

Domácí úkol č. 24

1. Řešte soustavu lineárních rovnic s dvěma pravými stranami, tj. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{c}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2. Řešte soustavu lineárních rovnic a parametrizujte v případě nekonečně mnoha řešení.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

3. Správně uzavřete a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

$$\mathbf{u} = (2, -2, 1), \quad \mathbf{v} = (2, 2, 2), \quad \mathbf{w} = (-1, -1, 1).$$

5. Rozhodněte, zda je $p \in \mathcal{P}_2 := \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ lineární kombinací $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_2$, kde

$$p(x) = -2 - 2x - x^2, \quad p_1(x) = -1 + 2x + x^2, \quad p_2(x) = -1 + 2x + x^2, \quad p_3(x) = -1 + x + x^2.$$

6. Vypočtěte souřadnice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ v bázi $F := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, kde

$$\mathbf{v} = (0, 2, 2), \quad \mathbf{f}_1 = (-1, 1, 1), \quad \mathbf{f}_2 = (2, 2, 0), \quad \mathbf{f}_3 = (1, -2, 0).$$

7. Určete bázi a dimenzi V

$$V = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \mid a + 2b - c = 0 \wedge a + b = -b - c\}.$$

8. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\mathcal{A}((1, 1, 0)) = (1, -1)$$

$$\mathcal{A}((1, 1, 1)) = (1, 2)$$

$$\mathcal{A}((0, 1, 0)) = (0, -1)$$

Nalezněte $\mathcal{A}((1, 2, -2))$.

9. Nalezněte jádro a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisem

$$\mathcal{A}((1, 1, 0)) = (-1, 1, 1)$$

$$\mathcal{A}((1, 1, 1)) = (1, -1, 1)$$

$$\mathcal{A}((0, 1, 0)) = (1, 1, -1).$$

10. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definovaného předpisem

$$\mathcal{A}(1 + x - x^2) = (2, 1)$$

$$\mathcal{A}(1 - x + x^2) = (-2, -1)$$

$$\mathcal{A}(-1 + x + x^2) = (4, 2).$$

11. Rozložte následující čtvercovou matici na symetrickou a antisymetrickou část:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

12. Ortonormalizujte následující bázi ve standardním skalárním součinu:

$$((1, -2, 1), (-1, 0, -1), (0, 1, -1)).$$

13. Klasifikujte následující matici kvadratické formy:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

14. Vypočtěte determinant následující matice:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

15. Lokalizujte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$