Domácí úkol č. 15

1. Řešte soustavu lineárních rovnic s dvěma pravými stranami, tj. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$ a $\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{c}$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 0 & -2 & 2\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}.$$

2. Řešte soustavu lineárních rovnic a parametrizujte v případě nekonečně mnoha řešení.

$$\begin{aligned} x_1-x_2+x_3-5x_4 &= 2\\ x_1+x_2-x_3+7x_4 &= 0\\ 2x_1-x_2+2x_3-5x_4 &= 4\\ x_2+4x_3+x_4 &= 4\end{aligned}$$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{y},\ \text{kde}\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\ \mathbf{y}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

4. Rozhodněte, zda je $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ lineární kombinací $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^3$, kde

$$\mathbf{v}=(1,2,-2),\ \mathbf{x}=(2,0,2),\ \mathbf{y}=(-1,0,-2),\ \mathbf{z}=(0,0,1).$$

5. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2:=\left\{p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\ :\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\right\}$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:

$$p(x):=x+2,\quad q(x):=x^2-x,\quad r(x):=x^2-2.$$

6. Určete bázi a dimenzi $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V}:=\left\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\ :\ x_1+2x_2-2x_3=0,\ 2x_1+x_2-x_3=0\right\}.$$

7. Mějme vektorový prostor $\mathcal{P}_2:=\left\{p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\ :\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\right\}$. Vypočtěte souřadnice vektorů

$$p(x):=-4x^2+4x,\quad q(x):=4x^2-3x+1$$

v bázi $E:=\{\mathbf{e}_1(x),\mathbf{e}_2(x),\mathbf{e}_3(x)\}$, kde

$$\mathbf{e}_1(x):=x+1,\quad \mathbf{e}_2(x):=x^2-x-1,\quad \mathbf{e}_3(x):=-x+1.$$

8. Rozhodněte, zda zobrazení $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$ definované předpisem

$$\mathcal{A}((x_1,x_2,x_3))=(x_1+2x_2+x_3,x_1+x_2,-x_1+x_3)$$

je lineární.

9. Nalezněte obor hodnot a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((1,1,-1)) &= (2,1)\\ \mathcal{A}((1,-1,1)) &= (2,-2)\\ \mathcal{A}((-1,1,1)) &= (0,-3).\end{aligned}$$

10. Nalezněte jádro a jeho dimenzi lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{P}_2 \mapsto \mathbb{R}^3$ definovaného předpisy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1-x) &= (1,1,2)\\ \mathcal{A}(1+x+x^2) &= (-2,-1,0)\\ \mathcal{A}(-1+x+x^2) &= (-1,0,2).\end{aligned}$$

11. Rozložte následující čtvercovou matici na symetrickou a antisymetrickou část:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. Dokažte nebo vyvraťte, že zadaná bilineární forma v $\mathbb{R}^3$ je skalární součin.

$$B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 4x_1y_1 + 4x_2y_2 + 4x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

13. Klasifikujte následující matici kvadratické formy:

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -4 & -3 & -5 \\ -4 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

14. Zjistěte, které vektory $\mathbf{e}_1 := (2,0,1,2)$, $\mathbf{e}_2 := (-1,0,-1,0)$ a $\mathbf{e}_3 := (0,-1,1,0)$ jsou vlastními vektory matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

15. Lokalizujte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 1/2 \\ -1 & 4 & 2 & -1/2 \\ -2 & 2 & 5 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}.$$