Soustavy lin. rovnic

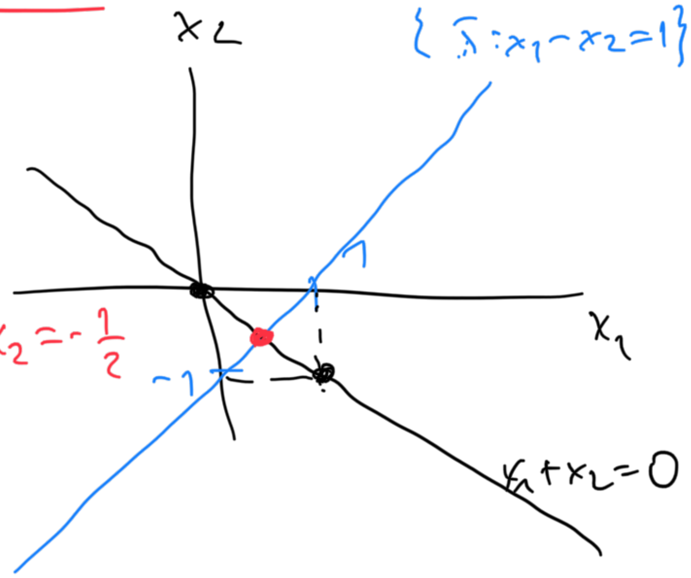
Př. 1

$$x_1 - x_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 = 0$$

Právě jedno řešení $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{1}{2}$

Zk.: $\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ ✓

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ✓

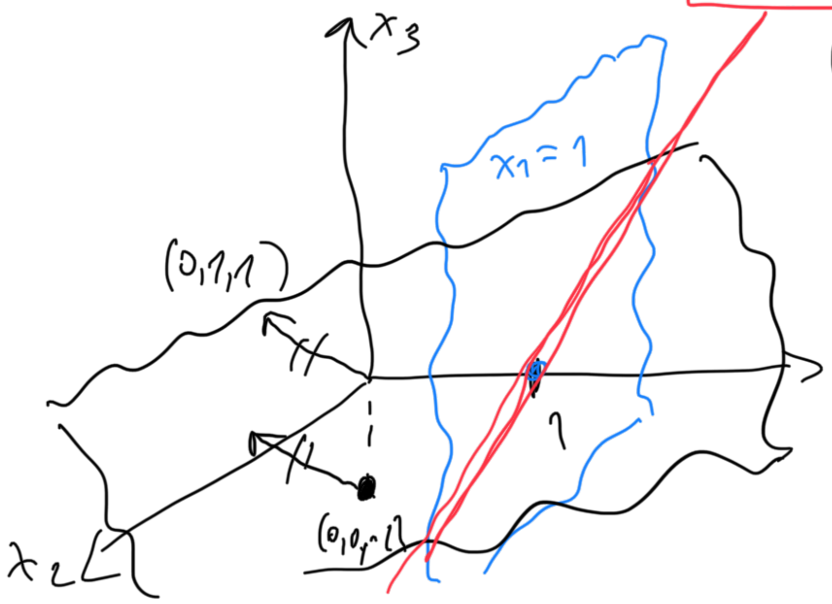


Př. 2

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \iff \boxed{\begin{aligned} \boxed{0x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -1} \\ x_1 \qquad\qquad = 1 \end{aligned}}$$

... 2 roviny v 3d ($v\ \mathbb{R}^3$)

$(0,1,1)$ ... normál. vektor k přímce



∞ řešení

Př. 3

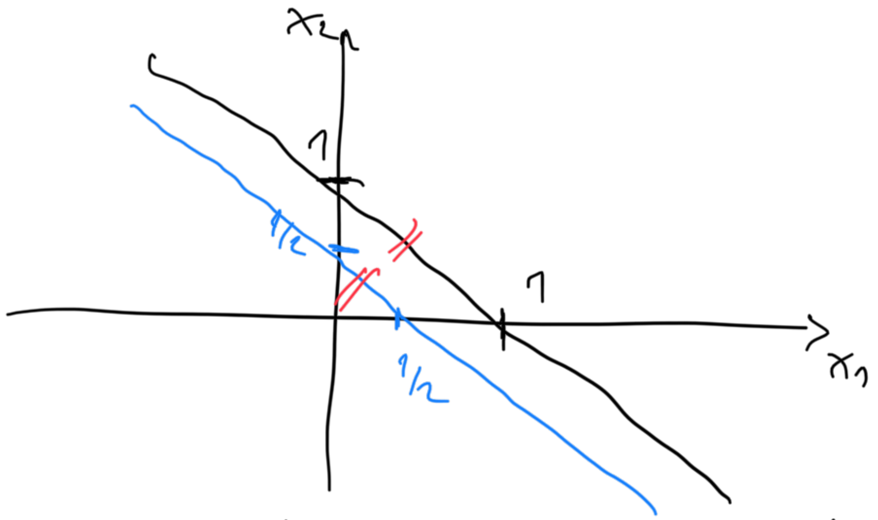
$$\boxed{\begin{aligned} x &= 1 \\ x &= 0 \end{aligned}}$$

0 řešení

Př. 4

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$-2x_1 - 2x_2 = -1$$

0 řešení



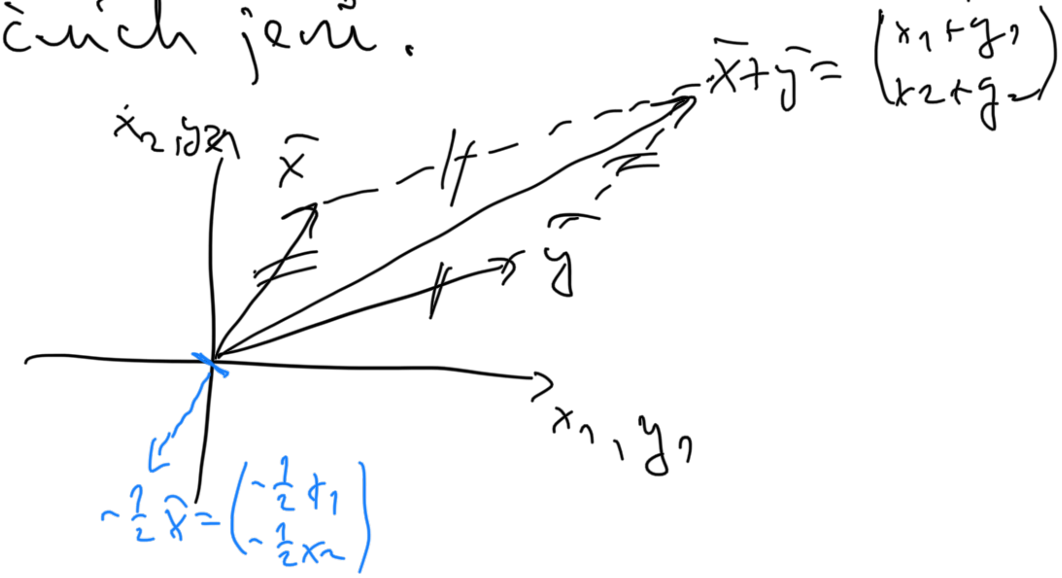
Organizace: homel.vsb.cz/~luk76/LA;

Komplexní čísla

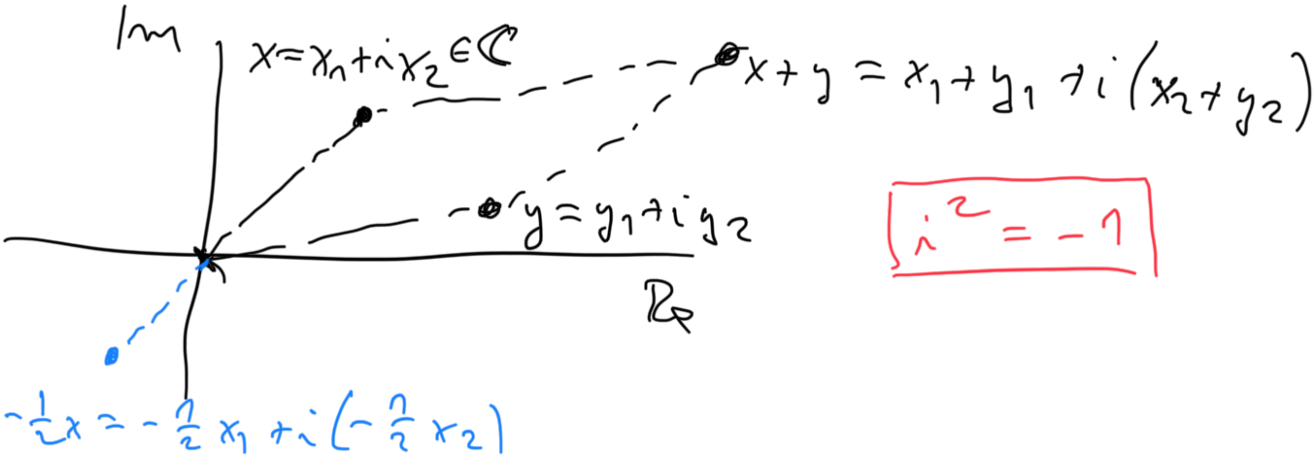
jsou elegantním zápisem některých rotačních jevů.

2d

$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{C}$



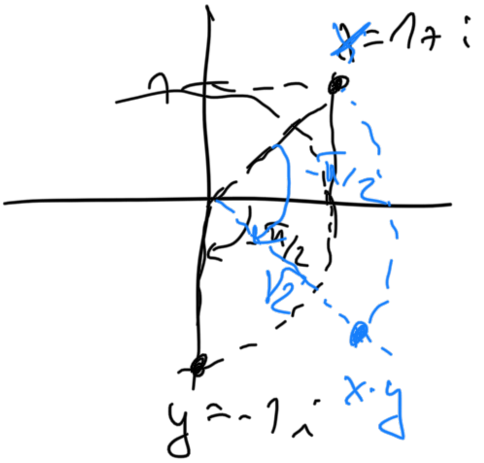
$\boxed{i^2 = -1}$

Goniometrický (exponenciální) zápis

$$x = 1 + i\cdot 1 = \underset{\sqrt{1^2+1^2}}{\overset{}{\sqrt{2}}} \cdot \underbrace{\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}_{= e^{i\pi/4}} = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\alpha,\beta\in\mathbb{R}: e^{\alpha}\cdot e^{\beta} = e^{\alpha+\beta}$$

$$x\cdot y = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot \underbrace{1\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}_{y}$$



$$= \sqrt{2}e^{i\pi/4}\cdot 1\cdot e^{i(-\pi/2)}$$

$$= \sqrt{2}\cdot 1\cdot e^{i(\pi/4 - \pi/2)}$$

$$= \sqrt{2}\cdot e^{i(-\pi/4)} =$$

rotace o $-\pi/2$

Maticový zápis soustavy lin. rovnic

Motivace:

$$2x = 3$$

$$x = 2^{-1}\cdot 3$$

Dáno: $a, b\in\mathbb{R}$

$$ax = b$$

$\Updownarrow\ a\neq 0$

$$\boxed{x = a^{-1}\cdot b}$$

$$2x_1 + 1x_2 = 1$$

vektorově =

$$\left(2x_1 + 1x_2\right) = \left(1\right)$$

$$\boxed{1x_1 - 1x_2 = 2} \iff \begin{pmatrix} 1x_1 - 1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

Násobení matice krát vektor

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

analogie s

$$\boxed{a \cdot x = b} \qquad \boxed{A \cdot \bar{x} = \bar{b}}$$

$$\Updownarrow a \neq 0 \qquad\qquad \Updownarrow A \text{ regulární}$$

$$x = a^{-1} \cdot b \qquad\qquad \bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b}$$

Rozšířená matice soustavy $\left(A \mid \bar{b} \right)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Řešení soustav lineárních rovnic

Pozn. Kramerovo pravidlo je pomalé!

pouze pro 2x2, 3x3 soustavy,

pro větší je příliš náročné

Počet operací je $\sim n^4$ (nebo dokonce $n!$)

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -3$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = 1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad x_2 = -1$$

$$\boxed{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned}}$$

sečteme

$$\Longrightarrow 3x_1 = 3 \iff x_1 = 1$$

dosadíme

$$1 - x_2 = 2$$

$$-1 = x_2$$

Ekvivalentní úpravy

úprava soustavy lin. rovnic, která nemění její řešení.

1. Přičtení libovolného čísla k levé i pravé straně jedné rovnice

2\. rovnice: $x_1 - x_2 + 1 = 2 + 1$

Zároveň víme, že $1 = 2x_1 + x_2$

$$2x_1 + x_2 = 1$$

$$\underbrace{x_1 - \cancel{x_2} + (2x_1 + \cancel{x_2}) = 2 + 1}$$

$$3x_1 = 3$$

tj.

1. Přičtení jiné rovnice k dané rovnici.
2. Vynásobení rovnice nenulovým číslem

Př.

$$\boxed{\begin{aligned} 1x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}}$$

$\text{rov}_2 := \text{rov}_2 - 2 \cdot \text{rov}_1$

$$\text{rovnice}_i := \text{rovnice}_i + \alpha \cdot \text{rovnice}_j, \quad i \neq j$$

$$\Downarrow$$

$$1x_1 - 2x_2 = 1$$

$$\underbrace{\cancel{2x_1} - \cancel{2 \cdot 1 \cdot x_1}}_{0} + \underbrace{x_2 - 2\cdot(-2x_2)}_{5x_2} = \underbrace{0 - 2\cdot 1}_{-2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} 1x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 5x_2 &= -2 \end{aligned}} \iff \underline{\underline{x_2 = -2/5}}$$

$$\boxed{x_1 - 2\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) = 1}$$

dosadím do 1. rov.:

$$\underline{\underline{x_1}} = 1 - \frac{4}{5} = \underline{\frac{1}{5}}$$