Domácí úkol č. 18

1. Řešte soustavu lineárních rovnic s dvěma pravými stranami, tj. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$ a $\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{c}$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ -2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}-5\\ 5\\ 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}.$$

2. Řešte soustavu lineárních rovnic a parametrizujte v případě nekonečně mnoha řešení.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3-2x_4 &= 1\\ 2x_1+5x_2-x_3-3x_4 &= 0\\ -x_1-3x_2 \qquad\; +x_4 &= 1\\ x_1+x_2+2x_3-x_4 &= 0\end{aligned}$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{y},\text{ kde }\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 3\end{pmatrix},\ \mathbf{y}=\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda je $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ lineární kombinací $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^3$, kde

$$\mathbf{v}=(0,2,0),\ \mathbf{x}=(0,-2,1),\ \mathbf{y}=(1,-1,-1),\ \mathbf{z}=(1,1,2).$$

5. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2:=\left\{p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\ :\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\right\}$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

$$p(x):=2x^2+x+2,\quad q(x):=3x^2-3x+1,\quad r(x):=9x+4.$$

6. Určete bázi a dimenzi $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V}:=\left\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\ :\ -x_1+2x_2-2x_3=0,\ 2x_1+x_2+x_3=0\right\}.$$

7. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2:=\left\{p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\ :\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\right\}$. Vypočtěte souřadnice vektorů

$$p(x):=-3x^2+6x+5,\quad q(x):=-x^2+7x-1$$

v bázi $E:=\{\mathbf{e}_1(x),\mathbf{e}_2(x),\mathbf{e}_3(x)\}$, kde

$$\mathbf{e}_1(x):=x^2+2x+1,\quad \mathbf{e}_2(x):=-2x-1,\quad \mathbf{e}_3(x):=-x^2+x.$$

8. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((1,1,0)) &= (1,-1)\\ \mathcal{A}((1,1,1)) &= (1,2)\\ \mathcal{A}((0,1,0)) &= (0,-1)\end{aligned}$$

Nalezněte $\mathcal{A}((1,2,-2))$.

9. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((1,1,0)) &= (2,1,-1)\\ \mathcal{A}((1,1,1)) &= (1,1,-1)\\ \mathcal{A}((0,1,0)) &= (1,0,0).\end{aligned}$$

10. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1+x) &= (1,1)\\ \mathcal{A}(1+x+x^2) &= (-1,0)\\ \mathcal{A}(x) &= (2,-1)\end{aligned}$$

Nalezněte alespoň jeden $p \in \mathcal{P}_2$ takový, že $\mathcal{A}(p) = (2,3)$.

11. Nalezněte matici lineárního zobrazení $\mathcal{L} : \mathbb{R}_3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_2, x_1 - x_3) \in \mathbb{R}_2$ vzhledem ke standartním bázím.

12. Dokažte nebo vyvraťte, že zadaná bilineární forma v $\mathbb{R}^3$ je skalární součin.

$$B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 4x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2.$$

13. Vypočtěte přibližné řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

$$\begin{aligned}x - 3y + z &= 1\\ x + y + z &= 2\\ x - y - 2z &= -1\\ -x - y - z &= 0\end{aligned}$$

14. Zjistěte, které vektory $\mathbf{e}_1 := (2,0,1,2)$, $\mathbf{e}_2 := (0,1,0,0)$ a $\mathbf{e}_3 := (0,0,0,-1)$ jsou vlastními vektory matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

15. Lokalizujte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$