

Domácí úkol č. 4

1. Řešte soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned}(1 - i)x + (1 - 2i)y &= 1 - i \\ ix - 2y &= i\end{aligned}$$

2. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda je $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ lineární kombinací $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, kde

$$\mathbf{v} = (1, 2, -2), \mathbf{x} = (2, 0, 2), \mathbf{y} = (-1, 0, -2), \mathbf{z} = (0, 0, 1).$$

5. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

$$p(x) := 2x^2 + x + 2, \quad q(x) := 3x^2 - 3x + 1, \quad r(x) := 9x + 4.$$

6. Určete bázi a dimenzi \mathcal{V} :

$$\mathcal{V} := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

7. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Vypočtěte souřadnice vektorů

$$p(x) := -x^2 + 3x + 3, \quad q(x) := -x^2 - 3x + 1$$

v bázi $E := \{\mathbf{e}_1(x), \mathbf{e}_2(x), \mathbf{e}_3(x)\}$, kde

$$\mathbf{e}_1(x) := x^2 + x + 1, \quad \mathbf{e}_2(x) := -x - 2, \quad \mathbf{e}_3(x) := x^2 + x.$$

8. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definované předpisy

$$\mathcal{A}((1, 1, -1)) = (0, 1, 2)$$

$$\mathcal{A}((1, -1, 1)) = (1, 0, 2)$$

$$\mathcal{A}((-1, 1, 1)) = (1, 1, 1)$$

Nalezněte $\mathcal{A}((2, 1, 1))$.

9. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\mathcal{A}((1, 1, 0)) = (-1, 1, 1)$$

$$\mathcal{A}((1, 1, 1)) = (1, -1, 1)$$

$$\mathcal{A}((0, 1, 0)) = (1, 1, -1).$$

10. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\mathcal{A}(1 - x) = (1, 3)$$

$$\mathcal{A}(1 + x + x^2) = (1, 2)$$

$$\mathcal{A}(-1 + x + x^2) = (1, 1)$$

Nalezněte alespoň jeden $p \in \mathcal{P}_2$ takový, že $\mathcal{A}(p) = (1, -1)$.

11. Nalezněte matici lineárního zobrazení $\mathcal{L} : \mathbb{R}_3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_3, x_2 + x_3) \in \mathbb{R}_2$ vzhledem ke standardním bázím.
12. Vypočtete ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ do roviny určené vektory $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$ a $\mathbf{w} = (0, 1, 2)$.
13. Vypočtete přibližné řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

$$2x + y + z = 1$$

$$x + y + z = 0$$

$$x - y - 2z = -1$$

$$-2x - y - z = 0$$

14. Zjistěte, které vektory $\mathbf{e}_1 := (1, 0, -1, 0)$, $\mathbf{e}_2 := (0, 1, 0, 0)$ a $\mathbf{e}_3 := (2, 0, -2, 0)$ jsou vlastními vektory matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

15. Lokalizujte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$