Domácí úkol č. 29

1. Řešte soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} 2\imath x + y &= 1 \\ 2x - \imath y &= 1 \end{aligned}$$

2. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda je $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ lineární kombinací $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, kde

$$\mathbf{v} = (-2, 2, 2), \ \mathbf{x} = (-2, -2, 2), \ \mathbf{y} = (-2, -2, 1), \ \mathbf{z} = (0, -1, -1).$$

5. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \left\{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\}$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

$$p(x) := x^2 - x - 1, \quad q(x) := -x^2 - 2x + 1, \quad r(x) := -2x^2 + 2x + 4.$$

6. Vypočtěte souřadnice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ v bázi $F := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, kde

$$\mathbf{v} = (-2, -1, 1), \ \mathbf{f}_1 = (2, 0, 0), \ \mathbf{f}_2 = (-1, -2, -1), \ \mathbf{f}_3 = (-2, 2, -2).$$

7. Určete bázi a dimenzi V

$$V = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 | a + 2b - c = 0 \wedge a + b = -b - c\}.$$

8. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}((1, -1, 0)) = (1, 1) \\ &\mathcal{A}((1, 1, 1)) = (1, 2) \\ &\mathcal{A}((-1, 1, 1)) = (2, 1) \end{aligned}$$

Nalezněte $\mathcal{A}((2, 1, 2))$.

9. Nalezněte jádro a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}((1, -1, 0)) = (1, 1, 2) \\ &\mathcal{A}((1, 1, 1)) = (-2, -1, 0) \\ &\mathcal{A}((-1, 1, 1)) = (-1, 0, 2). \end{aligned}$$

10. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1-x) &= (1,-1)\\ \mathcal{A}(1+x+x^2) &= (1,-2)\\ \mathcal{A}(-1+x+x^2) &= (2,1)\end{aligned}$$

Nalezněte alespoň jeden $p \in \mathcal{P}_2$ takový, že $\mathcal{A}(p) = (1,3)$.

11. Rozložte následující čtvercovou matici na symetrickou a antisymetrickou část:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Vypočtěte matici bilineární formy $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ v kanonické bázi, kde

$$B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = u_1v_1 - u_2v_2 - 3u_3v_3 - 3u_1v_2 + 6u_2v_1 - u_2v_3 + u_3v_2 - 2u_1v_3.$$

13. Klasifikujte následující matici kvadratické formy:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

14. Vypočtěte determinant následující matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Vypočtěte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$