Domácí úkol č. 19

1. Řešte soustavu lineárních rovnic s dvěma pravými stranami, tj. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$ a $\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{c}$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 3\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 2\end{pmatrix}.$$

2. Řešte soustavu lineárních rovnic a parametrizujte v případě nekonečně mnoha řešení.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad &= 0\\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2\\ 2x_1 - x_2 \qquad + x_4 &= 1\\ -2x_2 + 3x_3 \qquad &= 1 \end{aligned}$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{x},\ \text{kde } \mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda jsou vektory $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

$$\mathbf{u}=(-1,-1,-1),\ \mathbf{v}=(0,0,-2),\mathbf{w}=(-1,1,0).$$

5. Rozhodněte, zda je $p\in\mathcal{P}_2 := \{a_0+a_1x+a_2x^2 \ :\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$ lineární kombinací $p_1,p_2,p_3\in\mathcal{P}_2$, kde

$$p(x)=-2+2x+2x^2,\ p_1(x)=-2-2x+2x^2,\ p_2(x)=-2-2x+x^2,\ p_3(x)=-x-x^2.$$

6. Určete bázi a dimenzi $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V}:=\left\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\ :\ -x_1+2x_2-2x_3=0,\ 2x_1+x_2+x_3=0\right\}.$$

7. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2:=\left\{p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\ :\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\right\}$. Vypočtěte souřadnice vektorů

$$p(x):=x^2-x+6,\quad q(x):=-2x^2+x-2$$

v bázi $E:=\{\mathbf{e}_1(x),\mathbf{e}_2(x),\mathbf{e}_3(x)\}$, kde

$$\mathbf{e}_1(x):=x^2+x+1,\quad \mathbf{e}_2(x):=-x+1,\quad \mathbf{e}_3(x):=x^2-x-1.$$

8. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((1,-1,0))&=(1,3)\\ \mathcal{A}((1,1,1))&=(1,2)\\ \mathcal{A}((-1,1,1))&=(1,1)\end{aligned}$$

Nalezněte $\mathcal{A}((1,2,3))$.

9. Nalezněte jádro a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((1,-1,0)) &= (1,-1,-1)\\ \mathcal{A}((1,1,1)) &= (-1,1,-1)\\ \mathcal{A}((-1,1,1)) &= (0,0,1).\end{aligned}$$

10. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1-x) &= (1,1)\\ \mathcal{A}(1+x+x^2) &= (2,1)\\ \mathcal{A}(-1+x+x^2) &= (-1,1)\end{aligned}$$

    Nalezněte alespoň jeden $p \in \mathcal{P}_2$ takový, že $\mathcal{A}(p) = (2,3)$.

11. Nalezněte matici lineárního zobrazení $\mathcal{L} : \mathbb{R}_3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 - 2x_3) \in \mathbb{R}_2$ vzhledem ke standartním bázím.

12. Dokažte nebo vyvraťte, že zadaná bilineární forma v $\mathbb{R}^3$ je skalární součin.

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

13. Vypočtěte přibližné řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

$$\begin{aligned}2x + y + z &= 1\\ x + y + z &= 0\\ x - y - 2z &= -1\\ -2x - y - z &= 0\end{aligned}$$

14. Zjistěte, které vektory $\mathbf{e}_1 := (2,0,1,2)$, $\mathbf{e}_2 := (-1,0,-1,0)$ a $\mathbf{e}_3 := (0,-1,1,0)$ jsou vlastními vektory matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

15. Lokalizujte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$