/8 \\ 1 & 1/4 \\ 1 & 1/8 \end{pmatrix}.$$