Domácí úkol č. 2

1. Řešte soustavu lineárních rovnic s dvěma pravými stranami, tj. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{c}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Řešte soustavu lineárních rovnic a parametrizujte v případě nekonečně mnoha řešení.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - 8x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= 3 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda je $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ lineární kombinací $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, kde

$$\mathbf{v} = (2, -2, -2), \ \mathbf{x} = (-1, -1, 1), \ \mathbf{y} = (-2, -1, 1), \ \mathbf{z} = (-1, -1, 1).$$

5. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \left\{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

$$p(x) := x^2 + x + 2, \quad q(x) := 2x^2 - x - 1, \quad r(x) := -6x - 10.$$

6. Určete bázi a dimenzi $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V} := \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

7. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \left\{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$. Vypočtěte souřadnice vektorů

$$p(x) := -3x^2 + 6x + 5, \quad q(x) := -x^2 + 7x - 1$$

v bázi $E := \{\mathbf{e}_1(x), \mathbf{e}_2(x), \mathbf{e}_3(x)\}$, kde

$$\mathbf{e}_1(x) := x^2 + 2x + 1, \quad \mathbf{e}_2(x) := -2x - 1, \quad \mathbf{e}_3(x) := -x^2 + x.$$

8. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definované předpisy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((1, 1, -1)) &= (1, 1, 0) \\ \mathcal{A}((1, -1, 1)) &= (2, 1, 2) \\ \mathcal{A}((-1, 1, 1)) &= (1, 1, 0) \end{aligned}$$

Nalezněte $\mathcal{A}((1, -1, 0))$.

9. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}((1,-1,0)) &= (1,-1,-1)\\
\mathcal{A}((1,1,1)) &= (-1,1,-1)\\
\mathcal{A}((-1,1,1)) &= (0,0,1).
\end{aligned}$$

10. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(1+x) &= (1,1)\\
\mathcal{A}(1+x+x^2) &= (-1,0)\\
\mathcal{A}(x) &= (2,-1)
\end{aligned}$$

    Nalezněte alespoň jeden $p \in \mathcal{P}_2$ takový, že $\mathcal{A}(p) = (2,3)$.

11. Rozložte následující čtvercovou matici na symetrickou a antisymetrickou část:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Vypočtěte matici bilineární formy $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ v kanonické bázi, kde

$$B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -u_2v_2 + 6u_2v_1.$$

13. Vypočtěte přibližné řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

$$\begin{aligned}
2x+y+z &= 1\\
x+y+z &= 0\\
x-y-2z &= -1\\
-2x-y-z &= 0
\end{aligned}$$

14. Zjistěte, které vektory $\mathbf{e}_1 := (2,0,-2,0)$, $\mathbf{e}_2 := (-1,1,-1,-2)$ a $\mathbf{e}_3 := (0,-2,0,0)$ jsou vlastními vektory matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -7 & 0 & 9 & 0\\ 0 & 12 & 0 & 0\\ 9 & 0 & -7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. Lokalizujte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -1\\ 1/2 & 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$