Domácí úkol č. 7

1. Řešte soustavu lineárních rovnic s dvěma pravými stranami, tj. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{c}$, kde
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda je $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ lineární kombinací $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, kde
$$\mathbf{v} = (-2, 0, -1),\ \mathbf{x} = (2, 2, -2),\ \mathbf{y} = (-1, 0, 1),\ \mathbf{z} = (1, 2, 1).$$

5. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \left\{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \ :\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\}$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:
$$p(x) := x - 2, \quad q(x) := x^2 - x - 1, \quad r(x) := -x^2 + 3x + 2.$$

6. Určete bázi a dimenzi $\mathcal{V}$:
$$\mathcal{V} := \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ :\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_1 - x_2 - x_3 = 0\right\}.$$

7. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \left\{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \ :\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\}$. Vypočtěte souřadnice vektorů
$$p(x) := 5x^2 - x + 2, \quad q(x) := -x^2 - 2x + 1$$
v bázi $E := \{\mathbf{e}_1(x), \mathbf{e}_2(x), \mathbf{e}_3(x)\}$, kde
$$\mathbf{e}_1(x) := x^2 + 2x + 1, \quad \mathbf{e}_2(x) := -x - 1, \quad \mathbf{e}_3(x) := x^2 - x.$$

8. Rozhodněte, zda zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definované předpisem
$$\mathcal{A}((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3, -x_1 - x_2 - x_3)$$
je lineární.

9. Nalezněte jádro a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ definovaného předpisy
$$\mathcal{A}((1, 1, -1)) = (1, 1)$$
$$\mathcal{A}((1, -1, 1)) = (1, -1)$$
$$\mathcal{A}((-1, 1, 1)) = (2, -1).$$

10. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(1+x) = (1,-1,1)\\
&\mathcal{A}(1+x+x^2) = (1,0,1)\\
&\mathcal{A}(x) = (0,-1,0).
\end{aligned}$$

11. Nalezněte matici lineárního zobrazení $\mathcal{L} : \mathbb{R}_3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 - 2x_3) \in \mathbb{R}_2$ vzhledem ke standartním bázím.

12. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\mathbf{u} = (0, 1, -1)$ do roviny určené vektory $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$ a $\mathbf{w} = (1, 1, 0)$.

13. Vypočtěte přibližné řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

$$\begin{aligned}
x - y + z &= 1\\
2x + y + z &= 2\\
x - 2y - 2z &= -1\\
-x - y - z &= 0
\end{aligned}$$

14. Zjistěte, které vektory $\mathbf{e}_1 := (2, 0, 2, 0)$, $\mathbf{e}_2 := (-1, 0, 1, 0)$ a $\mathbf{e}_3 := (0, -1, 1, 0)$ jsou vlastními vektory matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -11 & 0 & 13 & 0\\ 0 & 12 & 0 & 0\\ 13 & 0 & -11 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. Lokalizujte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 4 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$