

Domácí úkol č. 16

1. Řešte soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned}(1-i)x + (1-2i)y &= 1-i \\ ix - 2y &= i\end{aligned}$$

2. Vypočtěte inverzní matici k

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Správně uzavorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda je $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ lineární kombinací $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, kde

$$\mathbf{v} = (-2, 0, -1), \mathbf{x} = (2, 2, -2), \mathbf{y} = (-1, 0, 1), \mathbf{z} = (1, 2, 1).$$

5. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

$$p(x) := 3x^2 + 2x, \quad q(x) := x^2 - 2x - 1, \quad r(x) := 3x^2 + 10x + 3.$$

6. Určete bázi a dimenzi \mathcal{V} :

$$\mathcal{V} := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}.$$

7. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2 := \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Vypočtěte souřadnice vektorů

$$p(x) := 4x^2 - 2x - 7, \quad q(x) := -2x^2 - 2$$

v bázi $E := \{\mathbf{e}_1(x), \mathbf{e}_2(x), \mathbf{e}_3(x)\}$, kde

$$\mathbf{e}_1(x) := x^2 + 2x + 1, \quad \mathbf{e}_2(x) := -x - 2, \quad \mathbf{e}_3(x) := -x^2 + 2x.$$

8. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\mathcal{A}((1, -1, 0)) = (1, 1)$$

$$\mathcal{A}((1, 1, 1)) = (1, 2)$$

$$\mathcal{A}((-1, 1, 1)) = (2, 1)$$

Nalezněte $\mathcal{A}((2, 1, 2))$.

9. Nalezněte jádro a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ definovaného předpisem

$$\mathcal{A}((1, 1, -1)) = (1, 1)$$

$$\mathcal{A}((1, -1, 1)) = (1, -1)$$

$$\mathcal{A}((-1, 1, 1)) = (2, -1).$$

10. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definovaného předpisem

$$\mathcal{A}(1 + x - x^2) = (2, 1)$$

$$\mathcal{A}(1 - x + x^2) = (2, -2)$$

$$\mathcal{A}(-1 + x + x^2) = (0, -3).$$

11. Nalezněte matici lineárního zobrazení $\mathcal{L} : \mathbb{R}_3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_3, x_2 + x_3) \in \mathbb{R}_2$ vzhledem ke standardním bázím.

12. Dokažte nebo vyvráťte, že zadaná bilineární forma v \mathbb{R}^3 je skalární součin.

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

13. Vypočtěte přibližné řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

$$2x + y + z = 1$$

$$x + y + z = 0$$

$$x - y - 2z = -1$$

$$-2x - y - z = 0$$

14. Zjistěte, které vektory $\mathbf{e}_1 := (-1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_2 := (-1, 1, -1, -2)$ a $\mathbf{e}_3 := (0, -1, 0, 0)$ jsou vlastními vektory matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

15. Vypočtěte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$