Lineární algebra — 11. přednáška: Vlastní čísla a vektory

Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

http://homel.vsb.cz/~luk76/LA1

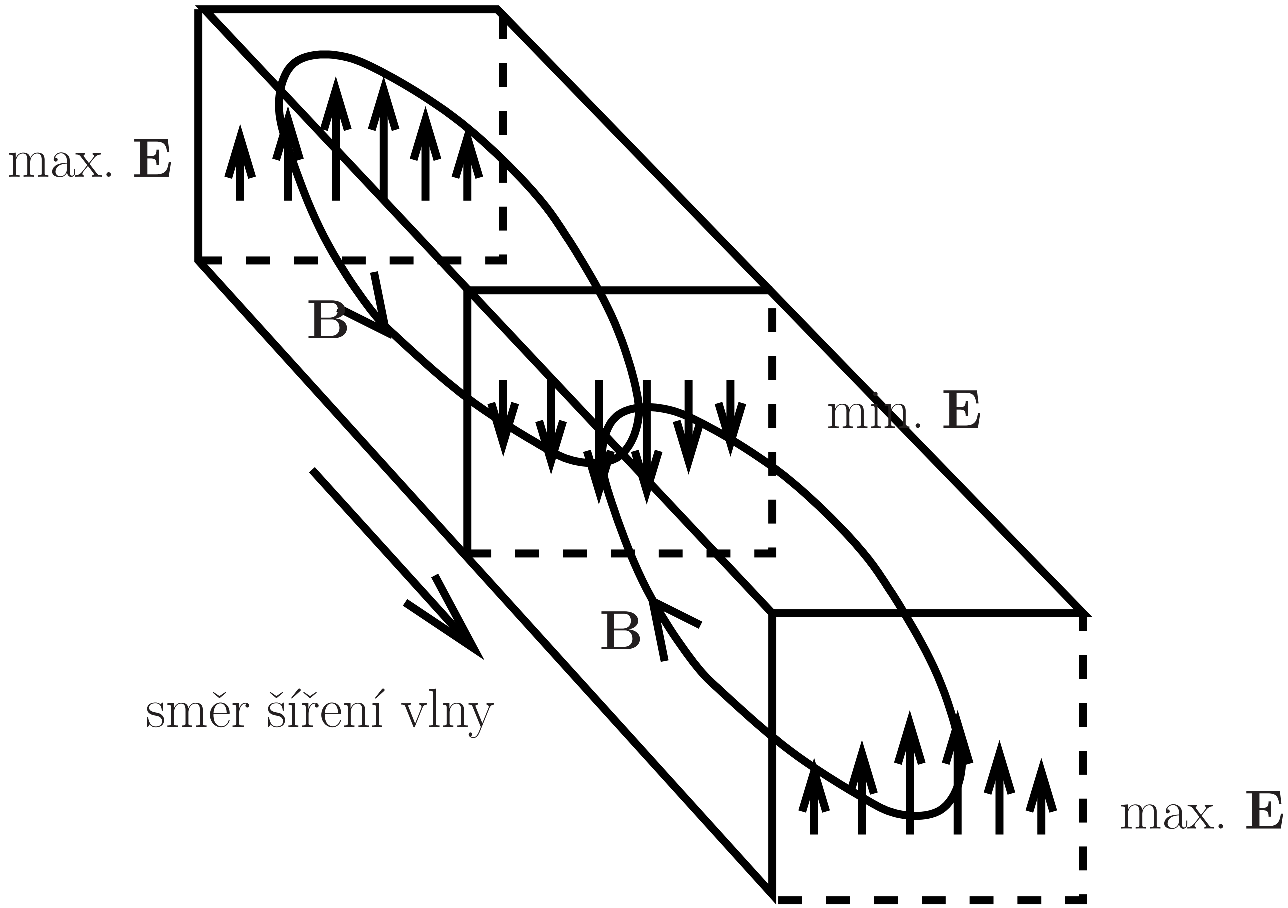
Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Motivace: Vlnovody

Optické kabely propagují pouze některé světelné módy



Motivace: Vlnovody

Vlnovod: Laplaceova úloha vlastních čísel

Uvažujme kruhový profil vlnovodu Ω, jeho hranici (kružnici) Γ. Předpokládejme $\mathbf{E}(\mathbf{x};t) = (0, 0, E(x_1, x_2)\ \cos(\omega(t + x_3/c)))$, pak

hledáme $\omega > 0$ a $E(x_1, x_2) \neq 0$:

$$\begin{cases} -c^2 \triangle E(x_1, x_2) = \omega^2 E(x_1, x_2) & \text{pro } (x_1, x_2) \in \Omega, \\ E(x_1, x_2) = 0 & \text{pro } (x_1, x_2) \in \Gamma, \end{cases}$$

kde c je rychlost světla. Triangulujeme Ω a předpokládáme spojité po trojúhelnících lineární (přesněji afinní) bázové funkce $B := (b_1(x_1, x_2), \ldots, b_n(x_1, x_2))$ takové, že $b_i(x_1, x_2) = 0$ na $\partial\Omega$, dostáváme algebraickou úlohu hledání vlastních čísel a vektorů:

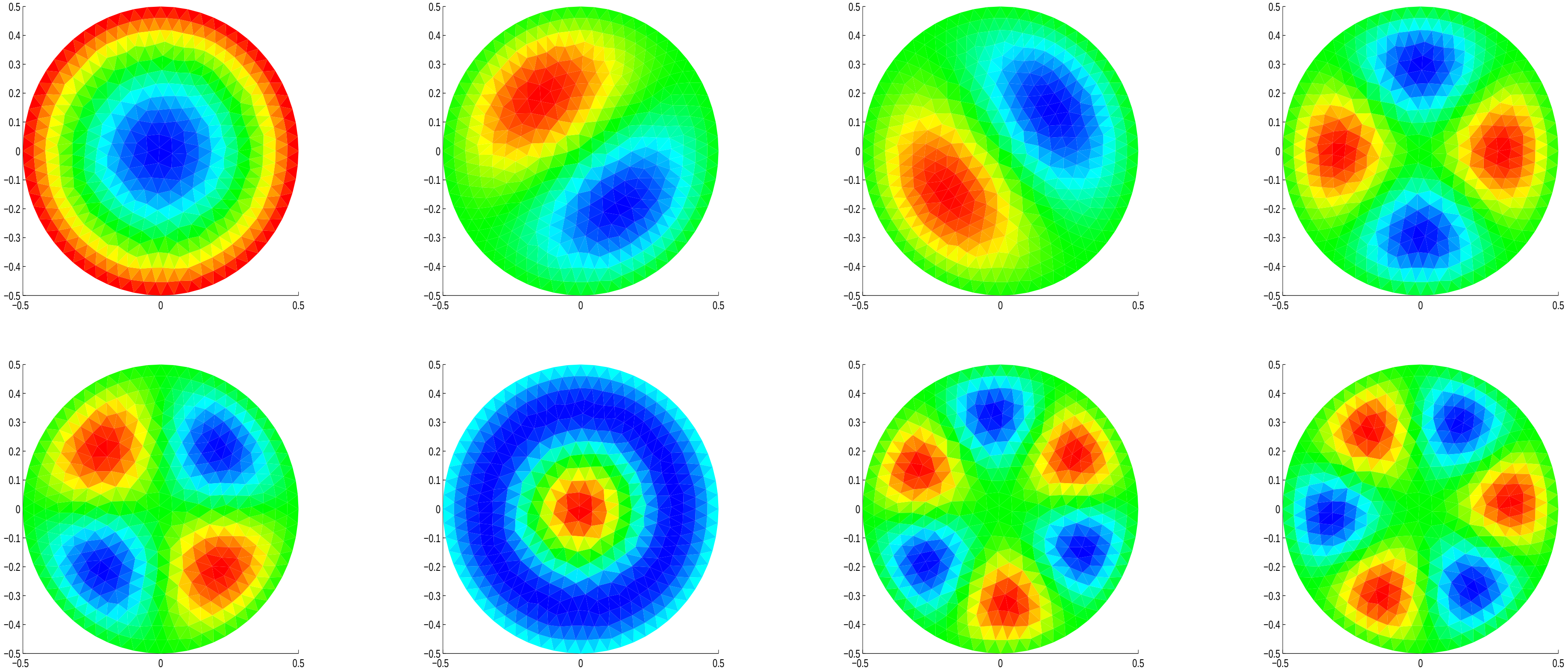
hledáme $\omega > 0$ a $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$:

$$\left(c^2\, \mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{e} = \omega^2 \mathbf{e},$$

kde $\mathbf{e} := [E(x_1, x_2)]_B$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = [-\triangle E(x_1, x_2)]_B$ jsou souřadnicové vektory.

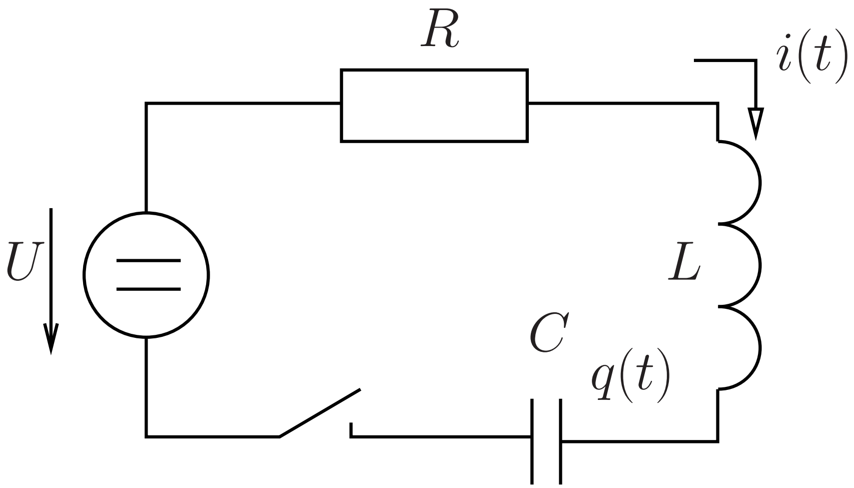
Motivace: Vlnovody

Vlastní módy $E(x_1, x_2)$ válcového vlnovodu



Motivace: Časové průběhy veličin v lineárních obvodech

Přechodové jevy v RLC obvodu



Průběh proudu $i(t)$ a náboje $q(t)$ po připojení stejnosměrného zdroje k sériovému RLC obvodu lze popsat následující soustavou obyčejných diferenciálníc rovnic prvního řádu:

$$\left\{\begin{aligned} R\,i(t) + L\,i'(t) + \frac{1}{C}\,q(t) &= \quad U \text{ pro } t > 0,\\ i(t) &= q'(t) \text{ pro } t > 0,\\ i(0) &= \quad 0,\\ q(0) &= \quad 0. \end{aligned}\right.$$

Motivace: Časové průběhy veličin v lineárních obvodech

Přechodové jevy v RLC obvodu

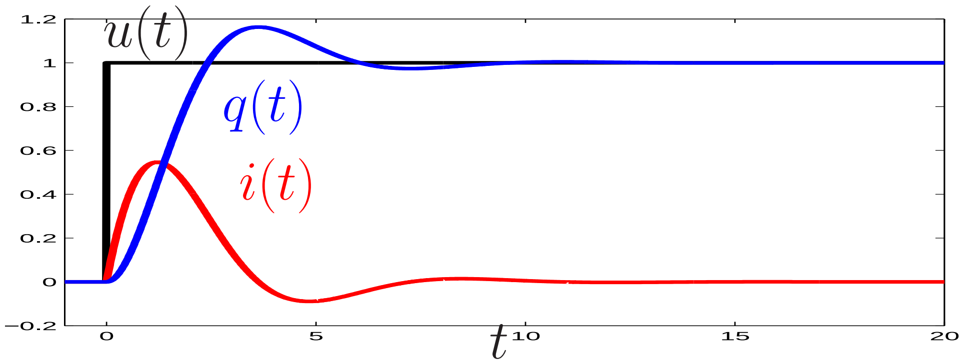
Předpokládáme řešení ve tvaru $\mathbf{x}(t) := \begin{pmatrix} i(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = \operatorname{Re}\left\{ \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\,\mathbf{e}_1 + \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\,\mathbf{e}_2 \right\} + \begin{pmatrix} 0 \\ C\,U \end{pmatrix}$:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \frac{U}{L} \\ 0 \end{pmatrix} &= \mathbf{x}'(t), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \right.$$

Tato úloha se redukuje na hledání vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ a vl. vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \quad \text{s podmínkou } \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -CU \end{pmatrix}.$$

Pro $R = L = C = U = 1$:



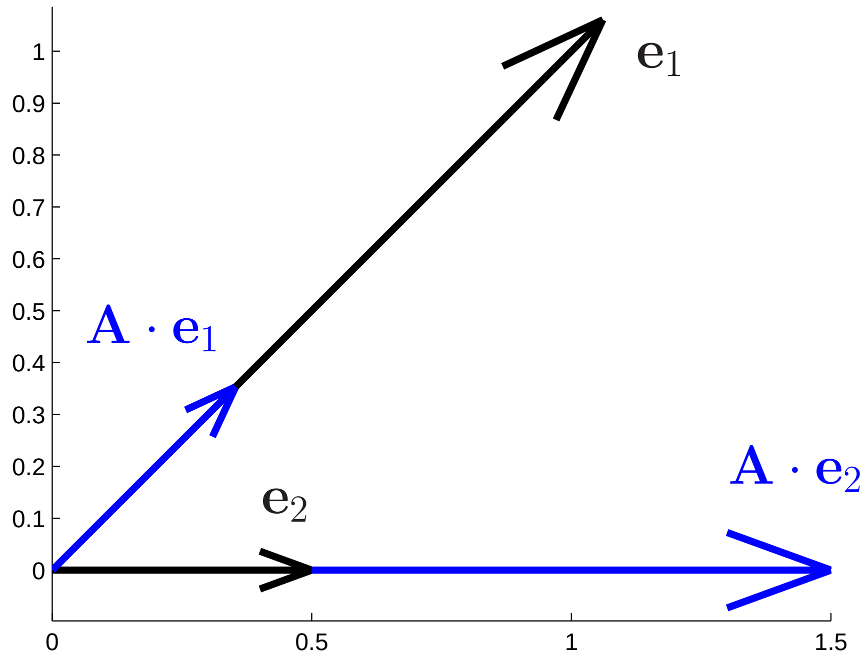
Vlastní čísla a vektory

Definice

Mějme čtvercovou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. **Vlastní číslo** $\lambda \in \mathbb{C}$ a jemu odpovídající **vlastní vektor** $\mathbf{e} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ splňují následující (nelineární) rovnici:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = \lambda\,\mathbf{e}.$$

Množina všech vlastních čísel $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathbb{C}$ se nazývá **spektrum matice**.



Vlastní čísla a vektory

Příklad: Vlastní čísla a vektory jednotkové matice.

Hledejme $\lambda \in \mathbb{C}$ a $\mathbf{e} \in \mathbb{C}^n$ tak, že

$$\underbrace{\mathbf{I} \cdot \mathbf{e}}_{=\mathbf{e}} = \lambda \, \mathbf{e}.$$

Řešením je jediné vlastní číslo $\lambda := 1$, jemuž odpovídá lib. vektor $\mathbf{e} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Příklad: Vlastní čísla a vektory diagonální matice.

Pro diag. matici platí: $\mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_i = \underbrace{d_{ii}}_{=:\lambda_i} \mathbf{e}_i$, kde $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ je i–tý sloupec jednotk. matice.

Nulovému prostoru odpovídá nulové vlastní číslo.

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, pak

$$\mathbf{e} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{0}\} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{0} = 0 \, \mathbf{e}, \;\; \mathbf{e} \neq \mathbf{0}.$$

Vlastní čísla a vektory

Příklad: Vlastní čísla a vektory ortogonálního projektoru.

Buď $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonální projektor na $\mathcal{H}(\mathbf{A})$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Pak

$$\forall \mathbf{e} \in \mathcal{H}(\mathbf{A}) : \ \mathbf{P} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e},$$

a tedy $\lambda := 1$ je vlastní číslo, k němuž náleží lib. vl. vektor $\mathbf{e} \in \mathcal{H}(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Víme, že $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T) \perp \mathcal{H}(\mathbf{A})$ a

$$\forall \mathbf{n} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})^T : \ \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} = 0\,\mathbf{n},$$

a tedy $\lambda := 0$ je vlastní číslo příslušející vl. vektorům $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^T) \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Příklad: Vlastní čísla a vektory permutační matice.

Uvažujme $\mathbf{P} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Řešením rovnice $\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e} = \lambda \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ je vlastní číslo $\lambda_1 := 1$ s $\mathbf{e}_1 := t(1, 1)$, $t \neq 0$, a vlastní číslo $\lambda_2 := -1$ s $\mathbf{e}_2 := s(-1, 1)$, $s \neq 0$.

Vlastní čísla a vektory

Příklad: Rozhodněte, které z u, v jsou vlastní vektory matice A,

$$\text{kde } \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u} := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{u} : \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ \text{nemá řešení, } \mathbf{u} \text{ není vl. vektor } \mathbf{A},$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v} : \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{má řešení } \lambda = 2, \ \mathbf{v} \text{ je vl. vektor } \mathbf{A}.$$

Vlastní čísla a vektory

Výpočet vlastních čísel

Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, hledáme $\lambda \in \mathbb{C}$ tak, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = \lambda\,\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \neq \mathbf{0}.$$

Po převedení na levou stranu dostáváme

$$(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{e} \neq \mathbf{0}.$$

Tato rovnice má netriviální řešení, právě když $\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}$ je singulární. Vlastní čísla jsou tedy řešením následující charakteristické (polynomiální) rovnice:

$$\boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = 0}.$$

Výpočet vlastních vektorů

Máme-li vlastní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, pak $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ je singulární a odpovídající vlastní vektory jsou z $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \setminus \{\mathbf{0}\}$, tedy řešíme homogenní soustavu lin. rovnic

$$\boxed{(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{0}}.$$

Vlastní čísla a vektory

Příklad: Vypočtěte vlastní čísla a vektory matice $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Vyjádřeme determinant $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|$

$$|\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}| = \left| \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8$$

a řešme charakteristickou rovnici

$$\underbrace{\lambda^2 - 6\lambda + 8}_{=(\lambda-4)(\lambda-2)} = 0.$$

Řešením jsou vlastní čísla $\lambda_1 := 4$ a $\lambda_2 := 2$. Příslušné vlastní vektory jsou nenulová řešení následujících homogenních soustav lin. rovnic se singulárními maticemi $\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}$:

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\,\mathbf{I}) \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} : \quad \begin{pmatrix} 3-4 & 1 \\ 1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathbf{e}_1 := t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\; t \neq 0,$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_2\,\mathbf{I}) \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} : \quad \begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathbf{e}_2 := s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\; s \neq 0.$$

Vlastní čísla a vektory

Pozorování

Všimněme si, že výsledek předchozího příkladu

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 4,\ \mathbf{e}_1 := t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0; \quad \lambda_2 = 2,\ \mathbf{e}_2 := s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ s \neq 0$$

je velmi podobný výsledku příkladu s permutační maticí

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \mathbf{e}_1 := t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0; \quad \lambda_2 = -1,\ \mathbf{e}_2 := s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ s \neq 0.$$

Není to náhoda.

Posuv spektra

Spektrum matice $\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I}$ vznikne přičtením $\alpha \in \mathbb{C}$ ke spektru matice $\mathbf{A}$, přičemž vlastní vektory $\mathbf{e}$ zůstávají nezměněny, viz

$$(\mathbf{A} + \alpha\,\mathbf{I}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} + \alpha\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e} + \alpha\mathbf{e} = (\lambda + \alpha)\mathbf{e},$$

kde $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo $\mathbf{A}$.

Vlastní čísla a vektory

Příklad: Vypočtěte vlastní čísla a vektory matice $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vyjádřeme determinant $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|$

$$|\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

a řešme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 := \imath,\ \lambda_2 := -\imath.$$

Příslušné vlastní vektory jsou nenulová řešení následujících homogenních soustav lin. rovnic se singulárními maticemi $\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}$:

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\,\mathbf{I}) \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} : \quad \begin{pmatrix} -\imath & 1 \\ -1 & -\imath \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{e}_1 := t \begin{pmatrix} 1 \\ \imath \end{pmatrix},\ t \neq 0,$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_2\,\mathbf{I}) \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} : \quad \begin{pmatrix} \imath & 1 \\ -1 & \imath \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{e}_2 := s \begin{pmatrix} 1 \\ -\imath \end{pmatrix},\ s \neq 0.$$

Všimněme si, že vlastní čísla i vektory jsou komplexně sdružené.

Vlastní čísla a vektory

Reálné matice mají komplexně sdružená vlastní čísla i vektory

Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ a $\mathbf{e} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ jsou si odpovídající vlastní číslo a vektor $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tj.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{e} = \lambda\,\mathbf{e},\ \ \mathbf{e} \neq \mathbf{0}.$$

Aplikujme na rovnici komplexní sdružení (změna znaménka imaginárních částí)

$$\left.\begin{aligned} (\mathbf{A}\cdot\mathbf{e})_i^* &= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}^*)_i \\ (\lambda\mathbf{e})_i^* &= (\lambda^*\mathbf{e}^*)_i \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}^* = \lambda^*\mathbf{e}^*,$$

a tedy λ^* a $\mathbf{e}^*$ jsou také odpovídající si vlastní číslo a vektor $\mathbf{A}$.

Vlastní čísla a vektory

Součet a součin vlastních čísel

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Levou stranu charakteristické rovnice, tzv. **charakteristický polynom** můžeme (podle základní věty algebry) přepsat na součin kořenových činitelů

$$p_n(\lambda) := |\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}| = (\lambda_1 - \lambda)\cdot(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda),$$

v níž vystupují všechna vlastní čísla $\lambda_i \in \mathbb{C}$ matice $\mathbf{A}$. Dosadíme-li $\lambda := 0$, máme

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

Odtud vidíme, že singulární matice má nulové vlastní číslo. Porovnáním koeficientů u členu λ

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = (-\lambda)^n + (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\,(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \det(\mathbf{A}) =$$
$$= (\lambda_1 - \lambda)\cdot(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda) = (-\lambda)^n + (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\,(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

dostáváme vztah pro **stopu matice**

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ii}.$$

Vlastní čísla a vektory

Příklad: Vypočtěte součin a součet vlastních čísel $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3 = |\mathbf{A}| = 3 + 4 + 4 - 1 - 4 - 12 = -6,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = 1 + 1 + 3 = 5.$$

Vlastní čísla a vektory

Lokalizace vlastních čísel

Mějme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a libovolnou pár vl. čísla a vektoru λ, $\mathbf{e}$. Nechť pro index $i \in \{1, \ldots, n\}$ je $|e_i|$ největší složka, tj. $|e_i| \geq |e_j|$. Podívejme se na i–tý řádek rovnice:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e})_i = a_{i1}e_1 + \cdots + a_{i,i-1}e_{i-1} + a_{ii}e_i + a_{i,i+1}e_i + \cdots + a_{in}e_n = \lambda e_i.$$

Převeďme diagonální člen k členu s λ a odhadněme absolutní hodnotu

$$|\lambda - a_{ii}|\ |e_i| = \left|\sum_{j\neq i} a_{ij}e_j\right| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\ |e_j| \leq |e_i| \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\,.$$

Tím jsme dokázali následující Geršgorinovu větu:

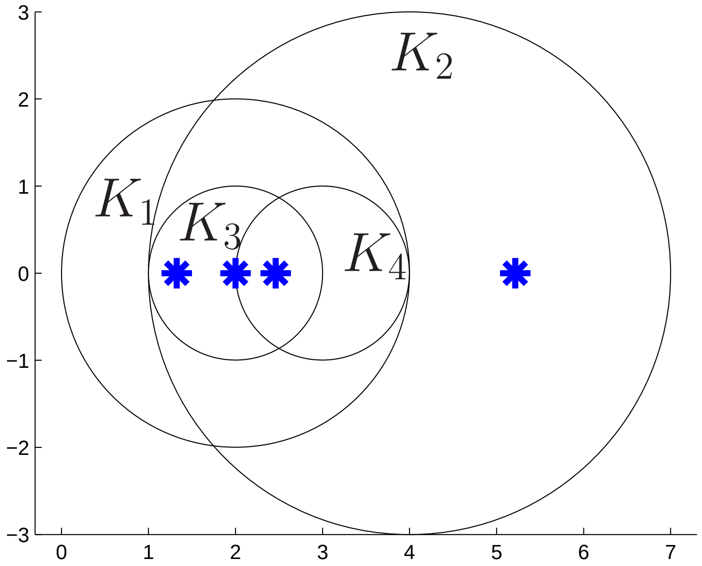
$$\sigma(\mathbf{A}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_i, \quad \text{kde } K_i := \left\{\sigma \in \mathbb{C} :\ |\sigma - a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\right\}.$$

Spektrum matice se nachází v n kruzích K_i komplexní roviny.

Vlastní čísla a vektory

Příklad: Lokalizujte vlastní čísla matice $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$**.**

Kruh K_1: střed v $a_{11} = 2$, poloměr $|a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| = |1| + |0| + |-1| = 2$,
kruh K_2: střed v $a_{22} = 4$, poloměr $|a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| = |1| + |1| + |-1| = 3$,
kruh K_3: střed v $a_{33} = 2$, poloměr $|a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| = |0| + |1| + |0| = 1$,
kruh K_4: střed v $a_{44} = 3$, poloměr $|a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}| = |0| + |-1| + |0| = 1$.



Vlastní čísla a vektory diagonalizují matici lineárního zobrazení

Diagonalizace

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, označme vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ a předpokládejme, že příslušné vlastní vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ jsou lin. nezávislé. Pak

$$\mathbf{A} \cdot \underbrace{(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)}_{=:\mathbf{U}} = (\lambda_1 \mathbf{e}_1, \ldots, \lambda_n \mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{D}},$$

a tedy

$$\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{D}.$$

Na levé straně rovnosti je podobnostní transformace matice $\mathbf{A}$, tj. vyjádření lineárního zobrazení $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ v bázi vlastních vektorů. Máme novou faktorizaci

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}^{-1}.$$

Vlastní čísla a vektory diagonalizují matici lineárního zobrazení

Diagonalizace reálných symetrických matic

Reálná symetrická matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má reálná vlastní čísla, viz

$$\lambda\|\mathbf{e}\|^2 = (\mathbf{e}^*)^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{e}^* = \mathbf{e}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e})^* = \lambda^*\|\mathbf{e}\|^2,$$

a tedy $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vlastní vektory příslušející různým vlastním číslům jsou ortogonální, viz

$$\lambda_i \mathbf{e}_j^T \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j) = \lambda_j \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{e}_j,$$

a jelikož $\lambda_i \neq \lambda_j$, platí, že $\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{e}_j = 0$.

Důsledek: Spektrální rozklad

Reálnou symetrickou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lze rozložit na součin

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}^T,$$

kde $\mathbf{D} := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ je diagonální matice obsahující vlastní čísla $\mathbf{A}$ a $\mathbf{U} := (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ obsahuje ortonormální bázi vlastních vektorů.

Vlastní čísla a vektory diagonalizují matici lineárního zobrazení

Příklad: Vypočtěte spektrální rozklad matice $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Spočtěme vlastní čísla

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2-4 = \lambda^2-2\lambda-3 = (\lambda-3)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \begin{array}{c} \lambda_1 := 3, \\ \lambda_2 := -1. \end{array}$$

Těm odpovídají vlastní vektory

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\cdot\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}: \quad \begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{e}_1 := t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0,$$

$$(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\cdot\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}: \quad \begin{pmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 2 & 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{e}_2 := s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ s \neq 0.$$

Zvolíme $t := s := 1/\sqrt{2}$ a dostáváme spektrální rozklad

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{U}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{D}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{U}^T}.$$

Vlastní čísla a vektory diagonalizují matici lineárního zobrazení

Reálné symetrické matice zobrazují jednotkové koule na elipsoidy.

Následující obrázek ilustruje spektrální rozklad $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ z předchozího příkladu.