Domácí úkol č. 20

1. Řešte soustavu lineárních rovnic s dvěma pravými stranami, tj. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{c}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Řešte soustavu lineárních rovnic a parametrizujte v případě nekonečně mnoha řešení.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 2 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= -1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= -3 \end{aligned}$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda je $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ lineární kombinací $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, kde

$$\mathbf{v} = (1, 2, -2),\ \mathbf{x} = (2, 0, 2),\ \mathbf{y} = (-1, 0, -2),\ \mathbf{z} = (0, 0, 1).$$

5. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \left\{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

$$p(x) := 2x^2 + x + 2, \quad q(x) := 3x^2 - 3x + 1, \quad r(x) := 9x + 4.$$

6. Vypočtěte souřadnice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ v bázi $F := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, kde

$$\mathbf{v} = (2, -1, -1),\ \mathbf{f}_1 = (2, -1, -2),\ \mathbf{f}_2 = (1, 2, -2),\ \mathbf{f}_3 = (0, -2, 0).$$

7. Určete bázi a dimenzi V

$$V = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 | a + 2b - c = 0 \land a + b = -b - c\}.$$

8. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definované předpisy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((1, 1, -1)) &= (0, 1, 2) \\ \mathcal{A}((1, -1, 1)) &= (1, 0, 2) \\ \mathcal{A}((-1, 1, 1)) &= (1, 1, 1) \end{aligned}$$

Nalezněte alespoň jeden vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ takový, že $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = (1, 2, 3)$.

9. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((1,1,-1)) &= (-1,1)\\ \mathcal{A}((1,-1,1)) &= (1,-1)\\ \mathcal{A}((-1,1,1)) &= (1,1).\end{aligned}$$

10. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1+x) &= (1,1)\\ \mathcal{A}(1+x+x^2) &= (-2,1)\\ \mathcal{A}(x) &= (1,-1)\end{aligned}$$

Nalezněte $\mathcal{A}(1+2x+x^2)$.

11. Rozložte následující čtvercovou matici na symetrickou a antisymetrickou část:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

12. Vypočtěte matici bilineární formy $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ v kanonické bázi, kde

$$B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = u_1v_1 - u_2v_2 - 3u_1v_2 + 6u_2v_1 - u_1v_3 + 4u_3v_3.$$

13. Vypočtěte přibližné řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 1\\ x + y + z &= 2\\ x - y - 2z &= -1\\ -x - y - z &= 0\end{aligned}$$

14. Zjistěte, které vektory $\mathbf{e}_1 := (-2,0,2,0)$, $\mathbf{e}_2 := (-1,1,-1,-2)$ a $\mathbf{e}_3 := (0,-1,1,0)$ jsou vlastními vektory matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 7 & 0 & -9 & 0\\ 0 & 8 & 0 & 0\\ -9 & 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

15. Vypočtěte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} -1 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix}.$$