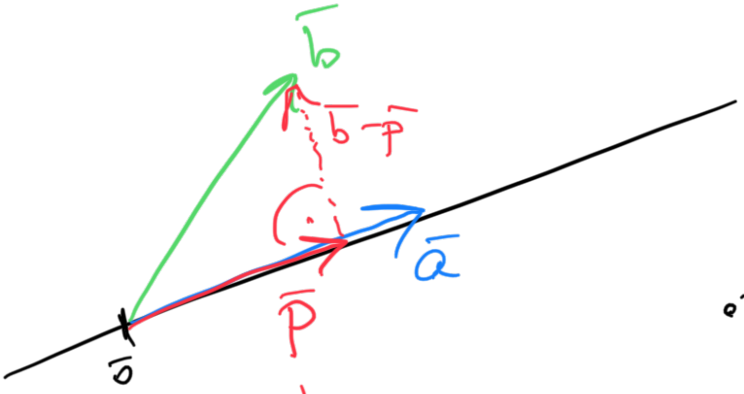
Ortogonální projekce, metoda nejmenších čtverců



- Daná přímka v $\mathbb{R}^2$ procházející $\bar o$ se směrnicí $\bar a$
- Daný vektor $\bar b \in \mathbb{R}^2$

Ortogonální projekce vektoru $\bar b$ na přímku $\bar a$ je vektor $\bar p \in \langle \bar a \rangle$ t.j. $\boxed{\bar p = x \cdot \bar a}$

$$\bar b - \bar p \perp \bar a$$

Hledám $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{(\bar b - x \cdot \bar a) \cdot \bar a = 0}$$

$$\boxed{x = \frac{\bar b \cdot \bar a}{\bar a \cdot \bar a}}$$

Př. Spočítejte ortog. projekci $\bar b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ na $\bar a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{3}{2} \leadsto \bar p = \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektor $\bar p$ je nejbližší k $\bar b$:

$$\|\bar b - \bar p\|^2 \le \|\bar b - y \cdot \bar a\|^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

(metoda nejmenších čtverců)

Př: Vypočítejte ortog. projekci $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ do roviny $\left\langle \bar{a}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{a}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\boxed{(A^T A)\bar{x} = A^T \bar{b}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \boxed{1} \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \; r_2 := 3r_2 - r_1 \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 14 & 10 \end{array}\right)$$

$$x_2 = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$3x_1 + \frac{5}{7} = 2$$

$$3x_1 = \frac{9}{7}, \quad x_1 = \frac{3}{7}$$

$$\bar{p} = A \cdot \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/7 \\ 5/7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Př. Řešte soustavu lin. rovnic metodou nejmenších čtverců.

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ \ldots \end{pmatrix}, \; \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \ldots \\ 2x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned}}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -2 & 9 \\ -2 & 3 & -2 \end{array}\right) \; r_2 := 3r_2 + r_1 \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -2 & 9 \\ 0 & 7 & 3 \end{array}\right) \qquad \underline{\underline{\hat{x}_2 = 3/7}}$$

$$6\hat{x}_1 - 2 \cdot \frac{3}{7} = 9$$

$$6\hat{x}_1 = \frac{63+6}{7} = \frac{69}{7}$$

$$\underline{\underline{\hat{x}_1 = \frac{69}{42}}}$$

<u>Př.</u> Vypočítejte ortogonální projekci vektoru $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ do „roviny" dané vektory $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; : \; A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ortogonální sloupce

$$A^T \cdot \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \qquad \hat{x}_1 = 0, \quad \hat{x}_2 = 3/2$$

$$\bar{p} = \hat{x}_1 \bar{a}_1 + \hat{x}_2 \bar{a}_2 = A \cdot \hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \ldots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ \ldots \end{pmatrix}$$