Lineární algebra — 12. přednáška: Zkouška nanečisto

Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

http://homel.vsb.cz/~luk76/LA1

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zkouška z Lineární algebry — verze X

3 příklady ze zákl. sady

1. Řešte soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} (1-\imath)x + (1-2\imath)y &= 1-\imath \\ \imath x - 2y &= \imath \end{aligned}$$

2. Rozhodněte, zda jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

$$\mathbf{u} = (-2, -0, -1),\ \mathbf{v} = (0, 1, 1), \mathbf{w} = (0, -2, -2).$$

3. Klasifikujte následující matici kvadratické formy:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zkouška z Lineární algebry — verze X

2 př. z rozš. sady, 1 pro ty, co pochopili, a 1 z teorie

4. Určete bázi a dimenzi V

$$V = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 | a + b + c = 0 \wedge a + 2b + c = 0\}.$$

5. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\mathcal{A}(1 + x) = (1, -1), \quad , \mathcal{A}(1 + x + x^2) = (1, 2), \quad \mathcal{A}(x) = (0, -1).$$

   Nalezněte alespoň jeden $p \in \mathcal{P}_2$ takový, že $\mathcal{A}(p) = (2, 3)$.

6. a) Nakreslete libovolné nenulové vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ tak, že $\mathbf{c}$ je lin. kombinací $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.
   b) Klasifikujte kv. formu Q na P_2, když víte, že $Q(1 + x) = 1$ a $Q(x^2) = -2$.

7. Teoretickou otázku neprozradím. Pouze naznačím.

Tematické okruhy

- Soustavy lineárních rovnic, maticový počet, inverzní matice
- Vektorové prostory, báze, dimenze, řešitelnost soustav
- Lineární zobrazení a souvislost s maticemi, princip superpozice
- Bilineární formy a souvislost s maticemi, rozklad, kongruence
- Kvadratické formy a souvislost s maticemi, klasifikace
- Ortogonalita, ortogonální matice, metoda nejmenších čtverců
- Výpočet determinantů
- Vlastní čísla a vektory, charakteristická rovnice, diagonalizace

Soustavy lineárních rovnic, maticový počet, inverzní matice

Zákl. př. 1: 2x2 soustava s komplexními čísly

$$\begin{array}{rcrcl} \imath\, x_1 & - & (1+\imath)\, x_2 & = & 1-\imath \\ x_1 & - & \imath\, x_2 & = & \imath \end{array}$$

Krok 1. Gaussova eliminace

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \imath & , & -1-\imath & 1-\imath \\ 1 & , & -\imath & \imath \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2 := \imath\, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \imath & , & -1-\imath & 1-\imath \\ 0 & , & 2+\imath & -2+\imath \end{array}\right)$$

kde

$$\imath\,(-\imath) - (-1-\imath) = 1+1+\imath = 2+\imath, \quad \imath\,\imath - (1-\imath) = -1-1+\imath = -2+\imath.$$

Krok 2. Zpětné dosazování

$$x_2 = \frac{-2+\imath}{2+\imath} \cdot \frac{2-\imath}{2-\imath} = \frac{-4+1+2\imath+2\imath}{4+1} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\imath$$

$$x_1 = \frac{1-\imath+(1+\imath)(-3/5+(4/5)\imath)}{\imath} = \frac{5-5\imath+(-3-4-3\imath+4\imath)}{5\imath} = \frac{-2-4\imath}{5\imath} \cdot \frac{\imath}{\imath} = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\imath.$$

Soustavy lineárních rovnic, maticový počet, inverzní matice

Zákl. př. 2: 3x3 soustava lin. rovnic s dvěma pravými stranami

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2u_1 & - & u_2 & & & = & 1 \\ -u_1 & - & 2u_2 & + & u_3 & = & -2 \\ -u_1 & + & 2u_2 & + & u_3 & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcl} 2v_1 & - & v_2 & & & = & 1 \\ -v_1 & - & 2v_2 & + & v_3 & = & -1 \\ -v_1 & + & 2v_2 & + & v_3 & = & 0 \end{array}$$

Řešení Gauss–Jordanovou metodou

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_1+2\mathbf{r}_3]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_1+2\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-5} & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=3\mathbf{r}_2+5\mathbf{r}_3]{} \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{16} & 16 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathbf{r}_2:=-8\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{40} & 0 & 40 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & 16 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_1:=40\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 80 & 0 & 0 & 80 & 50 \\ 0 & 40 & 0 & 40 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & 16 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 5/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/8 \end{array}\right)$$

$$u_1 = u_2 = u_3 = 1, \quad v_1 = 5/8, \ v_2 = 1/4, \ v_3 = 1/8$$

Soustavy lineárních rovnic, maticový počet, inverzní matice

Rozš. př. 1: Řešte soustavu a parametrizujte řešení.

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 &- x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 &+ 3x_2 = 3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení. Za přebytečné neznámé zavedeme parametry

$$x_3 =: t \in \mathbb{R}$$

a provedeme zpětné dosazování

$$x_2 = (-2 - x_3)/(-2) = 1 + \frac{1}{2}t, \quad x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 1 - (1 + t/2) - t = -\frac{3}{2}t.$$

Soustavy lineárních rovnic, maticový počet, inverzní matice

Rozš. př. 2: Vypočtěte inverzní matici k $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_1+2\mathbf{r}_3]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_1+2\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-5} & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=3\mathbf{r}_2+5\mathbf{r}_3]{}$$

$$\xrightarrow[\mathbf{r}_3:=3\mathbf{r}_2+5\mathbf{r}_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{16} & 8 & 6 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2:=-8\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{40} & 0 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & 8 & 6 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_1:=40\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{r}_1:=40\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 80 & 0 & 0 & 40 & -10 & 10 \\ 0 & 40 & 0 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & 8 & 6 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 3/8 & 5/8 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 & 1/8 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}$$

Soustavy lineárních rovnic, maticový počet, inverzní matice

Gaussova eliminace = LU rozklad

Ekvivalentní úpravy

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \longrightarrow (\mathbf{U}|\mathbf{c})$$

lze zapsat do matice $\widetilde{\mathbf{L}}$ tak, že

$$\widetilde{\mathbf{L}} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = (\mathbf{U}|\mathbf{c})\,.$$

Pokud jsme během Gaussovy eliminace neprováděli záměnu řádků, pak

$$\widetilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} \times & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \times & \times & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \times & \times & \dots & \times & 0 \\ \times & \times & \dots & \times & \times \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \times & \times & \dots & \times & \times \\ 0 & \times & \dots & \times & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \times & \times \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \times \end{pmatrix}$$

jsou dolní (lower), resp. horní (upper) trojúhelníková matice.

Soustavy lineárních rovnic, maticový počet, inverzní matice

Výpočet inverzní matice Gauss–Jordanovou metodou

Je-li $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, pak platí

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n.$$

Hledáme matici $\mathbf{X} := (\mathbf{x}_1^{\mathrm{s}}, \mathbf{x}_2^{\mathrm{s}}, \ldots, \mathbf{x}_n^{\mathrm{s}}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tak, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x}_1^{\mathrm{s}}, \mathbf{x}_2^{\mathrm{s}}, \ldots, \mathbf{x}_n^{\mathrm{s}}) = (\mathbf{i}_1^{\mathrm{s}}, \mathbf{i}_2^{\mathrm{s}}, \ldots, \mathbf{i}_n^{\mathrm{s}}) = \mathbf{I}_n.$$

To je ale soustava s n pravými stranami

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1^{\mathrm{s}} = \mathbf{i}_1^{\mathrm{s}}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_2^{\mathrm{s}} = \mathbf{i}_2^{\mathrm{s}}, \quad \ldots, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_n^{\mathrm{s}} = \mathbf{i}_n^{\mathrm{s}}.$$

Soustavu vyřešíme Gauss–Jordanovou metodou

$$(\mathbf{A}|\mathbf{i}_1^{\mathrm{s}}, \mathbf{i}_2^{\mathrm{s}}, \ldots, \mathbf{i}_n^{\mathrm{s}}) = (\mathbf{A}|\mathbf{I}_n) \xrightarrow{\text{Gaussova metoda}} \left(\mathbf{U}|\widetilde{\mathbf{X}}\right) \xrightarrow{\text{Jordanova metoda}} (\mathbf{I}_n|\mathbf{X})\,.$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X}$$

Tematické okruhy

- Soustavy lineárních rovnic, maticový počet, inverzní matice
- Vektorové prostory, báze, dimenze, řešitelnost soustav
- Lineární zobrazení a souvislost s maticemi, princip superpozice
- Bilineární formy a souvislost s maticemi, rozklad, kongruence
- Kvadratické formy a souvislost s maticemi, klasifikace
- Ortogonalita, ortogonální matice, metoda nejmenších čtverců
- Výpočet determinantů
- Vlastní čísla a vektory, charakteristická rovnice, diagonalizace

Vektorové prostory, báze, dimenze, řešitelnost soustav

Rozš. př. 5: Jsou $1 - x + x^2$, $2 + x - 2x^2$ a $1 + 2x - 3x^2$ lineárně závislé?

Hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \alpha_1(1 - x + x^2) + \alpha_2(2 + x - 2x^2) + \alpha_3(1 + 2x - 3x^2) = 0,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad 1(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) + x(-\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3) + x^2(\alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3) = 0.$$

Díky lineární nezávislosti 1, x a x^2 dostáváme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0, \\ -\alpha_1 & + & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 0, \\ \alpha_1 & - & 2\alpha_2 & -+ & 3\alpha_3 & = & 0. \end{array}$$

Soustava je homogenní, tj. má nulovou pravou stranu, kterou při řešení neopisujeme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=-\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=4\mathbf{r}_2+3\mathbf{r}_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení je nekonečně mnoho, jsou lineárně závislé.

Vektorové prostory, báze, dimenze, řešitelnost soustav

Zákl. př. 5: Je $(1,2,-1)$ lineární kombinací $(1,1,1)$ a $(0,1,-2)$ a $(2,1,4)$?

Hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3+2\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dostáváme nekonečně mnoho řešení. Jedná se o lineární kombinaci.

Vektorové prostory, báze, dimenze, řešitelnost soustav

Zákl. př. 6: Najděte bázi a dimenzi $\mathcal{U} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

Řešíme soustavu

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Zavedeme parametry

$$x_3 := t \in \mathbb{R}, \quad x_2 := s \in \mathbb{R}$$

a dosadíme

$$x_1 = -x_2 - x_3 = -s - t.$$

Dostáváme parametrické vyjádření prostoru

$$\mathcal{U} := \{\mathbf{x} = (-s - t, s, t) : \; s, t \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{x} = s(-1, 1, 0) + t(-1, 0, 1) : \; s, t \in \mathbb{R}\},$$

a tedy libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ je lineární kombinací dvou bázových vektorů

$$F := (\mathbf{f}_1 := (-1, 1, 0), \mathbf{f}_2 := (-1, 0, 1)\}.$$

Dimenze $\mathcal{U}$ je 2. Jedná se o rovinu v $\mathbb{R}^3$ procházející počátkem.

Vektorové prostory, báze, dimenze, řešitelnost soustav

Rozš. př. 7: Najděte bázi a dimenzi $\mathcal{U} := \{p(x) := \sum_{i=0}^{2} a_i x^i : \; a_0 + a_1 = 0, \; a_0 - a_1 + a_2 = 0\}$.

Řešíme soustavu (nulovou pravou stranu neopisujeme)

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_0 & + & a_1 & & & = & 0, \\ a_0 & - & a_1 & + & a_2 & = & 0, \end{array} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zavedeme parametr

$$a_2 := t \in \mathbb{R}$$

a dosadíme

$$a_1 = \frac{1}{2} a_2 = \frac{1}{2} t, \quad a_0 = -a_1 = -\frac{1}{2} t.$$

Dostáváme parametrické vyjádření prostoru

$$\mathcal{U} := \left\{ p(x) = -\frac{1}{2} t + \frac{1}{2} t x + t x^2 : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ p(x) = t \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} x + x^2 \right) : \; t \in \mathbb{R} \right\},$$

a tedy

$$F := \left(f_1(x) := -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} x + x^2 \right), \quad \dim \mathcal{U} = 1.$$

Vektorové prostory, báze, dimenze, řešitelnost soustav

Rozš. př. 8: Vypočtěte souřadnice $[1-x+x^2]_F$ v bázi $F := (1-x-x^2, 1+x-x^2, -1+x+2x^2)$.

Hledáme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ lineární kombinace

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \alpha_1(1-x-x^2) + \alpha_2(1+x-x^2) + \alpha_3(-1+x+2x^2) = 1-x+x^2,$$

tj.

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad 1(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3) + x(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + x^2(-\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3) = 1 + (-1)x + 1x^2.$$

Díky lineární nezávislosti funkcí $1, x, x^2$ stačí porovnat koeficienty u těchto funkcí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Řešení je

$$\alpha_3 = 2, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 = 1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 3, \quad \text{a tedy} \quad [1-x+x^2]_F = (3, 0, 2).$$

Zkouška: $3(1-x-x^2) + 0(1+x-x^2) + 2(-1+x+2x^2) = 1-x+x^2$.

Vektorové prostory, báze, dimenze, řešitelnost soustav

Báze vektorového prostoru

Mějme vektorový prostor $\mathcal{V}$. Uspořádaná množina nenulových vektorů $F := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$ tvoří **bázi vektorového prostoru** $\mathcal{V}$, pokud

1. $\mathcal{F} \subset \mathcal{V}$,
2. $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ jsou lineárně nezávislé,
3. libovolný vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ je lineární kombinací $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, tj.

$$\alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2 + \ldots \alpha_n \mathbf{f}_n = \mathbf{v}.$$

Souřadnice vektoru v bázi, dimenze

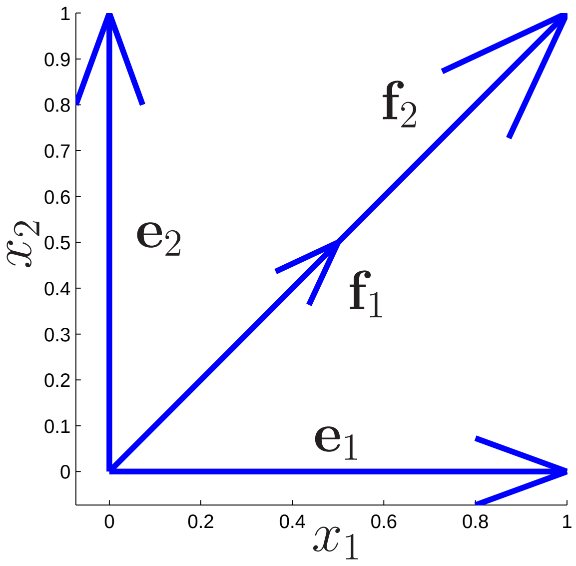
Platí, že lineární kombinace je pro bázi vždy jednoznačná. Výsledné koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nazýváme **souřadnice vektoru v v bázi** F a značíme $[\mathbf{v}]_F := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Platí, že počet bázových vektorů n vektorového prostoru $\mathcal{V}$ je vždy stejný, říkáme mu **dimenze** $\mathcal{V}$ a značíme $\dim \mathcal{V} := n$.

Vektorové prostory, báze, dimenze, řešitelnost soustav

Hledá se reprezentace vektorů — tzv. báze

generující jednoznačně celý prostor $\mathcal{V}$, a tedy žádný z vektorů není zbytečný.



- $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ tvoří bázi $\mathbb{R}^2$, a tedy generují $\mathbb{R}^2$ jednoznačně:

$$\forall \mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2.$$

- $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ netvoří bázi $\mathbb{R}^2$, nesplňují 2. ani 3.
- $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{f}_2$ netvoří bázi $\mathbb{R}^2$, nejsou lin. nezávislé:

$$\forall \mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = (x_1 - x_2)\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{f}_2.$$

- $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{f}_2$ tvoří bázi $\mathbb{R}^2$, a tedy generují $\mathbb{R}^2$ jednoznačně:

$$\forall \mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; \mathbf{x} = (x_1 - x_2)\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{f}_2.$$

Vektorové prostory, báze, dimenze, řešitelnost soustav

Nulový prostor (jádro) matice A

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{x} : \ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\} .$$

Obecné řešení soustavy lineárních rovnic

Uvažujme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ a soustavu

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Máme-li libovolné tzv. partikulární řešení $\mathbf{x}^{\mathrm{P}}$ této soustavy, pak obecné řešení se bude lišit od partikulárního právě o vektory z jádra matice $\mathbf{A}$, tj.

$$\forall \mathbf{x}^{\mathrm{H}} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) : \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x}^{\mathrm{H}} + \mathbf{x}^{\mathrm{P}}) = \mathbf{b}, \quad \text{kde } \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{\mathrm{P}} = \mathbf{b}.$$

Vektorům $\mathbf{x}^{\mathrm{H}} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ říkáme homogenní řešení, neboť řeší homogenní (s nulovou pravou stranou) soustavu

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{\mathrm{H}} = \mathbf{0}.$$

Vektorové prostory, báze, dimenze, řešitelnost soustav

Obecná Gauss–Jordanova metoda pro 0, 1 i ∞ řešení

1. $(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \xrightarrow{\text{Gaussova (dopředná) eliminace}} (\mathbf{U}|\mathbf{c})$
2. Pokud $\mathbf{c} \notin \mathcal{S}(\mathbf{U})$ soustava nemá řešení, jinak
$$(\mathbf{U}|\mathbf{c}) \xrightarrow{\text{Jordanova (zpětná) eliminace}} \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \widetilde{\mathbf{x}}^{\mathrm{P}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right).$$
3. Pokud $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, pak $\mathbf{x}^{\mathrm{P}}$ (doplníme $\widetilde{\mathbf{x}}^{\mathrm{P}}$ nulami) je jediným řešením, jinak
$$\mathbf{R} \xrightarrow{\text{záměna sloupců}} \widetilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{záměna řádků}} \mathbf{N}.$$
4. Soustava má ∞ řešení ve tvaru
$$\mathbf{x} := \mathbf{x}^{\mathrm{P}} + \underbrace{\mathbf{N} \cdot \mathbf{t}}_{=\mathbf{x}^{\mathrm{H}}},$$
kde $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n-h}$ je vektor parametrů.

Tematické okruhy

- Soustavy lineárních rovnic, maticový počet, inverzní matice
- Vektorové prostory, báze, dimenze, řešitelnost soustav
- Lineární zobrazení a souvislost s maticemi, princip superpozice
- Bilineární formy a souvislost s maticemi, rozklad, kongruence
- Kvadratické formy a souvislost s maticemi, klasifikace
- Ortogonalita, ortogonální matice, metoda nejmenších čtverců
- Výpočet determinantů
- Vlastní čísla a vektory, charakteristická rovnice, diagonalizace

Lineární zobrazení a souvislost s maticemi, princip superpozice

Rozš. př. 9: Je dáno $A(1-x+x^2) = (1,1)$, $A(1+x-x^2) = (1,0)$, $A(-1+x+x^2) = (0,1)$. Spočtěte $A(1)$.

Funkci $p(x) := 1$ vyjádříme v bázi $E := \big(1 - x + x^2, 1 + x - x^2, -1 + x + x^2\big)$, tj. hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ \alpha_1(1-x+x^2) + \alpha_2(1+x-x^2) + \alpha_3(-1+x+x^2) = 1+0x+0x^2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obraz $A(1)$ je lineární kombinace obrazů bázových funkcí

$$\begin{aligned} A(1) &= \alpha_1 A(1 - x + x^2) + \alpha_2 A(1 + x - x^2) + \alpha_3 A(-1 + x + x^2) = \\ &= \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,0) + 0(0,1) = \\ &= (1, 1/2). \end{aligned}$$

Lineární zobrazení a souvislost s maticemi, princip superpozice

Rozš. př. 10: Je dáno $A(1-x+x^2)=(1,1)$, $A(1+x-x^2)=(1,0)$, $A(-1+x+x^2)=(0,1)$. Najděte všechny $p(x)\in\mathcal{P}_2$: $A(p)=(0,0)$.

Najděme všechny lineární kombinace $(1,1)$, $(1,0)$ a $(0,1)$, které dávají $(0,0)$, tj. hledáme $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$:

$$\alpha_1(1,1)+\alpha_2(1,0)+\alpha_3(0,1)=(0,0)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \alpha_3=t,\ \alpha_2=t,\ \alpha_1=-t,\ t\in\mathbb{R}.$$

Vzorem $p(x):A(p(x))=(0,0)$ jsou stejné lineární kombinace vzorů bázových funkcí $1-x+x^2$, $1+x-x^2$ a $-1+x+x^2$

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha_1(1-x+x^2)+\alpha_2(1+x-x^2)+\alpha_3(-1+x+x^2)= \\ &= -t(1-x+x^2)+t(1+x-x^2)+t(-1+x+x^2)= \\ &= t(-1+3x-x^2),\ t\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lineární zobrazení a souvislost s maticemi, princip superpozice

Zákl. př. 11 a 12: Je dáno lin. zobr. $A(1,1,-1) = (1,1)$, $A(1,-1,0) = (-2,0)$, $A(1,1,1) = (0,1)$. **Vypočtěte** $\mathcal{N}(A)$, $d(A)$, $\mathcal{H}(A)$, $h(A)$.

Pro výpočet nulového prostoru vyjádřeme $(0,0)$ jako lin. kombinaci obrazů báze, tj. hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1(1,1) + \alpha_2(-2,0) + \alpha_3(0,1) = (0,0),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \alpha_3 = t,\ \alpha_2 = -\frac{1}{2}t,\ \alpha_1 = -t,\ t \in \mathbb{R}.$$

Nulový prostor obsahuje stejné lineární kombinace vzorů

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ -t(1,1,-1) - \frac{1}{2}t(1,-1,0) + t(1,1,1) :\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2 \right) \right\rangle,\ d(A) = 1.$$

Ze zákona zachování dimenze víme, že

$$h(A) = n - d(A) = \dim \mathbb{R}^3 - d(A) = 3 - 1 = 2.$$

Zároveň je obor hodnot podprostorem $\mathbb{R}^2$, musí tedy platit

$$\mathcal{H}(A) = \mathbb{R}^2.$$

Lineární zobrazení a souvislost s maticemi, princip superpozice

Zákl. př. 13: Nalezněte matici lineárního zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_2, x_1 - x_3) \in \mathbb{R}^2$ **vzhledem ke kanonickým bázím.**

$$\begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 \\ 1x_1 + 0x_2 - 1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1, 2, 0) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (1, 0, -1) \cdot (x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lineární zobrazení a souvislost s maticemi, princip superpozice

Princip superpozice

Mějme lineární zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, vektory $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathcal{V}$ a řešení $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{U}$ lineárních úloh

$$A(\mathbf{x}_1) = \mathbf{b}_1, \quad A(\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_2.$$

Vezměme lineární kombinaci pravých stran s $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, pak

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 \quad \text{je řešením úlohy} \quad A(\mathbf{x}) = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2.$$

Lineární zobrazení a souvislost s maticemi, princip superpozice

Každou matici lze chápat jako lineární zobrazení.

Mějme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, pak následující zobrazení $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární

$$A(\mathbf{x}) := \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}.$$

Matice lineárního zobrazení

Mějme lineární zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, bázi $E := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathcal{U}$ a bázi $F := (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$ prostoru $\mathcal{V}$. Vezměme $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ a jeho souřadnice $[\mathbf{u}]_E = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ v bázi E, tj.

$$\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n.$$

Vyjádřeme obraz $A(\mathbf{u}) \in \mathcal{V}$ v bázi F

$$\begin{aligned}[A(\mathbf{u})]_F &= [A(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n)]_F = [\alpha_1 A(\mathbf{e}_1) + \cdots + \alpha_n A(\mathbf{e}_n)]_F \\ &= \underbrace{([A(\mathbf{e}_1)]_F, \dots, [A(\mathbf{e}_n)]_F)}_{=:\mathbf{A}_{E,F}} \cdot [\mathbf{u}]_E,\end{aligned}$$

kde $\mathbf{A}_{E,F} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je **matice lineárního zobrazení vzhledem k bázím** E a F.

Tematické okruhy

- Soustavy lineárních rovnic, maticový počet, inverzní matice
- Vektorové prostory, báze, dimenze, řešitelnost soustav
- Lineární zobrazení a souvislost s maticemi, princip superpozice
- Bilineární formy a souvislost s maticemi, rozklad, kongruence
- Kvadratické formy a souvislost s maticemi, klasifikace
- Ortogonalita, ortogonální matice, metoda nejmenších čtverců
- Výpočet determinantů
- Vlastní čísla a vektory, charakteristická rovnice, diagonalizace

Bilineární formy a souvislost s maticemi, rozklad, kongruence

Rozš. př. 13 a zákl. př. 14: Zapište matici $B(\mathbf{u},\mathbf{v}) := 3u_1v_1 - u_2v_3 + u_3v_1 + u_3v_2$ na $\mathbb{R}^3$ v kan. bázi a rozložte ji na symetrickou a antisymetrickou část.

$$B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 3u_1v_1 + 0u_1v_2 + 0u_1v_3 + 0u_2v_1 + 0u_2v_2 - 1u_2v_3 + 1u_3v_1 + 1u_3v_2 + 0u_3v_3 =$$

$$= (u_1, u_2, u_3) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{B}_E} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_E^{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{0+1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1+1}{2} \\ \frac{1+0}{2} & \frac{1-1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_E^{\mathrm{A}} = \mathbf{B}_E - \mathbf{B}_E^{\mathrm{S}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bilineární formy a souvislost s maticemi, rozklad, kongruence

Každou čtvercovou matici lze chápat jako bilineární formu.

Mějme matici $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pak následující zobrazení $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je bilin. forma

$$B(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{B})_{ij}\, v_j.$$

Matice bilineární formy

Mějme bilineární formu $B : \mathcal{V}\times\mathcal{V} \to \mathbb{R}$ a bázi $E := (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathcal{V}$. Vezměme $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ a jejich souřadnice $[\mathbf{u}]_E = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $[\mathbf{v}]_E = (\beta_1,\ldots,\beta_n) \in \mathbb{R}^n$, tj.

$$\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{v} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{e}_n.$$

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= B(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n, \mathbf{v}) \overset{1.}{=} \alpha_1 B(\mathbf{e}_1,\mathbf{v}) + \cdots + \alpha_n B(\mathbf{e}_n,\mathbf{v}) \\ &\overset{2.}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j B(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = [\mathbf{u}]_E^T \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} B(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) & \ldots & B(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_1) & \ldots & B(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_n) \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{B}_E} \cdot [\mathbf{v}]_E, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{B}_E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je **matice bilineární formy vzhledem k bázi** E.

Bilineární formy a souvislost s maticemi, rozklad, kongruence

Kongruentní matice

Mějme vektorový prostor $\mathcal{V}$ a jeho báze $E := (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ a $F := (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$. Uvažujme identické zobrazení $I : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ a jeho matici vzhledem k bázím E a F označme $\mathbf{T} := \mathbf{I}_{E,F}$. Ta realizuje přechod mezi bázemi

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \ [\mathbf{v}]_F = \mathbf{T} \cdot [\mathbf{v}]_E.$$

Mějme dále bilineární formu $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$. Pak její **matice** $\mathbf{B}_E$ a $\mathbf{B}_F$ se nazývají **kongruentní** a splňují

$$\mathbf{B}_E = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{B}_F \cdot \mathbf{T},$$

neboť

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= [\mathbf{u}]_F^T \cdot \mathbf{B}_F \cdot [\mathbf{v}]_F = (\mathbf{T} \cdot [\mathbf{u}]_E)^T \cdot \mathbf{B}_F \cdot (\mathbf{T} \cdot [\mathbf{v}]_E) = \\ &= [\mathbf{u}]_E^T \cdot \underbrace{\left(\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{B}_F \cdot \mathbf{T}\right)}_{=\mathbf{B}_E} \cdot [\mathbf{v}]_E. \end{aligned}$$

Tematické okruhy

- Soustavy lineárních rovnic, maticový počet, inverzní matice
- Vektorové prostory, báze, dimenze, řešitelnost soustav
- Lineární zobrazení a souvislost s maticemi, princip superpozice
- Bilineární formy a souvislost s maticemi, rozklad, kongruence
- Kvadratické formy a souvislost s maticemi, klasifikace
- Ortogonalita, ortogonální matice, metoda nejmenších čtverců
- Výpočet determinantů
- Vlastní čísla a vektory, charakteristická rovnice, diagonalizace

Kvadratické formy a souvislost s maticemi, klasifikace

Zákl. př. 15: Klasifikujte $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{4} & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=4\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2:=2\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1} \begin{pmatrix} \boxed{4} & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{s}_3:=4\mathbf{s}_3-\mathbf{s}_1]{\mathbf{s}_2:=2\mathbf{s}_2-\mathbf{s}_1} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{8} & -4 \\ 0 & -4 & 28 \end{pmatrix}}_{\text{kongruence 1}} \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2]{}$$

$$\underbrace{\xrightarrow[\mathbf{r}_3:=2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2]{} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{8} & -4 \\ 0 & 0 & 52 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{s}_3:=2\mathbf{s}_3+\mathbf{s}_2]{} \begin{pmatrix} \boxed{4} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{8} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{104} \end{pmatrix}}_{\text{kongruence 2}},$$

a jelikož $d_{11}, d_{22}, d_{33} > 0$, matice je pozitivně definitní.

Kvadratické formy a souvislost s maticemi, klasifikace

Antisymetrická bilineární forma dává nulovou kvadratickou formu.

Mějme vektorový prostor $\mathcal{V}$ a antisymetrickou bilineární formu $B^{\mathrm{A}} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, pak

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \; B^{\mathrm{A}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -B^{\mathrm{A}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}),$$

a tedy

$$B^{\mathrm{A}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0.$$

Matice kvadratické formy je vždy symetrická.

Mějme bilineární formu $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, pak příslušná kvadratická forma je určena pouze symetrickou částí

$$Q(\mathbf{v}) := B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = B^{\mathrm{S}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \underbrace{B^{\mathrm{A}}(\mathbf{v}, \mathbf{v})}_{=0} = B^{\mathrm{S}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Mějme dále bázi $E := (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathcal{V}$ a vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, pak

$$Q(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_E^T \cdot \mathbf{B}_E \cdot [\mathbf{v}]_E = [\mathbf{v}]_E^T \cdot \left(\mathbf{B}_E^{\mathrm{S}} + \mathbf{B}_E^{\mathrm{A}}\right) \cdot [\mathbf{v}]_E =$$
$$= [\mathbf{v}]_E^T \cdot \underbrace{\mathbf{B}_E^{\mathrm{S}}}_{=:\mathbf{Q}_E} \cdot [\mathbf{v}]_E + \underbrace{[\mathbf{v}]_E^T \cdot \mathbf{B}_E^{\mathrm{A}} \cdot [\mathbf{v}]_E}_{=0}.$$

Kvadratické formy a souvislost s maticemi, klasifikace

Klasifikace diagonálních matic

Má-li kvadratická forma v nějaké bázi E diagonální matici, tj.

$$\mathbf{Q}_E = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix},$$

pak pro libovolný $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, resp. pro jeho souřadnice $[\mathbf{v}]_E =: (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ platí

$$Q(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_E^T \cdot \mathbf{D} \cdot [\mathbf{v}]_E = \sum_{i=1}^{n} d_{ii}(\alpha_i)^2$$

a znaménko $Q(\mathbf{v})$ je určeno znaménky diagonálních prvků. $I := \{1, 2, \dots, n\}$. $\mathbf{D}$ je

- pozitivně (negativně) definitní, pokud $\forall i \in I : d_{ii} \underset{(<)}{>} 0$,
- indefinitní, pokud $\exists i, j \in I : d_{ii} > 0, d_{jj} < 0$,
- pozitivně (negativně) semidefinitní, pokud $\forall i \in I : d_{ii} \underset{(\leq)}{\geq} 0$ a $\exists j \in I : d_{jj} = 0$,

Kvadratické formy a souvislost s maticemi, klasifikace

Klasifikace nediag. sym. matic: Gaussova eliminace + kongruentní transformace

1. Začneme s maticí kvadratické formy $\mathbf{Q}_F$ v libovolné bázi F a provedeme Gaussovu eliminaci bez záměny řádků

$$(\mathbf{Q}_F|\mathbf{I}) \xrightarrow{\text{Gauss bez záměn řádků}} (\mathbf{U}|\mathbf{T}^T) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{Q}_F = \mathbf{U},$$

   kde $\mathbf{U}$ je horní trojúhelníková a $\mathbf{T}^T$ dolní trojúhelníková.

2. Následující kongruentní transformace nám dá diagonální matici

$$\mathbf{D} := \mathbf{Q}_E := \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{Q}_F \cdot \mathbf{T} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{T}.$$

Oba kroky lze sjednotit. Rozepišme Gaussovu eliminaci $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}_n \cdots \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1$, pak

$$\mathbf{Q}_E = \underbrace{\mathbf{T}_n \cdots \underbrace{\left(\mathbf{T}_2 \cdot \underbrace{\left(\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{Q}_F \cdot \mathbf{T}_1^T\right)}_{\text{kongruence } 1} \cdot \mathbf{T}_2^T\right)}_{\text{kongruence } 2} \cdots \mathbf{T}_n^T}_{\text{kongruence } n}.$$

Tematické okruhy

- Soustavy lineárních rovnic, maticový počet, inverzní matice
- Vektorové prostory, báze, dimenze, řešitelnost soustav
- Lineární zobrazení a souvislost s maticemi, princip superpozice
- Bilineární formy a souvislost s maticemi, rozklad, kongruence
- Kvadratické formy a souvislost s maticemi, klasifikace
- Ortogonalita, ortogonální matice, metoda nejmenších čtverců
- Výpočet determinantů
- Vlastní čísla a vektory, charakteristická rovnice, diagonalizace

Ortogonalita, ortogonální matice, metoda nejmenších čtverců

Rozš. př. 15: „Ortogonalizujte" $(\mathbf{e}_1 := (1,1,1), \mathbf{e}_2 := (1,-1,1), \mathbf{e}_3 := (-1,1,1))$**.**

Termín „ortogonalizujte" znamená nalézt ortogonální bázi $F := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ tak, že

$$1.\ \mathbf{f}_1 \in \langle \mathbf{e}_1 \rangle, \quad 2.\ \mathbf{f}_2 \in \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \quad 3.\ \mathbf{f}_3 \in \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle.$$

Ad 1. $\mathbf{f}_1 := \mathbf{e}_1 = (1,1,1)$.

Ad 2. $\mathbf{f}_2 := \mathbf{e}_2 + \alpha \mathbf{f}_1$: $\mathbf{f}_2 \perp \mathbf{f}_1$, tj.

$$0 = (\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1) = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{f}_1 + \alpha \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 \implies \alpha = -\frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1} = -\frac{(1,-1,1)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)} = -\frac{1}{3},$$

a tedy $\mathbf{f}_2 = (1,-1,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Ad 3. $\mathbf{f}_3 := \mathbf{e}_3 + \beta \mathbf{f}_1 + \gamma \mathbf{f}_2$: $\mathbf{f}_3 \perp \mathbf{f}_1$ a $\mathbf{f}_3 \perp \mathbf{f}_2$, tj.

$$0 = (\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1) = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{f}_1 + \beta \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 \implies \beta = -\frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1} = -\frac{(-1,1,1)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)} = -\frac{1}{3},$$

$$0 = (\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_2) = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{f}_2 + \gamma \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2 \implies \gamma = -\frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{f}_2}{\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2} = -\frac{(-1,1,1)\cdot\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{2},$$

a tedy $\mathbf{f}_3 = (-1,1,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = (-1,0,1)$.

Ortogonalita, ortogonální matice, metoda nejmenších čtverců

Rozš. př. 16: Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\mathbf{u} = (0, 1, -1)$ do roviny určené vektory $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$ a $\mathbf{w} = (1, 1, 0)$.

Hledáme $\mathbf{p} = x_1\,\mathbf{v} + x_2\,\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}$ tak, že $\mathbf{u} - \mathbf{p} \perp \mathbf{v}$ a $\mathbf{u} - \mathbf{p} \perp \mathbf{w}$, t.j.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) : \quad x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ortogonalita, ortogonální matice, metoda nejmenších čtverců

Zákl. př. 16: Vypočtěte přibližné řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

$$\begin{aligned} 2x+y &= 1 \\ x+y &= 0 \\ x-y &= -1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^T\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T\,\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2:=-\mathbf{r}_1+3\,\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \end{array}\right): \quad y = \frac{5}{7}, \quad 6x + \frac{10}{7} = 1, \; x = -\frac{2}{7}$$

Ortogonalita, ortogonální matice, metoda nejmenších čtverců

Ortogonální/ortonormální systém

Vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tvoří **ortogonální systém (bázi** pro $n = m$**)**, pokud

$$(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0 \quad \text{pro } i \neq j.$$

Pokud navíc $\|\mathbf{v}_i\| = 1$, pak se jedná o **ortonormální systém (bázi)**.

Ortogonální matice

Čtvercová **matice** $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, která splňuje

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad \text{a tedy } \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T,$$

se nazývá **ortogonální**. Její sloupce tvoří ortonormální systém.

Soustavy s ortogonální maticí

Soustava s ortogonální maticí $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a pravou stranu $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ je snadno řešitelná

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{b}.$$

Ortogonalita, ortogonální matice, metoda nejmenších čtverců

Normálová rovnice = metoda nejmenších čtverců

Mějme matici $\mathbf{A} := (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ s lin. nezávislými sloupci a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Pokud $\mathbf{b} \notin \mathcal{H}(\mathbf{A})$, pak soustava

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

nemá řešení. Přesto může mít smysl řešit následující soustavu:

$$\mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b},$$

kde $\mathbf{P} := \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^T$ je ortogonální projektor na $\mathcal{H}(\mathbf{A})$. Jelikož $\mathbf{A}$ má lin. nezávislé sloupce, soustava je ekvivalentní **normálové rovnici**

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}.$$

Pokud $\mathbf{b} \in \mathcal{H}(\mathbf{A})$, pak $\mathbf{P} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}$ a normálová rovnice je ekvivalentní s původní. Pokud je navíc $\mathbf{A}$ (čtvercová) regulární, pak

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T = \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}\right) \cdot \left((\mathbf{A}^T)^{-1} \cdot \mathbf{A}^T\right) = \mathbf{I}.$$

Tematické okruhy

- Soustavy lineárních rovnic, maticový počet, inverzní matice
- Vektorové prostory, báze, dimenze, řešitelnost soustav
- Lineární zobrazení a souvislost s maticemi, princip superpozice
- Bilineární formy a souvislost s maticemi, rozklad, kongruence
- Kvadratické formy a souvislost s maticemi, klasifikace
- Ortogonalita, ortogonální matice, metoda nejmenších čtverců
- Výpočet determinantů
- Vlastní čísla a vektory, charakteristická rovnice, diagonalizace

Výpočet determinantů

Zákl. př. 17 a rozš. př. 17: Vypočtěte následující determinanty.

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \underset{\mathbf{r}_3:=-7\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3}{\overset{\mathbf{r}_2:=-4\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \underset{\mathbf{r}_3:=-2\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{1.}{=} 1 \cdot (-3) \cdot 0 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{-1} & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{\mathbf{r}_3:=3\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_4 \\ \mathbf{r}_4:=\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3}}{\overset{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{=}} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\mathbf{r}_3:=-2\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_4:=-3\mathbf{r}_2+2\mathbf{r}_4}}{=} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -3 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \end{vmatrix} \underset{\mathbf{r}_4:=-3\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 18 = 54.$$

Tematické okruhy

- Soustavy lineárních rovnic, maticový počet, inverzní matice
- Vektorové prostory, báze, dimenze, řešitelnost soustav
- Lineární zobrazení a souvislost s maticemi, princip superpozice
- Bilineární formy a souvislost s maticemi, rozklad, kongruence
- Kvadratické formy a souvislost s maticemi, klasifikace
- Ortogonalita, ortogonální matice, metoda nejmenších čtverců
- Výpočet determinantů
- Vlastní čísla a vektory, charakteristická rovnice, diagonalizace

Vlastní čísla a vektory, charakteristická rovnice, diagonalizace

Zákl. př. 18: Rozhodněte, které z u, v jsou vlastní vektory matice A,

$$\text{kde } \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u} := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \lambda\, \mathbf{u} : \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ nemá řešení, } \mathbf{u} \text{ není vl. vektor } \mathbf{A},$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda\, \mathbf{v} : \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ má řešení } \lambda = 2, \ \mathbf{v} \text{ je vl. vektor } \mathbf{A}.$$

Vlastní čísla a vektory, charakteristická rovnice, diagonalizace

Rozš. př. 18: Vypočtěte vlastní čísla a vektory matice $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Vyjádřeme determinant $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|$

$$|\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}| = \left| \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8$$

a řešme charakteristickou rovnici

$$\underbrace{\lambda^2 - 6\lambda + 8}_{=(\lambda-4)(\lambda-2)} = 0.$$

Řešením jsou vlastní čísla $\lambda_1 := 4$ a $\lambda_2 := 2$. Příslušné vlastní vektory jsou nenulová řešení následujících homogenních soustav lin. rovnic se singulárními maticemi $\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}$:

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\,\mathbf{I}) \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}: \quad \begin{pmatrix} 3-4 & 1 \\ 1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{e}_1 := t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \neq 0,$$

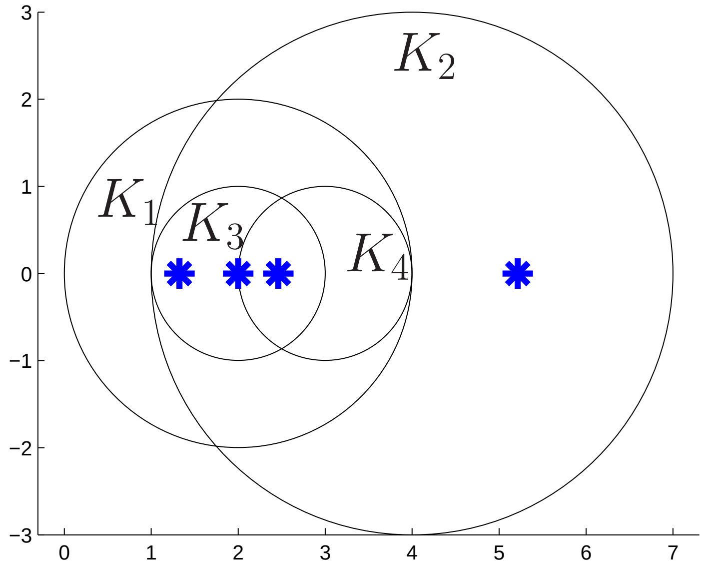
$$(\mathbf{A} - \lambda_2\,\mathbf{I}) \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}: \quad \begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{e}_2 := s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; s \neq 0.$$

Vlastní čísla a vektory, charakteristická rovnice, diagonalizace

Rozš. př. 19: Lokalizujte vlastní čísla matice $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Kruh K_1: střed v $a_{11} = 2$, poloměr $|a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| = |1| + |0| + |-1| = 2$,
kruh K_2: střed v $a_{22} = 4$, poloměr $|a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| = |1| + |1| + |-1| = 3$,
kruh K_3: střed v $a_{33} = 2$, poloměr $|a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| = |0| + |1| + |0| = 1$,
kruh K_4: střed v $a_{44} = 3$, poloměr $|a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}| = |0| + |-1| + |0| = 1$.

$\sigma(\mathbf{A}) \subset (K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_3)$



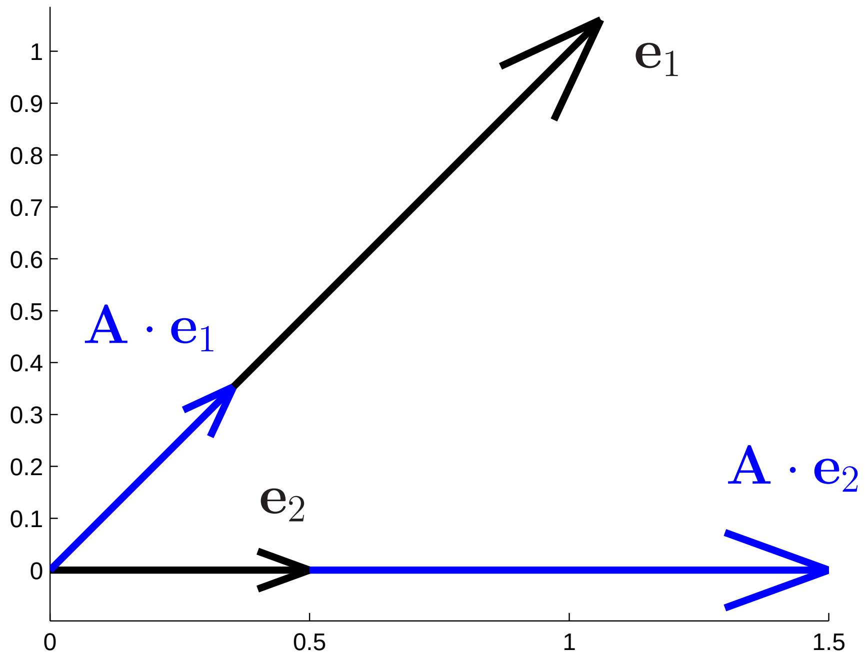
Vlastní čísla a vektory, charakteristická rovnice, diagonalizace

Definice

Mějme čtvercovou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. **Vlastní číslo** $\lambda \in \mathbb{C}$ a jemu odpovídající **vlastní vektor** $\mathbf{e} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ splňují následující (nelineární) rovnici:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = \lambda\, \mathbf{e}.$$

Množina všech vlastních čísel $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathbb{C}$ se nazývá **spektrum matice**.



Vlastní čísla a vektory, charakteristická rovnice, diagonalizace

Výpočet vlastních čísel

Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, hledáme $\lambda \in \mathbb{C}$ tak, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = \lambda\,\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \neq \mathbf{0}.$$

Po převedení na levou stranu dostáváme

$$(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{e} \neq \mathbf{0}.$$

Tato rovnice má netriviální řešení, právě když $\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}$ je singulární. Vlastní čísla jsou tedy řešením následující charakteristické (polynomiální) rovnice:

$$\boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = 0}.$$

Výpočet vlastních vektorů

Máme-li vlastní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, pak $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ je singulární a odpovídající vlastní vektory jsou z $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \setminus \{\mathbf{0}\}$, tedy řešíme homogenní soustavu lin. rovnic

$$\boxed{(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{0}}.$$

Vlastní čísla a vektory, charakteristická rovnice, diagonalizace

Diagonalizace

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, označme vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ a předpokládejme, že příslušné vlastní vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ jsou lin. nezávislé. Pak

$$\mathbf{A} \cdot \underbrace{(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)}_{=:\mathbf{U}} = (\lambda_1\mathbf{e}_1, \ldots, \lambda_n\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{D}},$$

a tedy

$$\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{D}.$$

Na levé straně rovnosti je podobnostní transformace matice $\mathbf{A}$, tj. vyjádření lineárního zobrazení $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ v bázi vlastních vektorů. Máme novou faktorizaci

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}^{-1}.$$

Hodně štěstí u zkoušky!

Jděte mu naproti.

Pěkné Vánoce!