Lineární algebra — 10. přednáška: Ortogonalita II

Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

http://homel.vsb.cz/~luk76/LA1

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

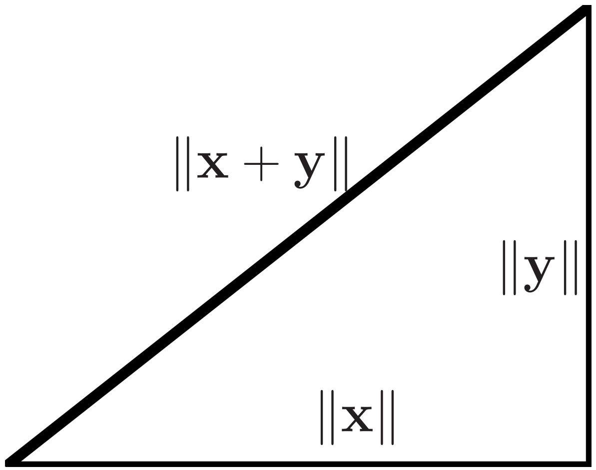
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Ortogonalita = kolmost

Pythagorova věta: $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2: \ \mathbf{x} \perp \mathbf{y} \ \Leftrightarrow \ \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2$



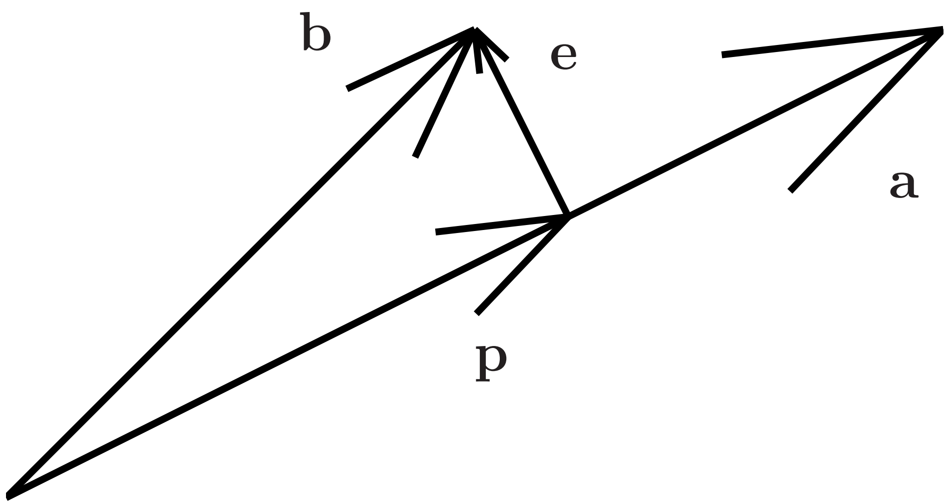
$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

Vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou **ortogonální** (kolmé), pokud

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0.$$

Projekce na podprostor

1D



Projekce $\mathbf{b}$ na poprostor $\langle \mathbf{a} \rangle$

Najdi $\mathbf{p} := x\mathbf{a}$: $(\mathbf{b} - \mathbf{p}) \perp \mathbf{a}$

2D

Projekce $\mathbf{b}$ na poprostor $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$

Najdi $\mathbf{p} := x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2$: $(\mathbf{b} - \mathbf{p}) \perp \mathbf{a}_1$ a $(\mathbf{b} - \mathbf{p}) \perp \mathbf{a}_2$

Motivace

JPEG komprese je projekce na podprostor

původní bitmapa

10% komprese Fourierovou bází

Metoda nejmenších čtverců = projekce na podprostor

Příklad: Opakovaným měřením pulzu jsme naměřili hodnoty: 72, 75, 69, 73. Kolik je správná hodnota?

Chceme najít $\widehat{x}$, které nejvíce vyhovuje soustavě následujících 4 rovnic o 1 neznámé:

$$\underbrace{(1,1,1,1)^T}_{=:\mathbf{A}} x = \underbrace{(72,75,69,73)^T}_{=:\mathbf{b}}.$$

Řešením je $\widehat{x}$, které minimalizuje následující eukleidovskou normu chyby řešení

$$\|\mathbf{A}\,\widehat{x} - \mathbf{b}\|^2 = (\widehat{x}-72)^2 + (\widehat{x}-75)^2 + (\widehat{x}-69)^2 + (\widehat{x}-73)^2.$$

Ukáže se, že výsledek splňuje normálovou rovnici

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \widehat{x} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$$

a v tomto případě se jedná o aritmetický průměr (ve statistice „střední hodnota")

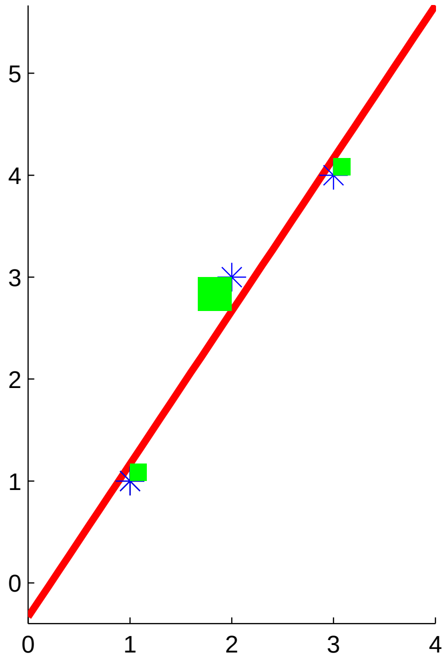
$$\widehat{x} = \frac{1}{4}(72+75+69+73) = 72,25.$$

Metoda nejmenších čtverců = projekce na podprostor

Příklad: Proložte body $(1,1)$, $(2,3)$ a $(3,4)$ nejlepší přímkou.

Hledáme parametry $a, b \in \mathbb{R}$ přímky $P := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y(x) := ax + b\}$ tak, že následující chyba je minimalizována (ve statistice „lineární regrese")

$$\|(y(1), y(2), y(3)) - (1,3,4)\|^2 = (a \cdot 1 + b - 1)^2 + (a \cdot 2 + b - 3)^2 + (a \cdot 3 + b - 4)^2.$$



Ukáže se, že výsledek $y(x) := (3/2)x - 1/3$ splňuje normálovou rovnici

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{a} \\ \widehat{b} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}, \quad \text{kde } \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

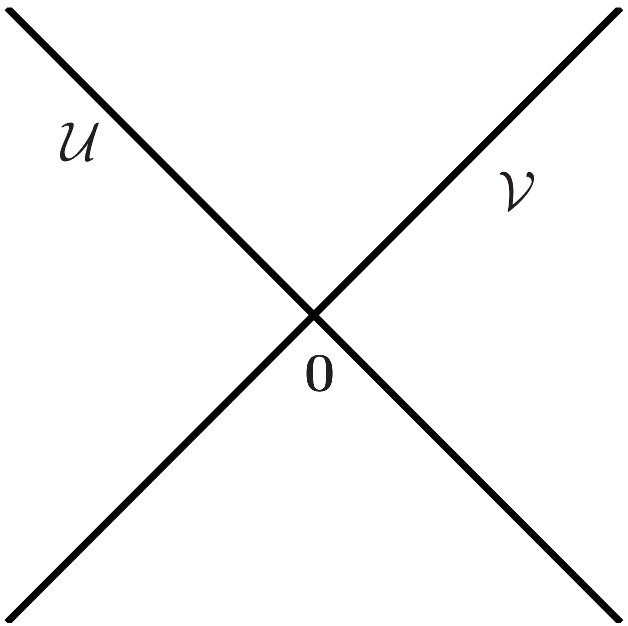
V tomto případě řešení minimalizuje obsahy čtverců, odtud název metody.

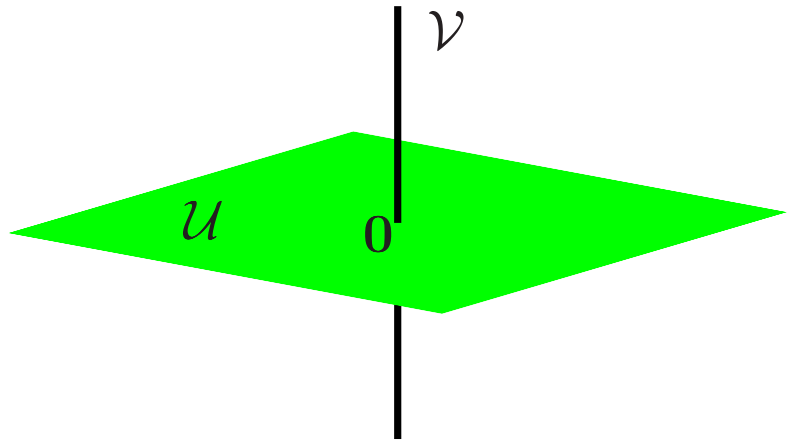
Ortogonální podprostory

Definice

Podprostory $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ prostoru $\mathbb{R}^n$ jsou **ortogonální**, pokud

$$\forall \mathbf{u} \in \mathcal{U} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$





Ortogonální podprostory

$\mathcal{N}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{R}(\mathbf{A})$

Mějme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Připomeňme si její nulový prostor

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \forall i \in \{1, \ldots, m\} : \mathbf{a}_i^{\mathrm{r}} \cdot \mathbf{x} = 0\} \, .$$

Vidíme, že vektory $\mathbf{x}$ z nulového prostoru jsou kolmé na všechny řádky matice $\mathbf{A}$, tedy i na jejich libovolnou lin. kombinaci, což jsou prvky z řádkového prostoru

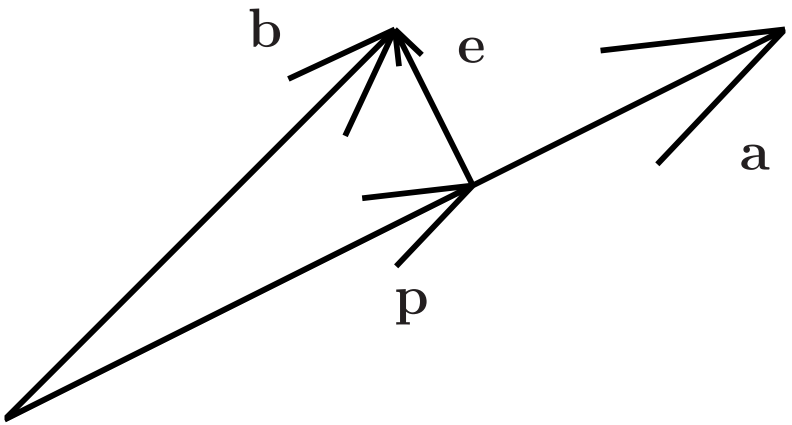
$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) := \{\alpha_1 \mathbf{a}_1^{\mathrm{r}} + \cdots + \alpha_m \mathbf{a}_m^{\mathrm{r}} : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\} = \mathcal{H}(\mathbf{A}^T).$$

Analogicky: $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T) \perp \mathcal{H}(\mathbf{A})$

neboť $\mathcal{H}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}^T)$.

Ortogonální projektory

1D



Mějme $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Projekcí vektoru $\mathbf{b}$ na podprostor $\langle \mathbf{a} \rangle$ se rozumí úloha

$$\text{Najdi } \mathbf{p} := x\mathbf{a} : \ \underbrace{(\mathbf{b} - \mathbf{p})}_{=\mathbf{e}} \perp \mathbf{a}.$$

Uvažujme nyní $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ jako sloupcové vektory. Z definice ortogonality dostáváme

$$x = \frac{\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}}, \quad \mathbf{p} = \left(\frac{\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}} \right) \mathbf{a} = \underbrace{\frac{1}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}} \left(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T \right)}_{=:\mathbf{P}} \cdot \mathbf{b}$$

Matice $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ se nazývá **ortogonální projektor**.

Ortogonální projektory

Ortogonální projekce na lineární obal vektorů

Mějme $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$. Ortogonální projekcí vektoru $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ na poprostor $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ se rozumí úloha

$$\text{Najdi } \mathbf{p} := \underbrace{x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n}_{=\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}} : \ \underbrace{(\mathbf{b} - \mathbf{p})}_{=\mathbf{e}} \perp \mathbf{a}_i \text{ pro každé } i \in \{1, \ldots, n\},$$

kde $\mathbf{A} := (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Podmínka ortogonality

$$\mathbf{0} = \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x})^T \cdot \mathbf{A}$$

vede na **normálovou rovnici**

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b},$$

která má jednoznačné řešení, jsou-li vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ lin. nezávislé. Výsledný vektor

$$\mathbf{p} = \underbrace{\left(\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T\right)}_{=:\mathbf{P}} \cdot \mathbf{b},$$

kde $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je **ortogonální projektor**.

Ortogonální projektory

Vlastnosti

Uvažujme lineárně nezávislé sloupce matice $\mathbf{A} := (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. **Ortogonální projektor na** $\mathcal{H}(\mathbf{A})$ je matice (lin. zobrazení)

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^T$$

a má tyto vlastnosti

- $\mathbf{P}$ je symetrická, tj. $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$ (plyne ze symetrie $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$),
- $\mathbf{P}$ je idempotentní (stačí aplikovat jednou), tj.

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \left(\mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^T\right) \cdot \left(\mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^T\right) =$$
$$= \mathbf{A} \cdot \underbrace{\left(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}\right)}_{=\mathbf{I}} \cdot \left(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{P}.$$

Doplňkový projektor

Matice $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ je ortog. projektor na ortogonální doplněk $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$. Platí: $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T) \perp \mathcal{H}(\mathbf{A})$.

Ortogonální projektory

$\mathcal{N}(\mathbf{A}^T) \oplus \mathcal{H}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$

Mějme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s lin. nezávislými sloupci. Už víme, že

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}^T) \perp \mathcal{H}(\mathbf{A}).$$

Z Frobeniovy věty plyne, že

$$\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}^T) + \dim \mathcal{H}(\mathbf{A}) = n,$$

a tedy existuje rozklad libovolného vektoru $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, kde $\mathbf{y} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$ a $\mathbf{z} \in \mathcal{H}(\mathbf{A})$. Tento rozklad je jednoznačný

$$\mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{P}) \cdot \mathbf{x}}_{\in \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)} + \underbrace{\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}}_{\in \mathcal{H}(\mathbf{A})},$$

kde $\mathbf{P}$ je ortogonální projektor na $\mathcal{H}(\mathbf{A})$ a $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ je jeho ortogonální doplněk.

Ortogonální projektory

Normálová rovnice

Mějme matici $\mathbf{A} := (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s lin. nezávislými sloupci a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Pokud $\mathbf{b} \notin \mathcal{H}(\mathbf{A})$, pak soustava

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

nemá řešení. Přesto může mít smysl řešit následující soustavu:

$$\mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b},$$

kde $\mathbf{P} := \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^T$ je ortogonální projektor na $\mathcal{H}(\mathbf{A})$. Jelikož $\mathbf{A}$ má lin. nezávislé sloupce, soustava je ekvivalentní **normálové rovnici**

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}.$$

Pokud $\mathbf{b} \in \mathcal{H}(\mathbf{A})$, pak $\mathbf{P} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}$ a normálová rovnice je ekvivalentní s původní. Pokud je navíc $\mathbf{A}$ (čtvercová) regulární, pak

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T = \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}\right) \cdot \left((\mathbf{A}^T)^{-1} \cdot \mathbf{A}^T\right) = \mathbf{I}.$$

Ortogonální projektory

Příklad: Opakovaným měřením pulzu jsme naměřili hodnoty: 72, 75, 69, 73. Kolik je správná hodnota?

Chceme najít $\widehat{x}$, které „nejvíce” vyhovuje soustavě následujících 4 rovnic o 1 neznámé:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{A}} \cdot x = \underbrace{\begin{pmatrix} 72 \\ 75 \\ 69 \\ 73 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{b}} .$$

Ortogonální projekce pravé strany na $\mathcal{H}(\mathbf{A})$ vede na normálovou rovnici

$$(1,1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \widehat{x} = (1,1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} 72 \\ 75 \\ 69 \\ 73 \end{pmatrix} ,$$

což dává řešení jako aritmetický průměr naměřených hodnot

$$\widehat{x} = \frac{1}{4}(72 + 75 + 69 + 73) = 72,25.$$

Ortogonální projektory

Příklad: Proložte body $(1,1)$, $(2,3)$ a $(3,4)$ nejlepší přímkou.

Hledáme parametry $a, b \in \mathbb{R}$ přímky $P := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y(x) := ax + b\big\}$, tj. chceme řešit soustavu rovnic

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{b}} .$$

Ortogonální projekce pravé strany na $\mathcal{H}(\mathbf{A})$ vede na normálovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{a} \\ \widehat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} ,$$

jehož řešení je

$$\widehat{a} = 3/2, \quad \widehat{b} = -1/3.$$

Ortogonální projektory

Gram–Schmidtův ortogonalizační/ortonormalizační algoritmus

Mějme bázi $E := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathbb{R}^n$. Ortogonalizujme/ortonormalizujme ji.

$$\mathbf{f}_1 := \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{q}_1 := \frac{1}{\|\mathbf{f}_1\|}\mathbf{f}_1,$$

$$\mathbf{f}_i := \mathbf{e}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}\mathbf{f}_j, \text{ kde } \alpha_{ij} = \frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{f}_j}{\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_j}, \ \mathbf{q}_i := \frac{1}{\|\mathbf{f}_i\|}\mathbf{f}_i, \text{ pro } i \in \{2, \dots, n\}.$$

Výsledkem je ortog. báze $F := (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$, resp. ortonorm. báze $Q := (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$.

Gram–Schmidtův algoritmus pomocí ortogonálních projektorů

Uvažujme všechny vektory jako sloupcové, pak pro $i \in \{2, \dots, n\}$

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{f}_j}{\mathbf{f}_j^T \cdot \mathbf{f}_j} \cdot \mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \underbrace{\frac{1}{\mathbf{f}_j^T \cdot \mathbf{f}_j}\left(\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_j^T\right)}_{=:\mathbf{P}_j} \cdot \mathbf{e}_i = \left(\mathbf{I} - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{P}_j\right) \cdot \mathbf{e}_i.$$

Metoda nejmenších čtverců = ortogonální projekce pravé strany

„Nejlepší" kandidát na řešení minimalizuje normu chyby.

Mějme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Pokud $\mathbf{b} \notin \mathcal{H}(\mathbf{A})$, pak soustava

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

nemá řešení. „Nejlepší" kandidát $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ na řešení minimalizuje normu chyby, tj.

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \ \|\mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|^2 \leq \|\mathbf{A} \cdot (\widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{y}) - \mathbf{b}\|^2.$$

Nerovnici lze přepsat takto:

$$0 \leq \underbrace{\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}}_{=\|\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}\|^2} + 2\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}} - 2\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}.$$

Vezměme lib. vektor z kanonické báze $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ a zvolme dvě $\mathbf{y} := \pm\varepsilon\mathbf{e}_i$, pak

$$0 \leq \varepsilon\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}\|^2 \pm 2(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b})_i.$$

Jelikož obě nerovnosti platí pro lib. malé $\varepsilon > 0$ a libovolný index $i \in \{1, \ldots, n\}$, pak

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b},$$

tedy opět řešíme **normálovou rovnici**.

Skalární součin

Zobecnění pojmů

Mějme vektorový prostor $\mathcal{V}$ a symetrickou bilineární formu $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, jejíž příslušná kvadratická forma $Q(\mathbf{v}) := B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ je pozitivně definitní.

- B je **skalární součin na** $\mathcal{V}$.
- Nenulové **vektory** $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ jsou **ortogonální vzhledem k** B, pokud

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_B := B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0.$$

- B **indukuje normu vektoru** $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$

$$\|\mathbf{v}\|_B := \sqrt{B(\mathbf{u}, \mathbf{u})}.$$

Příklad: $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$ **je skalární součín na** $\mathbb{R}^2$**.**

B je zjevně symetrická bilineární forma. Příslušná kvadr. forma

$$Q(\mathbf{x}) := B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 2(x_1)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_2)^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 > 0$$

pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, tedy Q je pozitivně definitní.

Skalární součin

$B(p,q) := \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx$ je (L2) skalární součin na $\mathcal{P}_1$.

Zvolme kanonickou bázi $E := (1, x)$ prostoru $\mathcal{P}_1$. Matice bilineární formy je

$$\mathbf{B}_E := \begin{pmatrix} B(1,1) & B(1,x) \\ B(x,1) & B(x,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 1\,dx & \int_0^1 x\,dx \\ \int_0^1 x\,dx & \int_0^1 x^2\,dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Bilineární forma je tedy symetrická. Klasifikujme její matici kongruencemi

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_2 := -\mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{s}_2 := -\mathbf{s}_1 + 2\mathbf{s}_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{1}{3}} \end{pmatrix},$$

a jelikož $1, \frac{1}{3} > 0$, kvadratická forma je pozitivně definitní.

Fourierova báze, viz jpeg, je ortonormální v tomto skalárním součinu.