Domácí úkol č. 6

1. Řešte soustavu lineárních rovnic s dvěma pravými stranami, tj. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{c}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2. Řešte soustavu lineárních rovnic a parametrizujte v případě nekonečně mnoha řešení.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda je $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ lineární kombinací $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, kde

$$\mathbf{v} = (-2, 2, 2), \ \mathbf{x} = (-2, -2, 2), \ \mathbf{y} = (-2, -2, 1), \ \mathbf{z} = (0, -1, -1).$$

5. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \left\{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

$$p(x) := 3x^2 + 2x, \quad q(x) := x^2 - 2x - 1, \quad r(x) := 3x^2 + 10x + 3.$$

6. Vypočtěte souřadnice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ v bázi $F := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, kde

$$\mathbf{v} = (2, -1, -1), \ \mathbf{f}_1 = (0, 1, 1), \ \mathbf{f}_2 = (-2, -2, 0), \ \mathbf{f}_3 = (-2, -1, -1).$$

7. Určete bázi a dimenzi V

$$V = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 | a + 2b - c = 0 \wedge a + b = -b - c\}.$$

8. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((1, 1, 0)) &= (1, -1) \\ \mathcal{A}((1, 1, 1)) &= (1, 2) \\ \mathcal{A}((0, 1, 0)) &= (0, -1) \end{aligned}$$

Nalezněte alespoň jeden vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ takový, že $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = (2, 3)$.

9. Nalezněte jádro a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((1,1,-1)) &= (2,1)\\ \mathcal{A}((1,-1,1)) &= (-2,-1)\\ \mathcal{A}((-1,1,1)) &= (4,2).\end{aligned}$$

10. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1-x) &= (1,-1,-1)\\ \mathcal{A}(1+x+x^2) &= (-1,1,-1)\\ \mathcal{A}(-1+x+x^2) &= (0,0,1).\end{aligned}$$

11. Nalezněte matici lineárního zobrazení $\mathcal{L} : \mathbb{R}_3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_2, x_1 - x_3) \in \mathbb{R}_2$ vzhledem ke standartním bázím.

12. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\mathbf{u} = (0,1,-1)$ do roviny určené vektory $\mathbf{v} = (1,-1,0)$ a $\mathbf{w} = (1,1,0)$.

13. Vypočtěte přibližné řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 1\\ x + y + z &= 2\\ x - y - 2z &= -1\\ -x - y - z &= 0\end{aligned}$$

14. Vypočtěte determinant následující matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1\\ -1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

15. Lokalizujte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}.$$