Domácí úkol č. 27

1. Řešte soustavu lineárních rovnic s dvěma pravými stranami, tj. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{c}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

$$\mathbf{u} = (0, -1, -2),\ \mathbf{v} = (-1, -1, -2), \mathbf{w} = (-1, 0, 0).$$

5. Rozhodněte, zda je $p \in \mathcal{P}_2 := \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ lineární kombinací $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_2$, kde

$$p(x) = -1 - x - 2x^2,\ p_1(x) = -2 - x + 2x^2,\ p_2(x) = 2 - x + 2x^2,\ p_3(x) = 1 - 2x.$$

6. Vypočtěte souřadnice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ v bázi $F := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, kde

$$\mathbf{v} = (1, 2, -1),\ \mathbf{f}_1 = (2, 0, -2),\ \mathbf{f}_2 = (1, -2, 1),\ \mathbf{f}_3 = (2, -1, 1).$$

7. Určete bázi a dimenzi V

$$V = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 | a - c = 0 \wedge b = a\}.$$

8. Rozhodněte, zda zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definované předpisem

$$\mathcal{A}((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2, -x_1 + x_3)$$

je lineární.

9. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((1, 1, -1)) &= (2, 1) \\ \mathcal{A}((1, -1, 1)) &= (2, -2) \\ \mathcal{A}((-1, 1, 1)) &= (0, -3). \end{aligned}$$

10. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(1+x) &= (1,2) \\ \mathcal{A}(1+x+x^2) &= (1,1) \\ \mathcal{A}(x) &= (2,1) \end{aligned}$$

Nalezněte alespoň jeden $p \in \mathcal{P}_2$ takový, že $\mathcal{A}(p) = (2,3)$.

11. Rozložte následující čtvercovou matici na symetrickou a antisymetrickou část:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Ortonormalizujte následující bázi ve standartním skalárním součinu:

$$((1,1,-2),(1,0,1),(0,-1,1)).$$

13. Vypočtěte přibližné řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \\ x - 2y - 2z &= -1 \\ -x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

14. Zjistěte, které vektory $\mathbf{e}_1 := (-1,0,1,0)$, $\mathbf{e}_2 := (-1,1,-1,-2)$ a $\mathbf{e}_3 := (0,-1,0,0)$ jsou vlastními vektory matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

15. Lokalizujte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$