Domácí úkol č. 30

1. Řešte soustavu lineárních rovnic s dvěma pravými stranami, tj. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{c}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

$$\mathbf{u} = (1, -1, 2),\ \mathbf{v} = (2, 2, 2), \mathbf{w} = (-1, -1, -1).$$

5. Rozhodněte, zda je $p \in \mathcal{P}_2 := \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ lineární kombinací $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_2$, kde

$$p(x) = -1 - x - 2x^2,\ p_1(x) = -2 - x + 2x^2,\ p_2(x) = 2 - x + 2x^2,\ p_3(x) = 1 - 2x.$$

6. Vypočtěte souřadnice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ v bázi $F := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, kde

$$\mathbf{v} = (2, -1, -1),\ \mathbf{f}_1 = (2, -1, -2),\ \mathbf{f}_2 = (1, 2, -2),\ \mathbf{f}_3 = (0, -2, 0).$$

7. Určete bázi a dimenzi V

$$V = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 | a - c = 0 \wedge b = a\}.$$

8. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((1, -1, 0)) &= (1, 1) \\ \mathcal{A}((1, 1, 1)) &= (1, 2) \\ \mathcal{A}((-1, 1, 1)) &= (2, 1) \end{aligned}$$

Nalezněte alespoň jeden vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ takový, že $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = (1, 3)$.

9. Nalezněte jádro a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((1, -1, 0)) &= (1, 1, -1) \\ \mathcal{A}((1, 1, 1)) &= (1, -1, 0) \\ \mathcal{A}((-1, 1, 1)) &= (2, 0, -1). \end{aligned}$$

10. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(1+x) = (2,1,1)\\
&\mathcal{A}(1+x+x^2) = (1,-1,1)\\
&\mathcal{A}(x) = (1,2,0).
\end{aligned}$$

11. Rozložte následující čtvercovou matici na symetrickou a antisymetrickou část:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Dokažte nebo vyvraťte, že zadaná bilineární forma v $\mathbb{R}^3$ je skalární součin.

$$B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 4x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

13. Vypočtěte přibližné řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

$$\begin{aligned}
2x + y + z &= 1\\
x + y + z &= 0\\
x - y - 2z &= -1\\
-2x - y - z &= 0
\end{aligned}$$

14. Zjistěte, které vektory $\mathbf{e}_1 := (2,0,2,0)$, $\mathbf{e}_2 := (-1,0,1,0)$ a $\mathbf{e}_3 := (0,-1,1,0)$ jsou vlastními vektory matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -11 & 0 & 13 & 0\\ 0 & 12 & 0 & 0\\ 13 & 0 & -11 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. Lokalizujte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$