Matice lineárního zobrazení

$$\boxed{a(\bar{x}) = \mathbb{A}\cdot\bar{x} \text{ je lin. zobr.}}$$

Př: $a(\bar{x}) := \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 \\ x_1 \quad + x_3 \end{pmatrix}$

je lin. zobrazení z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^2$.

Spočtěte $\mathbb{A}_{E_3,E_2}$ v kan. bázi.

$a: U \to V$ lin.

E báze U

F báze V

$$\boxed{[a(\bar{u})]_F = \mathbb{A}_{EF}[\bar{u}]_E}$$

$$a(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1\cdot x_1 - 1\cdot x_2 + 3\cdot x_3 \\ 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{A}_{E_3,E_2}$$

Bilineární formy

$B: V \times V \to \mathbb{R}$

Př: $B(\bar{x},\bar{y}) = (x_1, x_2, x_3)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

je bilin. forma na $V = \mathbb{R}^3$

$$= (x_1, x_2, x_3)\cdot\begin{pmatrix} y_1 - y_2 + 2y_3 \\ y_2 + 2y_3 \\ 2y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_2}}$$

Př: Napište matici bilineární formy v kan. bázi $\mathbb{R}^3$

$B(\bar{x},\bar{y}) := \ldots$

$$B(x,y) = -x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_1 - x_2y_2$$

$$= \underline{x_1}(-1y_1 + 1y_2) + \underline{x_2}(2y_1 - 1y_2) \quad \text{..sk. součin}$$

$$= (x_1, x_2)\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1y_1 + 1y_2 \\ 2y_1 - 1y_2 \end{pmatrix}}_{\text{matice x vektor}} = (x_1,x_2)\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{= \mathbb{B}_E} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

<u>Př.</u> $\mathbb{B}(p(x), q(x)) := p(1)\cdot q(0)$

je bilineární forma na $\mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2$.

Spočtěte $\mathbb{B}_E$, kde $E := (1, x, x^2)$.

$$\mathbb{B}_E = \begin{pmatrix} \mathbb{B}(e_1(x), e_1(x)), & \mathbb{B}(e_1(x), e_2(x)), & \mathbb{B}(e_1, e_3) \\ \mathbb{B}(e_2, e_1) & \mathbb{B}(e_2, e_2) & \mathbb{B}(e_2, e_3) \\ \mathbb{B}(e_3, e_1) & \mathbb{B}(e_3, e_2) & \mathbb{B}(e_3, e_3) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{B}(e_1, e_1) = 1(1)\cdot 1(0) = 1$$

$$\mathbb{B}(e_1, e_2) = 1(1)\cdot x(0) = 1\cdot 0 = 0$$

$$\mathbb{B}(e_1, e_3) = 1(1)\cdot x^2(0) = 1\cdot 0 = 0$$

$$\mathbb{B}(e_2, e_1) = x(1)\cdot 1(0) = 1\cdot 1 = 1$$

$$\mathbb{B}(e_2, e_2) = x(1)\cdot x(0) = 1\cdot 0 = 0$$

$$\mathbb{B}(e_2, e_3) = x(1)\cdot x^2(0) = 1\cdot 0 = 0$$

$$\mathbb{B}_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

...

<u>Př.</u> $\mathbb{B}(p, q) := \int_0^1 p(x)\cdot q(x)\, dx \quad , E = (1, x, x^2)$

$$\to \mathbb{B}_E = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Symetrické matice $\forall i,j: B_{ij} = B_{ji} \iff \boxed{B = B^T}$

př. $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ je symetrická

Antisymetrické matice $\forall i,j: B_{ij} = -B_{ji}$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{B = -B^T}$$

př. $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \\ -5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ je antisymetrická matice

Př. Rozložte $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ na součet

symetrické a antisymetrické části

$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$B^S = \frac{1}{2}(B + B^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3+2}{2} \\ \boxed{1} & 5 & 1 \\ \frac{5}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^A = \frac{1}{2}(B - B^T) = B - B^S = \begin{pmatrix} 0 & -3 & +\frac{1}{2} \\ \boxed{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$