

## Domácí úkol č. 5

1. Řešte soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned}(1 - i)x + (2 + i)y &= i \\ ix - 2y &= 1\end{aligned}$$

2. Vypočtěte inverzní matici k

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Správně uzavorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda je  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  lineární kombinací  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ , kde

$$\mathbf{v} = (-2, -2, -1), \mathbf{x} = (-1, 2, 1), \mathbf{y} = (-1, 2, 1), \mathbf{z} = (-1, 1, 1).$$

5. Mějme vektorový prostor  $\mathcal{P}_2 := \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ . Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

$$p(x) := 3x + 2, \quad q(x) := x^2 - 3x - 1, \quad r(x) := -x^2 + 3x + 3.$$

6. Vypočtěte souřadnice  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  v bázi  $F := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ , kde

$$\mathbf{v} = (2, -1, -1), \mathbf{f}_1 = (0, 1, 1), \mathbf{f}_2 = (-2, -2, 0), \mathbf{f}_3 = (-2, -1, -1).$$

7. Určete bázi a dimenzi  $V$

$$V = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \mid a + 2b + c = 0 \wedge a + b = -b + c\}.$$

8. Rozhodněte, zda zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  definované předpisem

$$\mathcal{A}((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2, -x_1 + x_3)$$

je lineární.

9. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  definovaného předpisem

$$\mathcal{A}((1, -1, 0)) = (1, -1, -1)$$

$$\mathcal{A}((1, 1, 1)) = (-1, 1, -1)$$

$$\mathcal{A}((-1, 1, 1)) = (0, 0, 1).$$

10. Je dáno lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^2$  definované předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1+x) &= (1, 1) \\ \mathcal{A}(1+x+x^2) &= (-2, 1) \\ \mathcal{A}(x) &= (1, -1)\end{aligned}$$

Nalezněte alespoň jeden  $p \in \mathcal{P}_2$  takový, že  $\mathcal{A}(p) = (2, 3)$ .

11. Nalezněte matici lineárního zobrazení  $\mathcal{L} : \mathbb{R}_3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3) \in \mathbb{R}_2$  vzhledem ke standardním bázím.

12. Dokažte nebo vyvráťte, že zadaná bilineární forma v  $\mathbb{R}^3$  je skalární součin.

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1.$$

13. Klasifikujte následující matici kvadratické formy:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -10 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

14. Zjistěte, které vektory  $\mathbf{e}_1 := (2, 0, 1, 2)$ ,  $\mathbf{e}_2 := (-1, 1, -1, -2)$  a  $\mathbf{e}_3 := (0, -1, 1, 0)$  jsou vlastními vektory matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. Lokalizujte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$