Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice. Dána čtvercová matice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo A a vektor $\bar{e} \in \mathbb{C}^m$, $\boxed{\bar{e} \neq \bar{o}}$, je příslušný vlastní vektor A, pokud splňují rovnici

$$\boxed{A \cdot \bar{e} = \lambda \cdot \bar{e}}$$

Př. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{I \cdot \bar{e}} = I \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \boxed{1 \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}}, \quad \bar{e} \neq \bar{o}$$

Matice I má jediné vlastní číslo $\lambda = 1$, kterému přísluší nekonečně mnoho vlastních vektorů $\bar{e} \in \mathbb{R}^2$, $\bar{e} \neq \bar{o}$.

Př. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$D \cdot \bar{e} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e_1 \\ -3e_2 \end{pmatrix} \neq \lambda \cdot \bar{e}$$

$$D \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

- $\underline{\lambda = 2}$ je vlastní číslo, kterému odpovídají vlastní vektory $\begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_1 \neq 0$
- $\underline{\lambda = -3}$ je vlastní číslo, kterému – " – vl. vektory $\begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix}$, $e_2 \neq 0$

Př. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Jsou $\bar{u}$, $\bar{v}$ vl. vektory A?

- $A \cdot \bar{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \lambda = 5/2$, $\Rightarrow \lambda = 1$ } nemůže být.

Ne, $\bar{u}$ není vl. vektor A.

- $A \cdot \bar{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{\lambda = 2}$

Ano, $\bar{v}$ je vl. vektorem A.

Př. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $A \cdot \bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 2$

Ano.

- $A \cdot \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ => nemá řešení

Ne.

- $A \cdot \bar{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda = 0}}$

Ano.

Př. Je $\lambda = 1, 2, 3$ vlastní číslo matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$?

- $\lambda = 1$: Hledáme $\bar{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \neq \bar{o}$:

$$A \cdot \bar{e} = 1 \cdot \bar{e} \Leftrightarrow (A - 1 \cdot I) \cdot \bar{e} = \bar{o}$$

tj. $\boxed{\bar{e} \in N(A - 1 \cdot I) \ ?}$

$$\left(A - 1 \cdot I \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} 1-1 & 1 \\ 1 & 1-1 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

$\Updownarrow$

$e_1 = e_2 = 0$

Ne, $\lambda = 1$ není vl. číslo A.

- $\underline{\underline{\lambda = 2}}$: Existuje nenulový vektor $\bar{e}$

$\bar{e} \in N(A - 2 \cdot I)$?

$\left(\begin{matrix} 1-2 & 1 \end{matrix} \,\middle|\, 0 \right) \quad \left(\begin{matrix} -1 & 1 \end{matrix} \,\middle|\, 0 \right) \quad (-1 \ \ldots$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1-2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{+r_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \end{array}\right)$$

$$-e_1 + e_2 = 0$$

$$\underline{\bar{e} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad \underline{\underline{t \in \mathbb{C}}}$$

Ano, $\lambda = 2$ je vl. číslo A.

- $\lambda = 3$ ... Není vl. číslo A.

<u>Obecný algoritmus</u>: Je dána $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

1. Nalezení vlastních čísel

$$A\bar{e} = \lambda \bar{e}, \quad \bar{e} \neq \bar{o}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{(A - \lambda \cdot I)}_{A_\lambda} \cdot \bar{e} = \bar{o}, \quad \bar{e} \neq \bar{o}$$

$$\Updownarrow$$

$A - \lambda I$ je singulární matice

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}}_{\text{polynom stupně } n} \quad \text{... charakteristická rovnice}$$

má n komplexních kořenů

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

ale některé mohou být násobné!

např. $\lambda_1 = \lambda_2$ ..

$\rightsquigarrow \underline{\underline{\lambda_1, \lambda_2, \ldots}}$

2. Výpočet vl. vektorů

λ_i : řešíme homog. soustavu lin. rovnic

$$(A - \lambda_i \cdot I) \cdot \bar{e} = \bar{o} \quad , \bar{e} \neq \bar{o}$$

$$\boxed{\left(A - \lambda_i \cdot I \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \to \bar{e} \neq \bar{o}}$$

Př. Vypočtěte všechna vlastní čísla a vektory

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ad 1. $A - \lambda \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 - 1^2 = \underline{\underline{\lambda^2 - 2\lambda}} \cancel{+1} \cancel{-1}$$

charakteristický polynom A

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 - 2\lambda = 0}$$

$$\lambda \cdot (\lambda - 2) = 0 \iff \underline{\underline{\lambda_1 = 0 \,,\ \lambda_2 = 2}}$$

Ad 2. $\lambda_1 = 0$: $$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{matrix}}_{A - \lambda_1 \cdot I} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

$$= \left(\begin{matrix} 1-0 & 1 \\ 1 & 1-0 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ \cancel{0} \end{matrix}\right)$$

$$\boxed{e_1 + e_2 = 0}$$

$$\underline{\underline{\bar{e} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}} \qquad e_2 = t \neq 0$$

$$e_1 = -t$$

$\cdot\ \lambda_2 = 2$: $$\left(\begin{matrix} 1-2 & 1 \\ 1 & 1-2 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} -1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ \cancel{0} \end{matrix}\right)$$

$$(-1, 1) \cdot \bar{e}_2 = 0$$

$$\bar{e}_2 \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\bar{e}_2 = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}} \,,\ s \neq 0$$

Vlastnímu číslu $\underline{\lambda_1 = 0}$ odpovídají vl.

vektor $\underline{e_1} = t\cdot\left(\ 1\ \right)$.

Vlastnímu číslu $\underline{\lambda_2 = 2}$ odpovídají vl. vektory $\underline{\bar{e}_2} = s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Př. $A = \begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

Ad 1. $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix}2-\lambda & 2\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 2\cdot(-1)$

$$\boxed{= \underbrace{1}_{a}\lambda^2 \underbrace{-3}_{b}\lambda + \underbrace{2+2}_{4} \stackrel{!}{=} 0}$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}$$

$$\underline{\lambda_{1,2}} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2} = \underline{\frac{3 \pm \sqrt{7}\,i}{2}}$$

Tonda 1b.

Honzíček 1b.

Ad 2. $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{7}\,i}{2}$: $(A - \lambda_1 I)\cdot\bar{e}_1 = \bar{o}$, $\bar{e}_1 \neq \bar{o}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2-\frac{3+\sqrt{7}i}{2}, & 2 & 0\\ -1, & \left(1-\frac{3+\sqrt{7}i}{2}\right) & 0\end{array}\right)$$

$$\underline{\left(2 - \frac{3+\sqrt{7}i}{2},\ 2\right)}\cdot\bar{e}_1 = 0 \iff \bar{e}_1 \perp \left(2-, ..\right)$$

$$\underline{\bar{e}_1 = t\cdot\begin{pmatrix}-2\\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}\,i\end{pmatrix}}, \quad t \neq 0$$

- $\lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{7}\,i}{2} = \lambda_1^*$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 - \frac{3-\sqrt{7}i}{2}, & 2 & 0 \\ \cancel{-1} & \cancel{1 - \frac{3-\sqrt{7}i}{2}} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$$\bar{e}_2 = s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i \end{pmatrix}$$

Geršgorinova věta

$$(A \cdot \bar{e})_i = (\lambda \cdot \bar{e})_i, \quad \bar{e} \neq \bar{o}$$

$$a_{i1} e_1 + a_{i2} e_2 + \dots + \widehat{a_{ii} e_i} + \dots + a_{in} e_n = \lambda e_i$$

$$\left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} e_j \right| = |(\lambda - a_{ii})| \, |e_i|$$

$$|-1 + 2 + 3| \leq |-1| + |2| + |3|$$

$$\wedge| \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \cdot |e_j|$$

$\bar{e} \neq \bar{o} \Rightarrow \exists i := \arg\max_{j \in \{1, \dots, n\}} |e_j|$

$$|\lambda - a_{ii}| \cdot \underbrace{\frac{|e_i|}{|e_i|}}_{=1} \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| \cdot \underbrace{\frac{|e_j|}{|e_i|}}_{\le 1}$$ dominantní index

$\forall \lambda \in \sigma(A)$
$\exists i$: $\boxed{|\lambda - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}|}$ … kruh K_i

$\Downarrow$

$$\boxed{\sigma(A) = \bigcup_{i=1}^{n} K_i}$$

Př. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Lokalizujte vlastní čísla A.

K_1 : střed $\underline{\underline{a_{11} = 3}}$, poloměr $r_1 = |a_{12}| + |a_{13}|$
$= 2 + 0 = \underline{\underline{2}}$

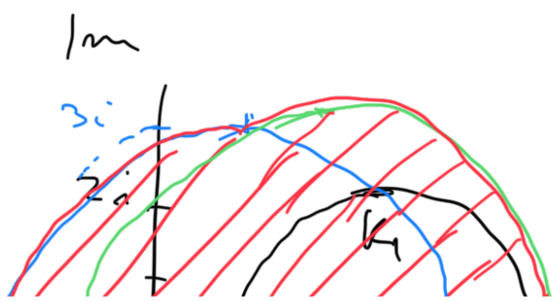
K_2 : střed $\underline{\underline{a_{22} = 1}}$, poloměr $r_2 = |a_{21}| + |a_{23}|$

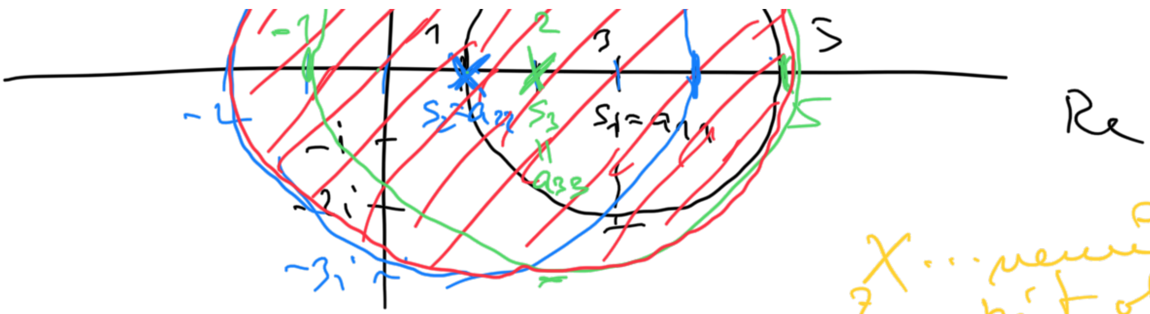
$\underline{\underline{r_2}} = |-1| + |2| = \underline{\underline{3}}$

K_3 : střed $\underline{\underline{a_{33} = 2}}$, poloměr $r_3 = |a_{31}| + |a_{32}|$

$\underline{\underline{r_3}} = 2 + 1 = \underline{\underline{3}}$

$$\underline{\underline{\sigma(A) \subset K_1 \cup K_2 \cup K_3}}$$





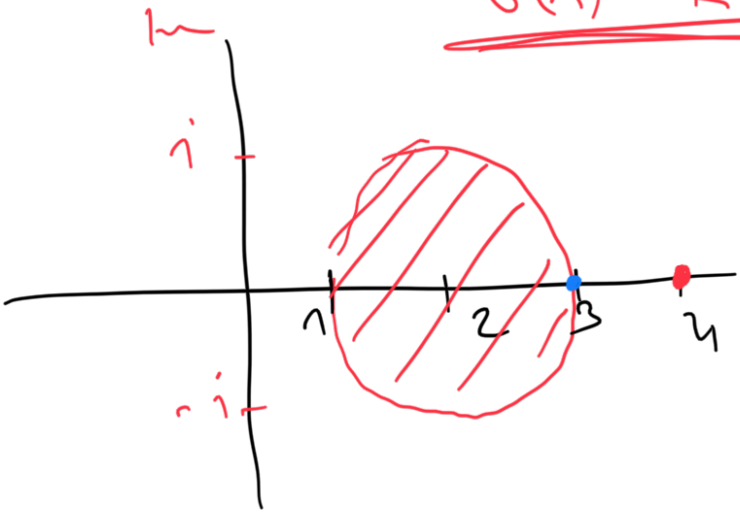
z ... nemůže být vl. číslo A, nebo $z \in \bigcup K_i$

<u>Př.</u> Lokalizujte $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (3)

$K_1: s_1 = 2, \quad r_1 = |-1| = 1$

$K_2: s_2 = 4 \ (3), \quad r_2 = |0| = 0$

$\sigma(A) \subset K_1 \cup \underbrace{\{4\}}_{= K_2}$



$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) \doteq 0$$

$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 4$