Lineární algebra — 2. přednáška: Gaussova eliminace

Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

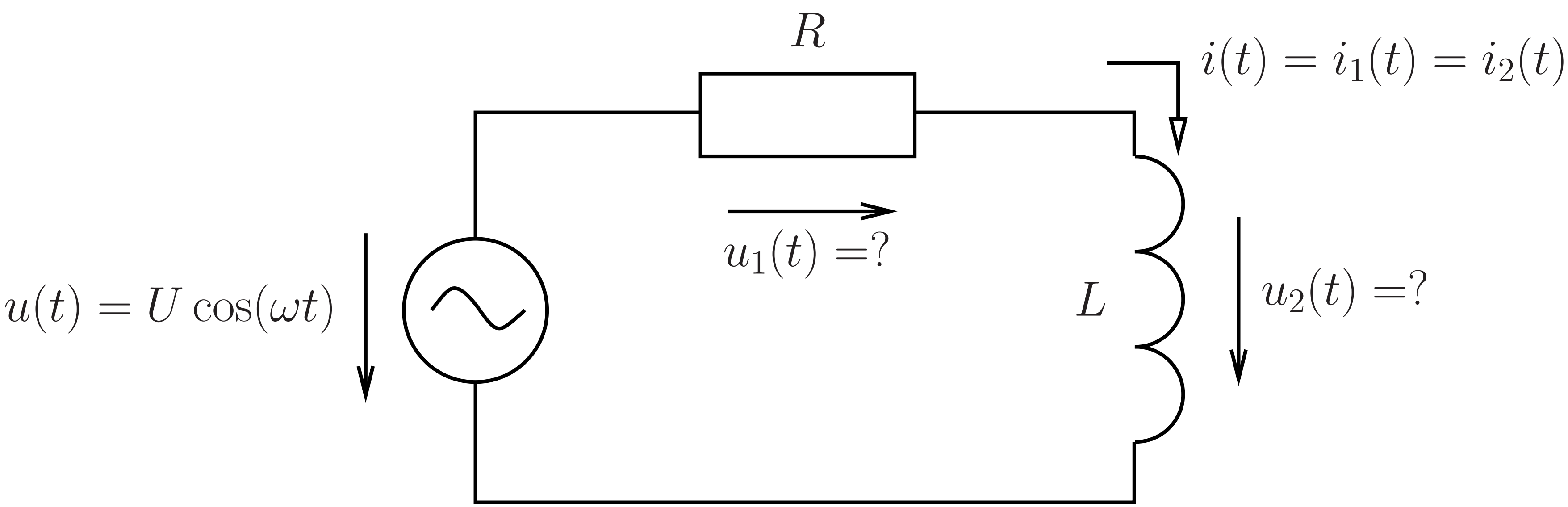
email: dalibor.lukas@vsb.cz

http://homel.vsb.cz/~luk76/LA1

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

Komplexní čísla v analýze obvodů

Střídavý elektrický obvod



Kirchhoffovy zákony, Ohmův a Faradayův zákon

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad \begin{aligned} u_1(t) + u_2(t) &= U\cos(\omega t), \\ i_1(t) - i_2(t) &= 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_1(t) &= R\,i_1(t) = RI\,\cos(\omega t + \varphi), \\ u_2(t) &= L\,i_2'(t) = \omega L\,I\,(-\sin(\omega t + \varphi)) \end{aligned}$$

Komplexní čísla v analýze obvodů

Řešení bez komplexních čísel

$\forall t \in \mathbb{R}:$

$$u_1(t) + u_2(t) = U\ \cos(\omega t)$$

$$RI\cos(\omega t + \varphi) - \omega LI\sin(\omega t + \varphi) = U\ \cos(\omega t)$$

$$RI\cos(\omega t + \varphi) - \omega LI\cos(\omega t + \varphi - \pi/2) = U\ \cos(\omega t)$$

$$RI\left(\cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\varphi)\right) - \omega LI\left(\sin(\omega t)\cos(\varphi) + \cos(\omega t)\sin(\varphi)\right) = U\cos(\omega t)$$

Definujme kosinovou a sinovou složku proudu

$$I^{\mathrm{c}} := I\ \cos(\varphi), \quad I^{\mathrm{s}} := I\ \sin(\varphi),$$

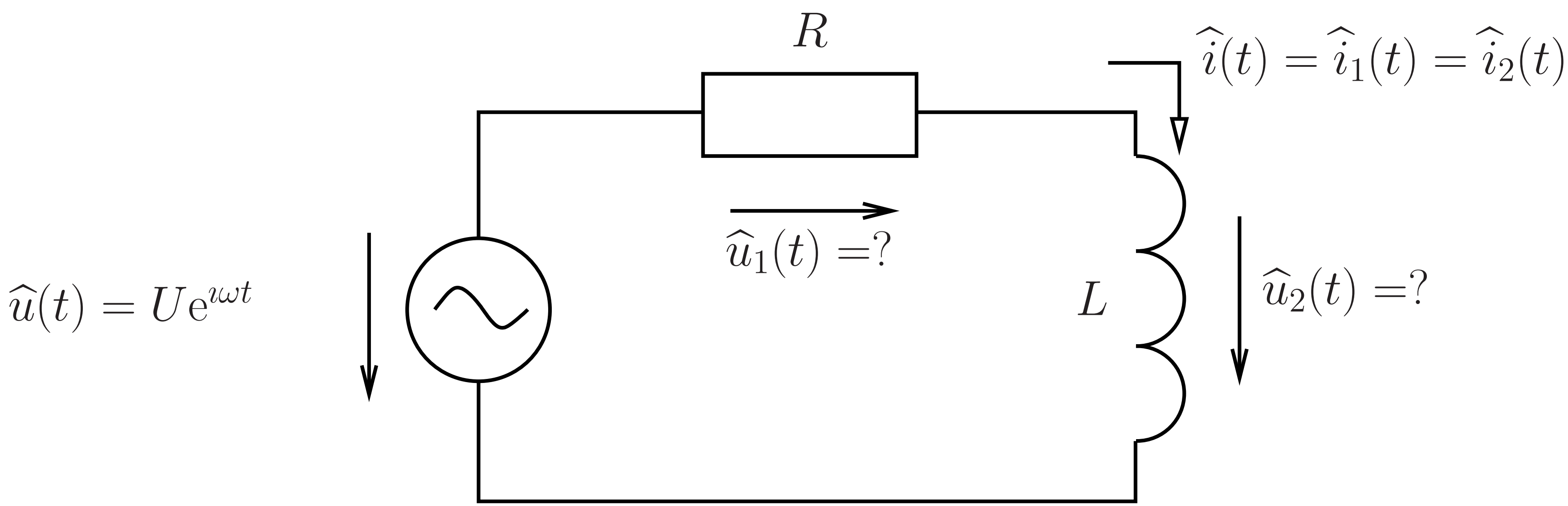
pak zbývá vyřešit dvě lineární rovnice o dvou neznámých, nebo jednu komplexní:

$$\begin{aligned} RI^{\mathrm{c}} - \omega LI^{\mathrm{s}} &= U \\ -RI^{\mathrm{s}} - \omega LI^{\mathrm{c}} &= 0 \quad / \cdot (-\imath) \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{(R + \imath\omega L)\underbrace{(I^{\mathrm{c}} + \imath I^{\mathrm{s}})}_{=:\widehat{I}} = U}$$

Násobení komplexním číslem $\imath$ realizuje rotaci o $\pi/2$.

Komplexní čísla v analýze obvodů

Střídavý elektrický obvod



Kirchhoffovy zákony, Ohmův a Faradayův zákon

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \begin{aligned} \widehat{u}_1(t) + \widehat{u}_2(t) &= U\,\mathrm{e}^{\imath\omega t}, \\ \widehat{I}_1\,\mathrm{e}^{\imath\omega t} - \widehat{I}_2\,\mathrm{e}^{\imath\omega t} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \widehat{u}_1(t) &= R\,\widehat{i}_1(t) = R\widehat{I}\,\mathrm{e}^{\imath\omega t}, \\ \widehat{u}_2(t) &= L\,\widehat{i}_2'(t) = \imath\omega L\,\widehat{I}\,\mathrm{e}^{\imath\omega t} \end{aligned}$$

Komplexní čísla v analýze obvodů

Řešení s komplexními čísly

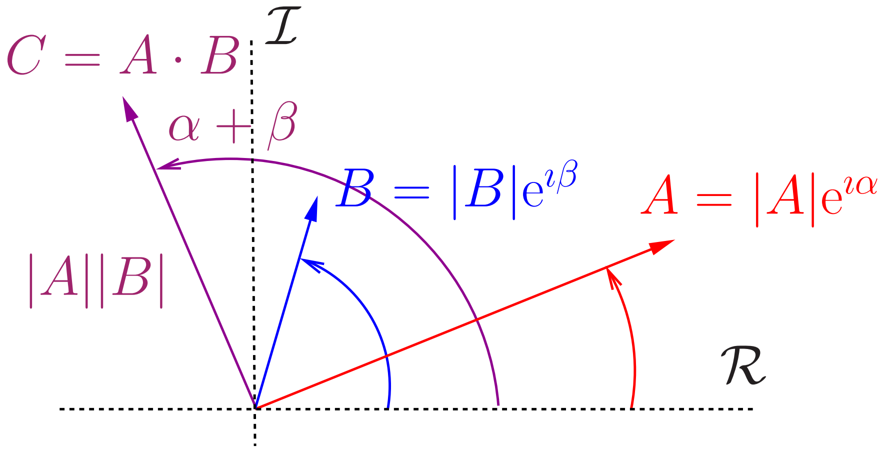
$\forall t \in \mathbb{R}:$

$$\widehat{u}_1(t) + \widehat{u}_2(t) = U\,\mathrm{e}^{\imath\omega t}$$

$$R\widehat{I}\,\mathrm{e}^{\imath\omega t} + \imath\omega L\widehat{I}\,\mathrm{e}^{\imath\omega t} = U\,\mathrm{e}^{\imath\omega t}$$

$$\boxed{(R + \imath\omega L)\,\widehat{I} = U}$$

Násobení komplexním číslem realizuje násobení modulů a rotaci



Gaussova eliminace

Soustava 2x2: středoškolské řešení

Vyjádříme první proměnnou z první rovnice a dosadíme do druhé.

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{array} \iff \begin{array}{rcrcl} x_1 & & & = & 1 - x_2 \\ (1 - x_2) & - & x_2 & = & 0 \end{array} \iff \begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 - x_2 \\ -2x_2 & = & -1 \end{array}$$

Soustava 2x2: vysokoškolské řešení

Odečteme první rovnici od druhé; říkejme tomu Gaussova eliminace.

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{array} \iff \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ (x_1 - x_1) & + & (-x_2 - x_2) & = & (0 - 1) \end{array} \iff \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 1 \\ -2x_2 & = & -1 \end{array}$$

Soustava 2x2: ještě vysokoškolštější řešení

Gaussovu eliminaci provádíme pouze na rozšířené matici soustavy.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ (1-1) & (-1-1) & (0-1) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Gaussova eliminace

Krok 1. Gaussova eliminace

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ (1-1) & (-1-1) & (0-1) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Krok 2. Zpětné dosazování

Z druhé rovnice vypočteme

$$x_2 = \frac{1}{2},$$

zpětně dosadíme do první rovnice a dopočteme

$$x_1 = 1 - x_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Vektor řešení je

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Gaussova eliminace

Soustava 3x3: středoškolské řešení

1.1. Eliminace x_1: Vyjádříme x_1 z první rovnice a dosadíme do druhé a třetí.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & & & = & 1 - x_2 - x_3 \\ & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

1.2. Eliminace x_2: Vyjádříme x_2 z druhé rovnice a dosadíme do třetí.

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & & & = & 1 - x_2 - x_3 \\ & x_2 & & = & (-2 - x_3)/(-2) \\ & & -\ (3/2)x_3 & = & -2 \end{array}$$

2. Zpětné dosazování: Vypočteme x_3 ze třetí rovnice, dosadíme ...

$$x_3 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = (-2 - x_3)/(-2) = -\frac{10}{3}/(-2) = \frac{5}{3}, \quad x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 1 - \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = -2.$$

Gaussova eliminace

Krok 1. Gaussova eliminace

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Ekvivalentními úpravami rozšířené matice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_3:=2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

dostáváme jednodušší soustavu rovnic, která má stejné řešení jako ta původní.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ & & & - & 3x_3 & = & -4 \end{array}$$

Prvky $\boxed{1}$ a $\boxed{-2}$ nazýváme pivoty. Pomocí pivotů nulujeme sloupec pod nimi.

Gaussova eliminace

Krok 2. Zpětné dosazování

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ & & & - & 3x_3 & = & -4 \end{array}$$

Vypočteme x_3 ze třetí rovnice

$$x_3 = \frac{4}{3}.$$

Dosadíme x_3 do druhé rovnice a vypočteme x_2

$$x_2 = \frac{-2 - x_3}{-2} = \frac{-2 - \frac{4}{3}}{-2} = \frac{5}{3}.$$

Dosadíme x_2 a x_3 do první rovnice a vypočteme x_1

$$x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 1 - \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = -2.$$

Vektor řešení je $\mathbf{x} = (-2, 5/3, 4/3)$.

Gaussova eliminace

Algoritmus

1. Eliminace prvního sloupce pomocí prvního pivota

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{\times} & \times & \dots & \times & \times & \times \\ \times & \times & \dots & \times & \times & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \times & \times & \dots & \times & \times & \times \\ \times & \times & \dots & \times & \times & \times \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_n := \alpha_{n1}\,\mathbf{r}_n + \beta_{n1}\,\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 := \alpha_{21}\,\mathbf{r}_2 + \beta_{21}\,\mathbf{r}_1,\ \dots,} \qquad \approx (n-1)^2 \text{ násobení}$$

2. Eliminace druhého sloupce pomocí druhého pivota

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \times & \times & \dots & \times & \times & \times \\ 0 & \boxed{\times} & \dots & \times & \times & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \times & \dots & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \dots & \times & \times & \times \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_n := \alpha_{n2}\mathbf{r}_n + \beta_{n1}\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_3 := \alpha_{32}\,\mathbf{r}_3 + \beta_{32}\,\mathbf{r}_2,\ \dots,} \qquad \approx (n-2)^2 \text{ násobení}$$

...

Gaussova eliminace

Algoritmus

$(n-1)$. Eliminace předposledního sloupce pomocí předposledního pivota

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \times & \times & \dots & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \dots & \times & \times & \times \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \boxed{\times} & \times & \times \\ 0 & 0 & \dots & \times & \times & \times \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_n := \alpha_{n,n-1}\,\mathbf{r}_n + \beta_{n,n-1}\,\mathbf{r}_{n-1}} \qquad \approx 1^2 \text{ násobení}$$

Ekvivalentní rozšířená matice soustavy v horním trojúhelníkovém tvaru:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \times & \times & \dots & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \dots & \times & \times & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \times & \times \end{array}\right)$$

Celkový počet aritmetických operací (násobení) $\approx \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \approx \int_1^{n-1} x^2\,dx = O(n^3)$

Gaussova eliminace

Elementární řádkové úpravy

- Přenásobení řádku nenulovým číslem,
- přičtení jednoho řádku k jinému,
- záměna (permutace) dvou řádků.

Gaussova eliminace se záměnou řádků

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \dots$$

Gaussova eliminace — lze šipku nahradit rovnítkem?

Minule: matice krát sloupec = sloupec

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \left(\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\mathbf{a}_1^{\mathrm{s}} \;\; \mathbf{a}_2^{\mathrm{s}} \;\; \dots \;\; \mathbf{a}_n^{\mathrm{s}}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} :=$$

$$:= \underbrace{x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}}_{\text{lineární kombinace sloupců}}$$

To lze spočítat i pomocí skalárního součinu vektorů $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathrm{r}} \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^{\mathrm{r}} \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

Gaussova eliminace — lze šipku nahradit rovnítkem?

Podobně: řádek krát matice = řádek

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{\mathrm{r}}_1 \\ \mathbf{a}^{\mathrm{r}}_2 \\ \dots \\ \mathbf{a}^{\mathrm{r}}_m \end{pmatrix} :=$$

$$:= \underbrace{v_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \end{pmatrix} + \dots + v_m \begin{pmatrix} a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}}_{\text{lineární kombinace řádků}}$$

To lze spočítat pomocí skalárního součinu vektorů takto:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} = \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}^{\mathrm{s}}_1,\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{a}^{\mathrm{s}}_2,\ \dots\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{a}^{\mathrm{s}}_n\right)$$

Gaussova eliminace — lze šipku nahradit rovnítkem?

Soustava 2x2

$$
\begin{aligned}
x_1 &+ x_2 &= 1\\
x_1 &- x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_1:=\mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right)
$$

Zápis elementárních úprav do vektorů a matice

$$
\mathbf{r}_1 := 1\,\mathbf{r}_1 + 0\,\mathbf{r}_2 : \quad (1 \;\; 0) \cdot \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = 1\,(1 \;\; 1 \,|\, 1) + 0\,(1 \;\; -1 \,|\, 0) = (1 \;\; 1 \,|\, 1)
$$

$$
\mathbf{r}_2 := -1\,\mathbf{r}_1 + 1\,\mathbf{r}_2 : \quad (-1 \;\; 1) \cdot \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = -1\,(1 \;\; 1 \,|\, 1) + 1\,(1 \;\; -1 \,|\, 0) = (0 \;\; -2 \,|\, -1)
$$

$$
\mathbf{E}_{21} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad \text{Nuluje prvek } a_{21}.
$$

Gaussova eliminace — lze šipku nahradit rovnítkem?

Soustava 2x2

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{array}$$

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) := \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_1 := \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right) =: (\mathbf{U}|\mathbf{c})$$

Ano, lze pomocí násobení matic.

$$\mathbf{E}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} : \quad \mathbf{E}_{21} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = (\mathbf{U}|\mathbf{c})$$

Násobení matic:

$$\mathbf{E}_{21} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) := \begin{pmatrix} 1(1,1|1) + 0(1,-1|0) \\ -1(1,1|1) + 1(1,-1|0) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right) = (\mathbf{U}|\mathbf{c})$$

Gaussova eliminace

Gaussova eliminace pomocí násobení matic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_3:=2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{E}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_{32} \cdot \left\{ \mathbf{E}_{31} \cdot \left[\mathbf{E}_{21} \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \right] \right\} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

Gaussova eliminace

Násobení matic je asociativní — nezáleží na uzávorkování

$$\mathbf{E}_{32} \cdot \{\mathbf{E}_{31} \cdot [\mathbf{E}_{21} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{b})]\} = (\mathbf{U}|\mathbf{c})$$

$$\underbrace{\{\mathbf{E}_{32} \cdot [\mathbf{E}_{31} \cdot \mathbf{E}_{21}]\}}_{=:\widetilde{\mathbf{L}}} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = (\mathbf{U}|\mathbf{c})$$

kde

$$\widetilde{\mathbf{L}} = \mathbf{E}_{32} \cdot \{\mathbf{E}_{31} \cdot \mathbf{E}_{21}\} = \mathbf{E}_{32} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \mathbf{E}_{32} \cdot \begin{pmatrix} 1(1,0,0) + 0(-1,1,0) + 0(0,0,1) \\ 0(1,0,0) + 1(-1,1,0) + 0(0,0,1) \\ -1(1,0,0) + 0(-1,1,0) + 1(0,0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1(1,0,0) + 0(-1,1,0) + 0(-1,0,1) \\ 0(1,0,0) + 1(-1,1,0) + 0(-1,0,1) \\ 0(1,0,0) + 1(-1,1,0) + 2(-1,0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Gaussova eliminace

Gaussova eliminace = LU rozklad

Ekvivalentní úpravy

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \longrightarrow (\mathbf{U}|\mathbf{c})$$

lze zapsat do matice $\widetilde{\mathbf{L}}$ tak, že

$$\widetilde{\mathbf{L}} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = (\mathbf{U}|\mathbf{c})\,.$$

Pokud jsme během Gaussovy eliminace neprováděli záměnu řádků, pak

$$\widetilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} \times & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \times & \times & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \times & \times & \dots & \times & 0 \\ \times & \times & \dots & \times & \times \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \times & \times & \dots & \times & \times \\ 0 & \times & \dots & \times & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \times & \times \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \times \end{pmatrix}$$

jsou dolní (lower), resp. horní (upper) trojúhelníková matice.

Gaussova eliminace

0 řešení

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Soustava nemá řešení, viz druhá rovnice:

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 = -2.$$

Gaussova eliminace

∞ řešení

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -2 \end{array}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení.

Gaussova eliminace

∞ řešení: parametrizace, zpětné dosazování

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -2 \end{array}$$

Za přebytečné neznámé zavedeme parametry

$$x_3 =: t \in \mathbb{R}$$

a provedeme zpětné dosazování

$$x_2 = (-2 - x_3)/(-2) = 1 + \frac{1}{2}t, \quad x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 1 - (1 + t/2) - t = -\frac{3}{2}t.$$

Vektor řešení je

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jedná se o (parametrickou) rovnici přímky v $\mathbb{R}^3$.

Gaussova eliminace

2x2 soustava s komplexními čísly

$$\begin{array}{rcrcl} \imath\, x_1 & - & (1+\imath)\, x_2 & = & 1-\imath \\ x_1 & - & \imath\, x_2 & = & \imath \end{array}$$

Krok 1. Gaussova eliminace

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \imath & , & -1-\imath & 1-\imath \\ 1 & , & -\imath & \imath \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2 := \imath\,\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \imath & , & -1-\imath & 1-\imath \\ 0 & , & 2+\imath & -2+\imath \end{array}\right)$$

kde

$$\imath\,(-\imath) - (-1-\imath) = 1 + 1 + \imath = 2 + \imath, \quad \imath\,\imath - (1-\imath) = -1 - 1 + \imath = -2 + \imath.$$

Krok 2. Zpětné dosazování

$$x_2 = \frac{-2+\imath}{2+\imath} \cdot \frac{2-\imath}{2-\imath} = \frac{-4+1+2\imath+2\imath}{4+1} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\imath$$

$$x_1 = \frac{1-\imath+(1+\imath)(-3/5+(4/5)\imath)}{\imath} = \frac{5-5\imath+(-3-4-3\imath+4\imath)}{5\imath} = \frac{-2-4\imath}{5\imath} \cdot \frac{\imath}{\imath} = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\imath.$$