Domácí úkol č. 26

1. Řešte soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} -\imath x + (2-\imath)y &= 1-\imath \\ x - y &= \imath \end{aligned}$$

2. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C},\ \text{kde}\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 01 & \\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{y},\ \text{kde}\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix},\ \mathbf{y}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda jsou vektory $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

$$\mathbf{u}=(2,-2,1),\ \mathbf{v}=(2,2,2),\mathbf{w}=(-1,-1,1).$$

5. Rozhodněte, zda je $p\in\mathcal{P}_2 := \{a_0+a_1x+a_2x^2\ :\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$ lineární kombinací $p_1,p_2,p_3\in\mathcal{P}_2$, kde

$$p(x)=2x,\ p_1(x)=-2x+x^2,\ p_2(x)=1-x-x^2,\ p_3(x)=1+x+2x^2.$$

6. Určete bázi a dimenzi $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V} := \left\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\ :\ x_1+2x_2-2x_3=0,\ 2x_1+4x_2-4x_3=0\right\}.$$

7. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \left\{p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\ :\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\right\}$. Vypočtěte souřadnice vektorů

$$p(x) := -3x^2+6x+5,\quad q(x) := -x^2+7x-1$$

v bázi $E := \{\mathbf{e}_1(x),\mathbf{e}_2(x),\mathbf{e}_3(x)\}$, kde

$$\mathbf{e}_1(x) := x^2+2x+1,\quad \mathbf{e}_2(x) := -2x-1,\quad \mathbf{e}_3(x) := -x^2+x.$$

8. Rozhodněte, zda zobrazení $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$ definované předpisem

$$\mathcal{A}((x_1,x_2,x_3)) = (x_1+2x_2+x_3, x_1+x_2, -x_1+x_3)$$

je lineární.

9. Nalezněte jádro a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^2$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((1,1,-1)) &= (2,1)\\ \mathcal{A}((1,-1,1)) &= (2,-2)\\ \mathcal{A}((-1,1,1)) &= (0,-3).\end{aligned}$$

10. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(1+x) &= (1,1) \\ \mathcal{A}(1+x+x^2) &= (-1,0) \\ \mathcal{A}(x) &= (2,-1) \end{aligned}$$

Nalezněte $\mathcal{A}(1-x-x^2)$.

11. Nalezněte matici lineárního zobrazení $\mathcal{L} : \mathbb{R}_3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 - 2x_3) \in \mathbb{R}_2$ vzhledem ke standartním bázím.

12. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\mathbf{u} = (1,2,1)$ do roviny určené vektory $\mathbf{v} = (1,-1,0)$ a $\mathbf{w} = (1,1,1)$.

13. Klasifikujte následující matici kvadratické formy:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

14. Vypočtěte determinant následující matice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

15. Vypočtěte determinant následující matice pomocí ekvivalentních (Gaussových) úprav:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$