Domácí úkol č. 25

1. Řešte soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned}(1+2\imath)x + (1-2\imath)y &= 2-\imath\\ -x-\imath y &= \imath\end{aligned}$$

2. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C},\text{ kde } \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 3 & 0 & -2\end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{y},\text{ kde } \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 3\end{pmatrix},\ \mathbf{y}=\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda je $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ lineární kombinací $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^3$, kde

$$\mathbf{v}=(2,-2,-2),\ \mathbf{x}=(-1,-1,1),\ \mathbf{y}=(-2,-1,1),\ \mathbf{z}=(-1,-1,1).$$

5. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \{p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \ :\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

$$p(x):=x^2-x-1,\quad q(x):=-x^2-2x+1,\quad r(x):=-2x^2+2x+4.$$

6. Vypočtěte souřadnice $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ v bázi $F:=(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3)$, kde

$$\mathbf{v}=(-1,-1,-2),\ \mathbf{f}_1=(-1,2,1),\ \mathbf{f}_2=(2,-2,1),\ \mathbf{f}_3=(-2,-1,-2).$$

7. Určete bázi a dimenzi V

$$V=\{ax^2+bx+c\in\mathcal{P}_2 | a+c=0\wedge b=c-a\}.$$

8. Rozhodněte, zda zobrazení $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$ definované předpisem

$$\mathcal{A}((x_1,x_2,x_3))=(x_1-2x_2,2x_1+x_3,x_1+x_2+x_3)$$

je lineární.

9. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^2$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((1,1,-1))&=(-1,1)\\ \mathcal{A}((1,-1,1))&=(1,-1)\\ \mathcal{A}((-1,1,1))&=(1,1).\end{aligned}$$

10. Nalezněte jádro a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(1 + x - x^2) &= (1, 1) \\
\mathcal{A}(1 - x + x^2) &= (2, 2) \\
\mathcal{A}(-1 + x + x^2) &= (-1, -1).
\end{aligned}$$

11. Rozložte následující čtvercovou matici na symetrickou a antisymetrickou část:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

12. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ do roviny určené vektory $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$ a $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$.

13. Vypočtěte přibližné řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

$$\begin{aligned}
x - y + z &= 1 \\
2x + y + z &= 2 \\
x - 2y - 2z &= -1 \\
-x - y - z &= 0
\end{aligned}$$

14. Vypočtěte determinant následující matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. Vypočtěte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$