Domácí úkol č. 23

1. Řešte soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} -\imath x + (2-\imath)y &= 1-\imath \\ x - y &= \imath \end{aligned}$$

2. Vypočtěte inverzní matici k

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{x},\ \text{kde } \mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda je $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ lineární kombinací $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^3$, kde

$$\mathbf{v}=(2,-2,-2),\ \mathbf{x}=(-1,-1,1),\ \mathbf{y}=(-2,-1,1),\ \mathbf{z}=(-1,-1,1).$$

5. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \left\{p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\ :\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\right\}$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

$$p(x) := x+2,\quad q(x) := x^2-x,\quad r(x) := x^2-2.$$

6. Vypočtěte souřadnice $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ v bázi $F := (\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3)$, kde

$$\mathbf{v}=(2,-1,-1),\ \mathbf{f}_1=(2,-1,-2),\ \mathbf{f}_2=(1,2,-2),\ \mathbf{f}_3=(0,-2,0).$$

7. Určete bázi a dimenzi V

$$V=\{ax^2+bx+c\in\mathcal{P}_2 | a+2b+c=0\wedge a+b=-b+c\}.$$

8. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((1,1,0)) &= (1,2) \\ \mathcal{A}((1,1,1)) &= (-1,1) \\ \mathcal{A}((0,1,0)) &= (2,-1) \end{aligned}$$

Nalezněte $\mathcal{A}((2,-2,1))$.

9. Nalezněte jádro a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((1,-1,0)) &= (1,-1,-1) \\ \mathcal{A}((1,1,1)) &= (-1,1,-1) \\ \mathcal{A}((-1,1,1)) &= (0,0,1). \end{aligned}$$

10. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(1+x) = (2,1,-1)\\
&\mathcal{A}(1+x+x^2) = (1,1,-1)\\
&\mathcal{A}(x) = (1,0,0).
\end{aligned}$$

11. Nalezněte matici lineárního zobrazení $\mathcal{L} : \mathbb{R}_3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_2, x_1 - x_3) \in \mathbb{R}_2$ vzhledem ke standartním bázím.

12. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\mathbf{u} = (1,2,1)$ do roviny určené vektory $\mathbf{v} = (1,-1,0)$ a $\mathbf{w} = (0,1,2)$.

13. Klasifikujte následující matici kvadratické formy:

$$\begin{pmatrix} 13 & -3 & -1 \\ -3 & 13 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Vypočtěte determinant následující matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Vypočtěte determinant následující matice pomocí ekvivalentních (Gaussových) úprav:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$