Domácí úkol č. 17

1. Řešte soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} -\imath x + (2-\imath)y &= 1-\imath \\ x - y &= \imath \end{aligned}$$

2. Vypočtěte inverzní matici k
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{x},\ \text{kde } \mathbf{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda je $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ lineární kombinací $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, kde

$$\mathbf{v} = (2,-2,-2),\ \mathbf{x} = (-1,-1,1),\ \mathbf{y} = (-2,-1,1),\ \mathbf{z} = (-1,-1,1).$$

5. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \ : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

$$p(x) := x^2 + x + 2, \quad q(x) := x^2 - 3x - 1, \quad r(x) := -x^2 + 15x + 10.$$

6. Určete bázi a dimenzi $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V} := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}.$$

7. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \ : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Vypočtěte souřadnice vektorů
$$p(x) := -3x^2 + 3x + 3, \quad q(x) := x^2 + x - 1$$
v bázi $E := \{\mathbf{e}_1(x), \mathbf{e}_2(x), \mathbf{e}_3(x)\}$, kde

$$\mathbf{e}_1(x) := 2x + 1, \quad \mathbf{e}_2(x) := -x + 1, \quad \mathbf{e}_3(x) := x^2 - x - 2.$$

8. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((1,-1,0)) &= (1,-1) \\ \mathcal{A}((1,1,1)) &= (1,-2) \\ \mathcal{A}((-1,1,1)) &= (2,1) \end{aligned}$$

Nalezněte alespoň jeden vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ takový, že $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = (1,2)$.

9. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}((1,-1,0)) &= (1,1,-1)\\
\mathcal{A}((1,1,1)) &= (1,-1,0)\\
\mathcal{A}((-1,1,1)) &= (2,0,-1).
\end{aligned}$$

10. Nalezněte jádro a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(1-x) &= (1,1,2)\\
\mathcal{A}(1+x+x^2) &= (-2,-1,0)\\
\mathcal{A}(-1+x+x^2) &= (-1,0,2).
\end{aligned}$$

11. Rozložte následující čtvercovou matici na symetrickou a antisymetrickou část:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. Vypočtěte matici bilineární formy $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ v kanonické bázi, kde

$$B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = u_1v_1 - u_2v_2 - 3u_1v_2 + 6u_2v_1.$$

13. Vypočtěte přibližné řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

$$\begin{aligned}
x - y + z &= 1\\
2x + y + z &= 2\\
x - 2y - 2z &= -1\\
-x - y - z &= 0
\end{aligned}$$

14. Vypočtěte determinant následující matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Lokalizujte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$