Kvadratické formy

$\mathbb{B} : V \times V \to \mathbb{R}$ .. bilin. forma

$\downarrow$

$Q : V \to \mathbb{R}$ $\quad \boxed{Q(\bar{v}) := \mathbb{B}(\bar{v}, \bar{v})}$

Př. $\mathbb{B}(\bar{x}, \bar{y}) := x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_2$ na $\mathbb{R}^2$

$\downarrow$

$$Q(\bar{x}) := \mathbb{B}(\bar{x}, \bar{x}) = x_1 x_1 - x_1 x_2 - x_2 x_2$$
$$= x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2$$

Př. $Q(\bar{x}) := -x_1^2 + 3x_1 x_3 - x_2^2$ na $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{B}(\bar{x}, \bar{y}) = -x_1 y_1 + 3x_1 y_3 - x_2 y_2$

$3x_3 y_1$

rozdíl je v antisymetrické části

$$\mathbb{B}(\bar{x}, \bar{y}) = [\bar{x}]_E^T \cdot \mathbb{B}_E \cdot [\bar{y}]_E$$

$\downarrow$

číslo

$$\boxed{Q(\bar{x})} = [\bar{x}]_E^T \cdot \mathbb{B}_E \cdot [\bar{x}]_E = \boxed{[\bar{x}]_E^T \mathbb{B}_E^S \cdot [\bar{x}]_E} + \cancel{\underbrace{[\bar{x}]_E^T \mathbb{B}_E^A [\bar{x}]_E}}$$

$$\mathbb{B}_E = \mathbb{B}_E^S + \mathbb{B}_E^A, \quad \mathbb{B}_E^S = (\mathbb{B}_E^S)^T, \quad \mathbb{B}_E^A = -(\mathbb{B}_E^A)^T$$

$$[\bar{x}]_E^T \mathbb{B}_E^A [\bar{x}]_E = [\bar{x}]_E^T (\mathbb{B}_E^A)^T [\bar{x}]_E = \underbrace{-[\bar{x}]_E^T\mathbb{B}_E^A[\bar{x}]_E}_{-\text{číslo}}$$

$\Rightarrow$ číslo $= 0$

Př. (pokrač.)

$$B(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x}^T \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \bar{y}$$

$$\swarrow$$

$$B_E^S = \begin{bmatrix} -1 & 3/2 \\ 3/2 & -1 \end{bmatrix} = \mathbb{Q}_E$$

Př. Mějme kvadrat. formu $Q(\bar{x}) := x_1^2 - x_1x_3 + x_3x_2$ na $\mathbb{R}^3$.

Najděte $\mathbb{Q}_E$ v kanonické bázi

$$Q(\bar{x}) = \bar{x}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \bar{x} = \bar{x}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \cancel{\bar{y}}\ \bar{x}$$

$$\| \quad \mathbb{Q}_E$$

Klasifikace kvadrat. forem (sym. matic) $\mathbb{Q}_E$

$=$ určení znaménka výsledku „sign $\mathcal{H}(Q)$"

Diagonální matice

Př. $\bullet\ \mathbb{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$: $Q(\bar{x}) = \bar{x}^T \cdot \mathbb{D} \cdot \bar{x} = 1x_1^2 + 2x_2^2 > 0$ pro $\bar{x} \neq \bar{0}$

„sign$\{d_{ii}\}$"

positivně definitní

$\bullet\ \mathbb{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$: $Q(\bar{x}) = \ldots = -x_1^2 - 3x_2^2 < 0$ pro $\bar{x} \neq \bar{0}$

negativně definitní

$\bullet\ \mathbb{D} = \begin{bmatrix} -10, & 0 \\ 0, & +27 \end{bmatrix}$: $Q(\bar{x}) = \ldots = -10x_1^2 + 27x_2^2$ $> 0,\ \bar{x} = (0,1)$; $< 0,\ \bar{y} = (1,0)$

indefinitní

$\bullet\ \mathbb{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \ldots \end{bmatrix}$: $Q(\bar{x}) \ldots = 2x_2^2 \geq 0$

$\cdot\ D = \begin{vmatrix} 0 & 2 \end{vmatrix} : Q(\bar{x}) = \dots - 2x_2 \geq 0$

nastává i pro $\bar{x} = (1,0) \neq$

positivně semi-definitní

$\bullet\ D = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{-3} \end{bmatrix}$ .. negativně semidefinitní

$\underline{0}, -3 \leq 0$

Obecné symetrické matice

Změna matice kvadrat. formy (bilin.) při změně báze

$$\boxed{Q_F = T^T \cdot Q_E \cdot T}$$

regulární

Kongruentní transformace jistě zachová i znaménko výsledku

$$Q(\bar{x}) = [\bar{x}]_E^T \cdot Q_E \cdot [\bar{x}]_E = [\bar{x}]_F^T \cdot Q_F \cdot [\bar{x}]_F$$

$\Rightarrow$ Obecnou symetrickou matici převedeme pomocí kongruence na diagonální.

Př.

$$Q_E = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 := 1r_2 - 2r_1 \\ r_3 := 1r_3 + 1r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$s_2 := 1s_2 - 2s_1$
$s_3 := 1s_3 + 1s_1$

$$T_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} : T_1^T \cdot Q_E \quad \cdot T_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 2 \end{pmatrix} \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad r_3' := r_2' + r_3' \quad \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_2^T \cdot T_1^T \cdot Q_\varepsilon \cdot T_1 \cdot T_2 \qquad s_3 := s_2 + s_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 > 0 \\ -2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{indefinitní}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Př. Klasifikujte

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad r_2' := 2r_2' - r_1'$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{10} & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad r_3' := 5r_3' - r_2'$$

$s_2 := 2s_2 - s_1$

1\. kongruentní transformace

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} \qquad 2, 10, 40 > 0$$

$s_3 := \ldots$

2\. kongruent.

pozitivně definitní