Domácí úkol č. 9

1. Řešte soustavu lineárních rovnic.
$$\begin{aligned}(1-\imath)x+(1-2\imath)y &= 1-\imath\\ \imath x-2y &= \imath\end{aligned}$$

2. Vypočtěte inverzní matici k
$$\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{y},\ \text{kde } \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix},\ \mathbf{y}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda jsou vektory $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:
$$\mathbf{u}=(1,-1,2),\ \mathbf{v}=(2,2,2),\mathbf{w}=(-1,-1,-1).$$

5. Rozhodněte, zda je $p\in\mathcal{P}_2:=\{a_0+a_1x+a_2x^2\ :\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$ lineární kombinací $p_1,p_2,p_3\in\mathcal{P}_2$, kde
$$p(x)=-1-x-2x^2,\ p_1(x)=-2-x+2x^2,\ p_2(x)=2-x+2x^2,\ p_3(x)=1-2x.$$

6. Určete bázi a dimenzi $\mathcal{V}$:
$$\mathcal{V}:=\left\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\ :\ x_1-2x_2-2x_3=0,\ 2x_1-x_2-x_3=0\right\}.$$

7. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2:=\left\{p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\ :\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\right\}$. Vypočtěte souřadnice vektorů
$$p(x):=4x^2-2x-7,\quad q(x):=-2x^2-2$$
v bázi $E:=\{\mathbf{e}_1(x),\mathbf{e}_2(x),\mathbf{e}_3(x)\}$, kde
$$\mathbf{e}_1(x):=x^2+2x+1,\quad \mathbf{e}_2(x):=-x-2,\quad \mathbf{e}_3(x):=-x^2+2x.$$

8. Rozhodněte, zda zobrazení $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$ definované předpisem
$$\mathcal{A}((x_1,x_2,x_3))=(x_2+x_3,x_1+x_2+x_3,x_1-x_3)$$
je lineární.

9. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$ definovaného předpisy
$$\begin{aligned}\mathcal{A}((1,1,0))&=(1,-1,1)\\ \mathcal{A}((1,1,1))&=(1,0,1)\\ \mathcal{A}((0,1,0))&=(0,-1,0).\end{aligned}$$

10. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^3$ definované předpisy

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(1 + x - x^2) &= (1, 1, 1) \\
\mathcal{A}(1 - x + x^2) &= (-2, 1, 0) \\
\mathcal{A}(-1 + x + x^2) &= (1, -1, 0)
\end{aligned}$$

    Nalezněte alespoň jeden $p \in \mathcal{P}_2$ takový, že $\mathcal{A}(p) = (1, 2, 3)$.

11. Nalezněte matici lineárního zobrazení $\mathcal{L} : \mathbb{R}_3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_3, x_2 + x_3) \in \mathbb{R}_2$ vzhledem ke standartním bázím.

12. Dokažte nebo vyvraťte, že zadaná bilineární forma v $\mathbb{R}^3$ je skalární součin.

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2.$$

13. Vypočtěte přibližné řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

$$\begin{aligned}
2x + y + z &= 1 \\
x + y + z &= 0 \\
x - y - 2z &= -1 \\
-2x - y - z &= 0
\end{aligned}$$

14. Vypočtěte determinant následující matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Vypočtěte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$