

Domácí úkol č. 28

1. Řešte soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned}(1 + i)x + (1 - i)y &= 1 \\ x - iy &= 0\end{aligned}$$

2. Vypočtěte inverzní matici k

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Správně uzavřete a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

$$\mathbf{u} = (2, -2, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 2), \mathbf{w} = (-1, -1, 1).$$

5. Rozhodněte, zda je $p \in \mathcal{P}_2 := \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ lineární kombinací $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_2$, kde

$$p(x) = 1 + 2x - 2x^2, p_1(x) = 2 + 2x^2, p_2(x) = -1 - 2x^2, p_3(x) = x^2.$$

6. Určete bázi a dimenzi \mathcal{V} :

$$\mathcal{V} := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

7. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Vypočtěte souřadnice vektorů

$$p(x) := 3x^2 - 2x - 5, \quad q(x) := x^2 - 2$$

v bázi $E := \{\mathbf{e}_1(x), \mathbf{e}_2(x), \mathbf{e}_3(x)\}$, kde

$$\mathbf{e}_1(x) := x + 1, \quad \mathbf{e}_2(x) := x^2 - x, \quad \mathbf{e}_3(x) := -x - 2.$$

8. Rozhodněte, zda zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definované předpisem

$$\mathcal{A}((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - 2x_2, 2x_1 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$$

je lineární.

9. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ definovaného předpisem

$$\mathcal{A}((1, 1, -1)) = (1, 1)$$

$$\mathcal{A}((1, -1, 1)) = (2, 2)$$

$$\mathcal{A}((-1, 1, 1)) = (-1, -1).$$

10. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^3$ definované předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1 + x - x^2) &= (1, 1, 1) \\ \mathcal{A}(1 - x + x^2) &= (-2, 1, 0) \\ \mathcal{A}(-1 + x + x^2) &= (1, -1, 0)\end{aligned}$$

Nalezněte alespoň jeden $p \in \mathcal{P}_2$ takový, že $\mathcal{A}(p) = (1, 2, 3)$.

11. Nalezněte matici lineárního zobrazení $\mathcal{L} : \mathbb{R}_3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3) \in \mathbb{R}_2$ vzhledem ke standardním bázím.

12. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ do roviny určené vektory $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$ a $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$.

13. Klasifikujte následující matici kvadratické formy:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -10 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

14. Zjistěte, které vektory $\mathbf{e}_1 := (2, 0, -2, 0)$, $\mathbf{e}_2 := (-1, 1, -1, -2)$ a $\mathbf{e}_3 := (0, -2, 0, 0)$ jsou vlastními vektory matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -7 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. Vypočtěte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$