Domácí úkol č. 21

1. Řešte soustavu lineárních rovnic s dvěma pravými stranami, tj. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$ a $\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{c}$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-1&-2&1\\2&-1&-1\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}-6\\-5\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}.$$

2. Řešte soustavu lineárních rovnic a parametrizujte v případě nekonečně mnoha řešení.

$$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3-2x_4 &= 3\\ 2x_1-x_2+x_3+6x_4 &= 5\\ x_1+2x_2-x_3-3x_4 &= 1\\ -x_1\qquad +x_3-3x_4 &= -1\end{aligned}$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{y},\ \text{kde } \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\1&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\ \mathbf{y}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda je $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ lineární kombinací $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^3$, kde

$$\mathbf{v}=(0,2,0),\ \mathbf{x}=(0,-2,1),\ \mathbf{y}=(1,-1,-1),\ \mathbf{z}=(1,1,2).$$

5. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2:=\{p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\ :\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

$$p(x):=x^2+2,\quad q(x):=x^2-1,\quad r(x):=1.$$

6. Určete bázi a dimenzi $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V}:=\left\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\ :\ -x_1-2x_2+x_3=0,\ x_1+2x_2-x_3=0\right\}.$$

7. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2:=\{p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\ :\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$. Vypočtěte souřadnice vektorů

$$p(x):=x^2+x-2,\quad q(x):=3x^2+3x-3$$

v bázi $E:=\{\mathbf{e}_1(x),\mathbf{e}_2(x),\mathbf{e}_3(x)\}$, kde

$$\mathbf{e}_1(x):=x^2+x+1,\quad \mathbf{e}_2(x):=x-1,\quad \mathbf{e}_3(x):=x^2+x.$$

8. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((1,1,0))&=(1,-1)\\ \mathcal{A}((1,1,1))&=(1,2)\\ \mathcal{A}((0,1,0))&=(0,-1)\end{aligned}$$

Nalezněte alespoň jeden vektor $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ takový, že $\mathcal{A}(\mathbf{v})=(2,3)$.

9. Nalezněte jádro a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}((1,-1,0)) = (1,1,2)\\
&\mathcal{A}((1,1,1)) = (-2,-1,0)\\
&\mathcal{A}((-1,1,1)) = (-1,0,2).
\end{aligned}$$

10. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(1-x) = (1,1)\\
&\mathcal{A}(1+x+x^2) = (2,1)\\
&\mathcal{A}(-1+x+x^2) = (-1,1)
\end{aligned}$$

    Nalezněte $\mathcal{A}(-1+x^2))$.

11. Rozložte následující čtvercovou matici na symetrickou a antisymetrickou část:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

12. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\mathbf{u} = (0,1,-1)$ do roviny určené vektory $\mathbf{v} = (1,-1,0)$ a $\mathbf{w} = (1,1,0)$.

13. Klasifikujte následující matici kvadratické formy:

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -4 & -3 & -5 \\ -4 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

14. Vypočtěte determinant následující matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Vypočtěte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$