

Domácí úkol č. 3

1. Řešte soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned}(1-i)x + (1-2i)y &= 1-i \\ ix - 2y &= i\end{aligned}$$

2. Vypočtěte inverzní matici k

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Správně uzavorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

$$\mathbf{u} = (2, -2, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 2), \mathbf{w} = (-1, -1, 1).$$

5. Rozhodněte, zda je $p \in \mathcal{P}_2 := \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ lineární kombinací $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_2$, kde

$$p(x) = -2 - 2x - x^2, p_1(x) = -1 + 2x + x^2, p_2(x) = -1 + 2x + x^2, p_3(x) = -1 + x + x^2.$$

6. Určete bázi a dimenzi \mathcal{V} :

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - z \wedge 2z = x + 2y\}.$$

7. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Vypočtěte souřadnice vektorů

$$p(x) := -5x - 2, \quad q(x) := -x$$

v bázi $E := \{\mathbf{e}_1(x), \mathbf{e}_2(x), \mathbf{e}_3(x)\}$, kde

$$\mathbf{e}_1(x) := -x + 1, \quad \mathbf{e}_2(x) := x^2 - x - 1, \quad \mathbf{e}_3(x) := x + 1.$$

8. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\mathcal{A}((1, 1, 0)) = (1, -1)$$

$$\mathcal{A}((1, 1, 1)) = (1, 2)$$

$$\mathcal{A}((0, 1, 0)) = (0, -1)$$

Nalezněte $\mathcal{A}((1, 2, -2))$.

9. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((1, 1, 0)) &= (-1, 1, 1) \\ \mathcal{A}((1, 1, 1)) &= (1, -1, 1) \\ \mathcal{A}((0, 1, 0)) &= (1, 1, -1).\end{aligned}$$

10. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1 - x) &= (1, 1) \\ \mathcal{A}(1 + x + x^2) &= (1, 2) \\ \mathcal{A}(-1 + x + x^2) &= (2, 1)\end{aligned}$$

Nalezněte alespoň jeden $p \in \mathcal{P}_2$ takový, že $\mathcal{A}(p) = (1, 3)$.

11. Nalezněte matici lineárního zobrazení $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_2, 3x_2 + 4x_3) \in \mathbb{R}^2$ vzhledem ke standardním bázím.
12. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ do roviny určené vektory $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$ a $\mathbf{w} = (0, 1, 2)$.
13. Vypočtěte přibližné řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

$$\begin{aligned}2x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \\ x - y - 2z &= -1 \\ -2x - y - z &= 0\end{aligned}$$

14. Zjistěte, které vektory $\mathbf{e}_1 := (-2, 0, 2, 0)$, $\mathbf{e}_2 := (-1, 1, -1, -2)$ a $\mathbf{e}_3 := (0, -1, 1, 0)$ jsou vlastními vektory matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 7 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

15. Lokalizujte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$