Vlastní čísla a vektory

$$\boxed{A\cdot\bar{e} = \underset{\mathbb{C}}{\lambda}\cdot\bar{e}}, \quad \bar{e}\neq\bar{o}$$

1. $\underbrace{\det(A-\lambda I)}_{P_n(\lambda)} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

2. $(A-\lambda_i I)\cdot\bar{e}_i = \bar{o}$

Př. Zjistěte, zda $\bar{u} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ jsou vl. vektory

$$A = \begin{pmatrix}3 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot\bar{u} = \begin{pmatrix}5\\0\\1\\-4\end{pmatrix} \neq \lambda\cdot\bar{u} \Rightarrow \bar{u} \text{ není vl. v.}$$

$$A\cdot\bar{v} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix} \overset{?}{=} \underset{2}{\lambda}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \checkmark \Rightarrow \bar{v} \text{ je vl. vekt.}$$

Př. Vypočtěte vl. č. a vl. v. $A = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

1. $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ 1 & -2-\lambda\end{vmatrix}$

$$= (3-\lambda)\cdot(-2-\lambda) - 1\cdot 1$$

$$= \boxed{1\lambda^2 - 1\lambda - 7 \doteq 0}$$

$a = 1 \quad b = -1 \quad c = -7$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{+1 \pm \sqrt{1+28}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{29}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{29}}{2}$$

2) $$\left(\begin{array}{cc|c} 3-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda_1 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 3-\frac{1+\sqrt{29}}{2}, & 1, \\ 1, & -2-\frac{1+\sqrt{29}}{2} \end{pmatrix}$$

LZ řádky

$A \cdot \bar{e}_1 = \lambda_1 \bar{e}_1$ $\quad \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3-\frac{1+\sqrt{29}}{2} \end{pmatrix} \cdot t, \; t \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 3-\frac{1-\sqrt{29}}{2}, & 1 \\ 1, & -2-\frac{1-\sqrt{29}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3-\frac{1-\sqrt{29}}{2} \end{pmatrix} \cdot s, \; s \neq 0$$

Př. Lokalizujte vlastní čísla (pomocí Geršgorinových kruhů)

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

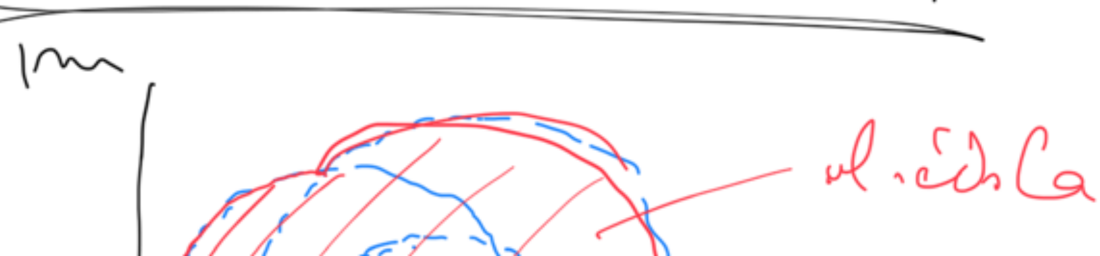
$\rightsquigarrow K_1$: střed $= 1$, poloměr $= \frac{1}{2}$

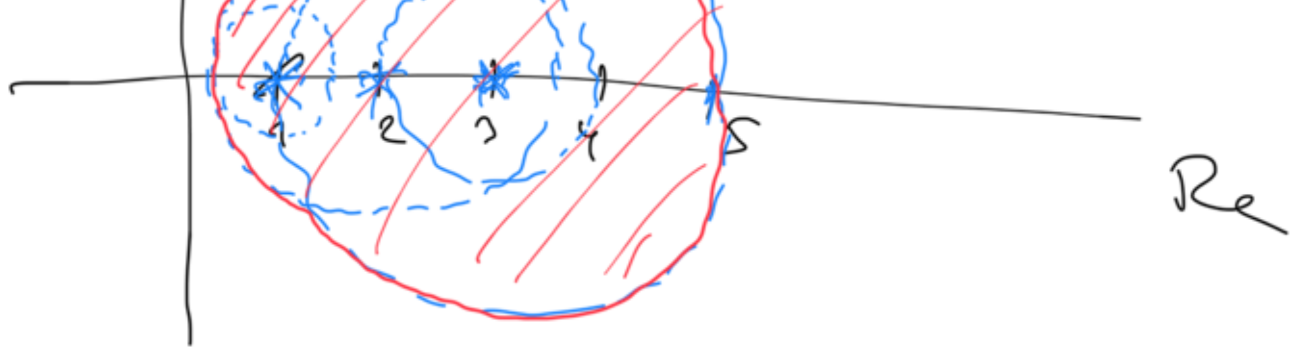
$\rightsquigarrow K_2$: střed $= 3$, pol. $= 1$

$\rightsquigarrow K_3$: stř. $= 2$, pol. $= 3/2$

$\rightsquigarrow K_4$: stř. $= 3$, pol. $= 2$

$$\sigma(A) = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$$




1
2
3
4
5
Re