Domácí úkol č. 22

1. Řešte soustavu lineárních rovnic s dvěma pravými stranami, tj. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$ a $\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{c}$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}5\\ -2\\ 0\end{pmatrix}.$$

2. Řešte soustavu lineárních rovnic a parametrizujte v případě nekonečně mnoha řešení.

$$\begin{aligned}-x_1-x_2+x_3+2x_4 &= 2\\ x_1+2x_2+x_3-x_4 &= 3\\ -x_1+3x_3+3x_4 &= 7\\ x_1+x_2+x_3-x_4 &= 0\end{aligned}$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{y},\ \text{kde } \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix},\ \mathbf{y}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda jsou vektory $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

$$\mathbf{u}=(-2,-0,-1),\ \mathbf{v}=(0,1,1),\mathbf{w}=(0,-2,-2).$$

5. Rozhodněte, zda je $p\in\mathcal{P}_2:=\{a_0+a_1x+a_2x^2:\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$ lineární kombinací $p_1,p_2,p_3\in\mathcal{P}_2$, kde

$$p(x)=-2-2x-x^2,\ p_1(x)=-1+2x+x^2,\ p_2(x)=-1+2x+x^2,\ p_3(x)=-1+x+x^2.$$

6. Vypočtěte souřadnice $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ v bázi $F:=(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3)$, kde

$$\mathbf{v}=(2,-1,-1),\ \mathbf{f}_1=(2,-1,-2),\ \mathbf{f}_2=(1,2,-2),\ \mathbf{f}_3=(0,-2,0).$$

7. Určete bázi a dimenzi V

$$V=\{ax^2+bx+c\in\mathcal{P}_2|a+2b-c=0\wedge a+b=-b-c\}.$$

8. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$ definované předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((1,1,-1))&=(1,1,0)\\ \mathcal{A}((1,-1,1))&=(2,1,2)\\ \mathcal{A}((-1,1,1))&=(1,1,0)\end{aligned}$$

Nalezněte $\mathcal{A}((1,-1,0))$.

9. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((1,-1,0)) &= (1,1,-1)\\ \mathcal{A}((1,1,1)) &= (1,-1,0)\\ \mathcal{A}((-1,1,1)) &= (2,0,-1).\end{aligned}$$

10. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^3$ definované předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1+x-x^2) &= (1,1,1)\\ \mathcal{A}(1-x+x^2) &= (-2,1,0)\\ \mathcal{A}(-1+x+x^2) &= (1,-1,0)\end{aligned}$$

Nalezněte alespoň jeden $p \in \mathcal{P}_2$ takový, že $\mathcal{A}(p) = (1,2,3)$.

11. Nalezněte matici lineárního zobrazení $\mathcal{L} : \mathbb{R}_3 \ni (x_1,x_2,x_3) \mapsto (x_1-x_3, x_2+x_3) \in \mathbb{R}_2$ vzhledem ke standartním bázím.

12. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\mathbf{u} = (1,2,1)$ do roviny určené vektory $\mathbf{v} = (1,-1,0)$ a $\mathbf{w} = (1,1,1)$.

13. Klasifikujte následující matici kvadratické formy:

$$\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

14. Vypočtěte determinant následující matice:

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

15. Vypočtěte determinant následující matice pomocí ekvivalentních (Gaussových) úprav:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -2\\ 2 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 1 & -2\\ 2 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$