Domácí úkol č. 8

1. Řešte soustavu lineárních rovnic s dvěma pravými stranami, tj. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{c}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda je $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ lineární kombinací $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, kde

$$\mathbf{v} = (1, 2, -2),\ \mathbf{x} = (2, 0, 2),\ \mathbf{y} = (-1, 0, -2),\ \mathbf{z} = (0, 0, 1).$$

5. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \left\{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

$$p(x) := x^2 - x - 1, \quad q(x) := -x^2 + 3x + 2, \quad r(x) := x^2 - 8x + 1.$$

6. Vypočtěte souřadnice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ v bázi $F := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, kde

$$\mathbf{v} = (-1, -1, -2),\ \mathbf{f}_1 = (-1, 2, 1),\ \mathbf{f}_2 = (2, -2, 1),\ \mathbf{f}_3 = (-2, -1, -2).$$

7. Určete bázi a dimenzi V

$$V = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 | a - c = 0 \wedge b = a\}.$$

8. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definované předpisy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((1, 1, -1)) &= (1, 1, 1) \\ \mathcal{A}((1, -1, 1)) &= (-2, 1, 0) \\ \mathcal{A}((-1, 1, 1)) &= (1, -1, 0) \end{aligned}$$

Nalezněte $\mathcal{A}((1, 2, 1))$.

9. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((1, 1, 0)) &= (-1, 1, 1) \\ \mathcal{A}((1, 1, 1)) &= (1, -1, 1) \\ \mathcal{A}((0, 1, 0)) &= (1, 1, -1). \end{aligned}$$

10. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1-x) &= (1,1)\\ \mathcal{A}(1+x+x^2) &= (1,2)\\ \mathcal{A}(-1+x+x^2) &= (2,1)\end{aligned}$$

Nalezněte alespoň jeden $p \in \mathcal{P}_2$ takový, že $\mathcal{A}(p) = (1,3)$.

11. Rozložte následující čtvercovou matici na symetrickou a antisymetrickou část:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Dokažte nebo vyvraťte, že zadaná bilineární forma v $\mathbb{R}^3$ je skalární součin.

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2.$$

13. Vypočtěte přibližné řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ x - y - 2z &= -1 \\ -x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

14. Vypočtěte determinant následující matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Lokalizujte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$