Kvadratické formy

$$B(\bar{x},\bar{y}) := x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_1 - x_2y_2$$

… bilin. forma $: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$Q(\bar{x}) := B(\bar{x},\bar{y}) = x_1x_1 - \underbrace{x_1x_2 + 2x_2x_1}_{} - x_2x_2$$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$= x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$$

Př. Mějme kvadrat. formu na $\mathbb{R}^2$

$$Q(\bar{x}) := 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

$$B(\bar{x},\bar{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2 = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

nebo x_2y_1

$$(x_1,x_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$B_s(\bar{x},\bar{y}) = 2x_1y_1 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + x_2y_2 = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$Q = B_s = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Př. $Q(\bar{x}) := x_1^2 - x_1x_3 + x_2^2 - x_2x_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$B(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 - x_2y_3$$

$$= (x_1,x_2,x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

násobení matice

$B_s = (1 \quad 0 \quad -1/2$

$$B_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\| \\ Q$$

$B_S(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^T \cdot B_S \cdot \bar{y}$ ... násobení matice x matice

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}, \bar{y}$

Pokud $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\bar{x} \cdot B_S \cdot \bar{y}$$

násobení vektor x matice

násobení matice x vektor

Matice bilin./kvadr. forem se změní se změnou báze:

$$\boxed{Q_F = T^T \cdot Q_E \cdot T}$$ ... kongruence

regulární matice

Klasifikace kv. forem = zjištění znamének výsledků

Př. a) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$Q(\bar{x}) = \bar{x} \cdot D \cdot \bar{x} = 1x_1^2 + 2x_2^2 > 0 \text{ pro } \bar{x} \neq \bar{o}$$

pozitivně definitní (kladná)

$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow Q(\bar{x}) = -x_1^2 - 3x_2^2 < 0, \ \bar{x} \neq \bar{o}$

negativně definitní (záporná)

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow Q(\bar{x}) = 0x_1^2 \pm 3x_2^2 \geq 0 \ (\leq), \ \bar{x} \neq \bar{o}$

pozitivně semidefinitní (nezáporná) $\bar{x} = (1, 0)$

negativně semidefinitní
(nekladné)

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow Q(\bar{x}) = -1x_1^2 + 2x_2^2 \ \text{“}\gtreqless\text{”}\ 0$$

$$\bar{x} = (1,0):\ Q(\bar{x}) < 0$$

$$\bar{x} = (0,1):\ Q(\bar{x}) > 0$$

indefinitní (neurčité)

Př:
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow T^T \cdot Q \cdot T = D$$

$\vdots$ diagonální

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \end{matrix} \sim \overset{\quad\quad -2s_1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = D$$

indefinitní

$$T^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot T = \dots$$

stejné sloupcové úpravy

Př:
$$Q = \begin{pmatrix} \boxed{-3} & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
... matice kvadratické formy

$$\boxed{\bar{x} \cdot B_A \cdot \bar{x} = 0}$$

$$\left(T_3^T\left(T_2^T\left(T_1^T \cdot (Q) \cdot T_1\right) \cdot T_2\right) \cdot T_3\right)$$

$$\cancel{T_3 \cdot T_2 \cdot T_1}$$

$r_2 := 5 r_2 + r_1$

$\tilde{r}_3 := 3 \tilde{r}_3 + \tilde{r}_1$

$$\sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-15} & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

✓

$\tilde{r}_3 := 5 \tilde{r}_3 + \tilde{r}_2$

$s_2 := 3 s_2 + s_1$

$s_3 := 3 s_3 + s_1$

$$\sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -27.5 \end{pmatrix}$$

$s_3 := 5 s_3 + s_2$

$-3, -15, -27.5 < 0$

negative definite!